

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

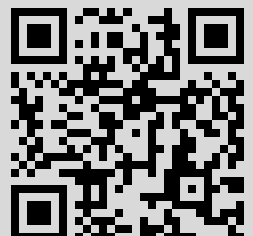
В. А. Гани, Н. Б. Конюхова, С. В. Курочкин, В. А. Ленский, Исследование устойчивости заряженного топологического солитона в системе двух взаимодействующих скалярных полей, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2004, том 44, номер 11, 2069–2083

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 193.233.212.50

24 марта 2015 г., 13:41:05



УДК 519.6:517.958:53

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННОГО ТОПОЛОГИЧЕСКОГО СОЛИТОНА В СИСТЕМЕ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ¹⁾

© 2004 г. В. А. Гани*, Н. Б. Колюхова**, С. В. Курочкин**, В. А. Ленский*

(* 117259 Москва, ул. Большая Черемушкинская, 25, ГИЦ РФ ИТЭФ;

** 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)

e-mail: gani@heron.iter.ru; nadja@ccas.ru; kuroch@ccas.ru

Поступила в редакцию 29.04.2004 г.

Дается аналитико-численный анализ возникающей в нелинейной теории поля сингулярной самосопряженной спектральной задачи для системы трех линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка, заданных на всей действительной оси. Спектральный параметр входит в ОДУ нелинейно, порождая операторный квадратичный эрмитов пучок. Библиограф. 18. Фиг. 2.

Ключевые слова: нелинейная теория поля, топологический заряженный солитон, устойчивость по линейному приближению, сингулярная самосопряженная спектральная задача.

1. ВВЕДЕНИЕ.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Построение точных регулярных решений в системах взаимодействующих классических полей и исследование их динамической устойчивости представляют большой интерес в современной нелинейной теории поля (см., например, [1]).

В данной работе изучается проблема устойчивости одного из таких решений, найденного в недавней работе [2] для системы двух взаимодействующих скалярных полей – нейтрального поля Хиггса и заряженного линейного поля (модель предложена в [3]).

В (1 + 1)-мерном пространстве Минковского рассматриваемая полевая система описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = |\partial_t \xi|^2 - |\partial_x \xi|^2 + (\partial_t \phi)^2/2 - (\partial_x \phi)^2/2 - h^2 \phi^2 |\xi|^2 - m^2 (\phi^2 - v^2)^2/2. \quad (1.1)$$

Здесь ϕ – действительное скалярное поле, ξ – комплексное скалярное поле, h, m, v – вещественные положительные постоянные. Используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$, где c – скорость света в вакууме, \hbar – постоянная Планка. В этой системе единиц нетривиальной остается только размерность массы M , длина и время имеют размерность $1/M$ (см. [1, с. 13]). В (1.1) величины ϕ, ξ, v безразмерны, $[m] = [h] = M$. Удобно перейти к безразмерным независимым переменным

$$\tilde{x} = (hv/\sqrt{2})x, \quad \tilde{t} = (hv/\sqrt{2})t \quad (1.2)$$

и ввести новые функции

$$\tilde{\phi} = \phi/v, \quad \tilde{\xi} = \xi/v. \quad (1.3)$$

В дальнейшем используем переменные (1.2), (1.3), опуская тильду над буквой.

Система уравнений Лагранжа–Эйлера для лагранжиана (1.1) в переменных (1.2), (1.3) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial \tilde{x}^2} + 2\tilde{\phi}^2 \tilde{\xi} = 0, \quad (1.4)$$

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 02-01-00050 и 00-15-96562).

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 4\xi\xi^* \phi + \frac{4}{\kappa^2}(\phi^2 - 1)\phi = 0, \quad t, x \in \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

где κ – положительный безразмерный параметр, $\kappa^2 = \hbar^2/m^2$ (звездочка здесь и далее означает эрмитово сопряжение). Эта система инвариантна относительно глобальных (т.е. не зависящих от x и t) преобразований $\xi \rightarrow \xi \exp(i\alpha)$ и $\phi \rightarrow -\phi$ и имеет в качестве интегралов движения интеграл энергии E , заряд Q и топологический заряд P , задаваемые формулами

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left| \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + 2\phi^2 |\xi|^2 + \frac{1}{\kappa^2} (\phi^2 - 1)^2 \right] dx, \quad (1.6)$$

$$Q = -i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\xi^* \frac{\partial \xi}{\partial t} - \xi \frac{\partial \xi^*}{\partial t} \right) dx, \quad (1.7)$$

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx, \quad (1.8)$$

т.е. величины E , Q не зависят от времени для тех решений системы (1.4), (1.5), для которых интегралы в правых частях (1.6), (1.7) сходятся; величина (1.8) не зависит от t для любой $\phi(t, x)$, которая имеет конечные пределы при $|x| \rightarrow \infty \forall t \in \mathbb{R}$.

Инвариантность уравнений (1.4), (1.5) относительно преобразования $\xi \rightarrow \xi \exp(i\alpha)$, где α – любое вещественное число, означает, по определению, глобальную $U(1)$ -симметрию этих уравнений (см. [1]), и заряд (1.7) называют $U(1)$ -зарядом.

Прежде всего отметим (как очевидные и известные факты), что система (1.4), (1.5) обладает следующими точными частными решениями:

1) тривиальным решением $\xi \equiv 0$, $\phi \equiv 0$, которое называют ложным вакуумом, так как оно обладает ненулевой плотностью энергии; решениями типа бегущих волн над ложным вакуумом, $\xi = \psi(x \pm t)$, $\phi \equiv 0$, где ψ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция (эти решения также обладают ненулевой плотностью энергии);

2) решениями

$$\xi \equiv 0, \quad \phi_{\pm} = \pm 1 \quad (1.9)$$

с нулевой энергией, которые называют истинными вакуумами;

3) решением типа доменной стенки:

$$\xi \equiv 0, \quad \phi_w(x) = \text{th}(\sqrt{2}x/\kappa), \quad (1.10)$$

имеющим конечную энергию

$$E_w = 4\sqrt{2}/(3\kappa), \quad (1.11)$$

нулевой заряд Q и отличный от нуля топологический заряд

$$P_w = 1$$

(разумеется, антистенка $\xi \equiv 0$, $\tilde{\phi}_w = -\phi_w$ – также решение (1.4), (1.5) с той же энергией (1.11) и с топологическим зарядом $\tilde{P}_w = -1$).

Определение 1. Топологическим солитоном (или доменной стенкой) для системы (1.4), (1.5) называем решение, существующее и ограниченное во всем пространстве и удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(t, x) = \pm 1 \quad (= \mp 1), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \xi(t, x) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

т.е. когда $\phi(t, x)$ имеет вид переходного слоя между двумя различными вакуумами, так что топологический заряд $P \neq 0$ (в отличие от нетопологического солитона – решения, выходящего при

$x \rightarrow \pm\infty$ на одно и то же вакуумное значение, т.е. когда $\phi(t, x)$ имеет вид всплеска над истинным вакуумом, так что $P = 0$).

Тогда решение (1.10) – топологический солитон с нулевым зарядом Q .

Определение 2. Говорят, что топологический солитон несет дополнительно $U(1)$ -заряд, если $Q \neq 0$. Такой солитон будем называть *топологическим* Q -боллом (в отличие от нетопологического Q -болла с $P = 0$).

Условия существования нетопологических Q -боллов в модели Ли–Фридберга–Сирлина [3] и их устойчивость обсуждаются наряду с [3] в [1, гл. 10] и в [2]. В частности, показано, что устойчивые нетопологические сферически-симметричные и одномерные Q -боллы для такой модели существуют при больших зарядах: $Q > Q_c$, где Q_c – критический заряд, зависящий от параметров лагранжиана. Однако явный вид таких Q -боллов не найден.

В [2] для системы (1.4), (1.5) найдено точное решение типа топологического Q -болла:

$$\phi_0(t, x) \equiv \phi_0(x) = \text{th } x, \quad (1.12)$$

$$\xi_0(t, x) = \rho(\kappa) \frac{\exp(it)}{\text{ch } x}, \quad 0 < \kappa^2 < 2, \quad \rho(\kappa) = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{2}}, \quad t, x \in \mathbb{R}. \quad (1.13)$$

Для этой конфигурации из (1.6)–(1.8) получаем

$$E_0 = \frac{4}{3} \left(\frac{4}{\kappa^2} - 1 \right), \quad (1.14)$$

$$Q_0 = 2 \left(\frac{2}{\kappa^2} - 1 \right), \quad (1.15)$$

$$P_0 = 1. \quad (1.16)$$

При $\kappa \rightarrow \sqrt{2}$ решение (1.12), (1.13) переходит в решение (1.10).

Замечания. 1. Из предыдущего следует, что функции $\tilde{\phi}_0 = -\phi_0$ и $\tilde{\xi}_0 = \xi_0 \exp(i\alpha)$ – тоже решения системы (1.4), (1.5) с теми же E_0 , Q_0 и $\tilde{P}_0 = -1$.

2. С учетом инвариантности уравнений (1.4), (1.5) относительно преобразований Лоренца по независимым переменным t, x , получаем, что решение (1.10) порождает для уравнения (1.5) (при $\xi \equiv 0$) бегущий волновой фронт $\phi_w(t, x) = \text{th} [(\sqrt{2}/\kappa)(x \pm vt)/\sqrt{1-v^2}]$, если задана начальная скорость v : $0 < v < 1$, а решение (1.12), (1.13) при $\kappa^2 \neq 2$ порождает для системы (1.4), (1.5) бегущую волну вида $\phi_Q(t, x) = \text{th} [(x \pm vt)/\sqrt{1-v^2}]$, $\xi_Q(t, x) = \rho(\kappa) \frac{\exp[i(t \pm vx)/\sqrt{1-v^2}]}{\text{ch}[(x \pm vt)/\sqrt{1-v^2}]}$ с осцилляциями в ξ -компоненте.

В заключение этого раздела коротко остановимся на некоторой дополнительной к [2] физической интерпретации решения (1.12), (1.13). Это решение обладает свойствами, сходными со свойствами возможных Q -боллов [4] в $(3+1)$ -мерном пространстве Минковского, которые, как полагают, могут иметь отношение к проблеме барионной асимметрии Вселенной. Один из механизмов, который может обуславливать барионную асимметрию, предложен в [5]. В соответствии с этим механизмом на поздних стадиях инфляции образуется конденсат, который может эволюционировать в Q -боллы, несущие такой же барионный заряд, но более выгодные энергетически, причем Q -боллы могут существовать до сих пор и давать вклад в темную материю. Кроме того, в [6] отмечено, что такие “реликтовые” Q -боллы могут быть важным фактором при рассмотрении вопроса об устойчивости нейтронных звезд.

Найденное в [2] и изучаемое в данной работе точное решение типа Q -болла в $(1+1)$ -мерном пространстве Минковского наряду с его значением как приближения к $(3+1)$ -мерным Q -боллам может представлять и самостоятельный интерес в связи с изучением доменных стенок и процессов на них.

2. ПРОБЛЕМА ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ, ПОСТАНОВКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

С точки зрения физических приложений, важен вопрос о динамической устойчивости решения (1.12), (1.13). Решение считается абсолютно устойчивым, если оно доставляет *абсолютный* минимум функционалу энергии. Такими решениями для системы (1.4), (1.5) являются истинные вакуумы (1.9). Но эти решения обладают нулевыми Q - и P -зарядами.

Определение 3. Будем говорить, что решение $\xi(t, x)$, $\phi(t, x)$ системы (1.4), (1.5) *абсолютно устойчиво* в секторе $\{P, Q\}$, если оно имеет наименьшую энергию среди всех решений с фиксированными значениями зарядов (1.7), (1.8).

Тогда решение (1.10) абсолютно устойчиво в секторе $\{1, 0\}$, так как в этом секторе это единственное стационарное решение системы (1.4), (1.5).

Вопрос об абсолютной устойчивости решения (1.12), (1.13) в секторе $\{P_0, Q_0\}$, где Q_0, P_0 определены в (1.15), (1.16), является сложным из-за зависимости составляющей (1.13) от времени.

Наводящим соображением относительно устойчивости решения (1.12), (1.13) может быть следующее: параметр κ^2 входит только в амплитуду (1.13), при $\kappa^2 = 2$ решение (1.12), (1.13) переходит в абсолютно устойчивое решение (1.10), при $0 < \kappa^2 < 2$ появляется ненулевой $U(1)$ -заряд, который обычно только стабилизирует решение (см. [1, гл. 10]).

Основная часть данной работы посвящена исследованию динамической устойчивости решения (1.12), (1.13) относительно малых возмущений (устойчивости по Ляпунову в рамках линейной теории). Но предварительно мы приведем некоторые физические соображения по поводу устойчивости конфигурации (1.12), (1.13) относительно возможного ее распада на заряженные нелокализованные образования.

1. Постановка этой задачи состоит в поиске в секторе $\{P_0, Q_0\} = \{1, Q_0\}$ возможных решений, близких к абсолютно устойчивому в секторе $\{1, 0\}$ решению (1.10), в виде малых нелокализованных возмущений поля ξ , определяющих заряд Q_0 . Такие решения, если они существуют, могут оказаться энергетически равными или более выгодными, чем решение (1.12), (1.13). Приближенно решение системы (1.4), (1.5), близкое к (1.10), ищем в виде $\{\delta\xi(t, x), \phi_w(x)\}$, где $|\delta\xi| \ll 1$ и

$$\phi_w = \text{th}(\sqrt{2}x/\kappa), \quad (2.1)$$

т.е. возмущаем в (1.10) только ξ -компоненту. Для $\delta\xi$ из (1.4) получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \delta\xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta\xi}{\partial x^2} + 2 \left[1 - \frac{1}{\text{ch}^2(\sqrt{2}x/\kappa)} \right] \delta\xi = 0. \quad (2.2)$$

Разделяя переменные в (2.2), полагаем

$$\delta\xi(t, x) = e^{i\omega t} f(x), \quad (2.3)$$

где ω – параметр разделения, а $f(x)$ удовлетворяет ОДУ

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left[\omega^2 - 2 + \frac{2}{\text{ch}(\sqrt{2}x/\kappa)} \right] f = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Для заряда и энергии решения (2.3), рассматриваемого на сколь угодно большом, но конечном интервале $(-L, L)$ (по причинам, которые будут ясны из дальнейшего), из (1.6), (1.7) получаем выражения

$$Q = 2\omega \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx, \quad (2.5)$$

$$\delta E = \int_{-L}^L \left[\omega^2 |f|^2 + \left| \frac{df}{dx} \right|^2 + 2 \text{th}^2(\sqrt{2}x/\kappa) |f|^2 \right] dx. \quad (2.6)$$

В интервале $0 \leq \omega^2 < 2$ уравнение (2.4) может обладать только дискретным спектром. Если ω^2 – собственное значение (СЗ) дискретного спектра, то ему отвечает собственная функция (СФ)

$f(x, \omega^2)$, принадлежащая $L_2(-\infty, \infty)$ и имеющая при больших $|x|$ асимптотику

$$f(x, \omega^2) \sim A \exp(-\sqrt{2 - \omega^2}|x|), \quad (2.7)$$

где A – постоянная нормировки. Так как возмущение должно быть нормировано на заданный заряд Q_0 , то при больших Q_0 локализованная СФ с асимптотикой (2.7), вообще говоря, не будет отвечать требованию малости возмущения.

Значения $\omega^2 > 2$ принадлежат непрерывному спектру. Если $f(x, \omega^2)$ – СФ непрерывного спектра, то она имеет при больших $|x|$ асимптотику

$$f(x, \omega^2) \sim A \cos(\sqrt{\omega^2 - 2}|x| + \delta), \quad (2.8)$$

где фаза δ однозначно определяется условием при $x = 0$: $f(0) = 0$ или $f'(0) = 0$, а амплитуда A – постоянная нормировки. Тогда при нормировке (2.5) можно сделать амплитуду A сколь угодно малой за счет выбора L . Кроме того, $f'(x, \omega^2) \sim 0$ при $\omega^2 \sim 2$, так что наименьшее значение для (2.6) получается при $\omega^2 \rightarrow 2$ в (2.8). Так как в рамках рассматриваемого приближения интегралы (1.6), (1.7) с бесконечными пределами расходятся на решениях (2.1), (2.3), (2.8) при $\omega^2 \geq 2$, то мы полагаем $f(x, \omega^2)$ равной нулю вне некоторого (сколь угодно) большого, но конечного интервала $-L < x < L$. Этот известный прием при решении физических задач см. в [7, с. 170–174], а также в [1, гл. 10].

Домножим (2.4) на $f^*(x)$ и проинтегрируем полученное уравнение на отрезке $-L \leq x \leq L$. При этом слагаемое $\frac{d^2 f}{dx^2} f^*$ проинтегрируем по частям, используя условия $f(\pm L) = 0$. В результате получим равенство

$$\int_{-L}^L \left[-\omega^2 |f|^2 + \left| \frac{df}{dx} \right|^2 + 2 \operatorname{th}(\sqrt{2}x/\kappa) |f|^2 \right] dx = 0,$$

откуда и из (2.6) имеем

$$\delta E = 2\omega^2 \int_{-L}^L |f|^2 dx.$$

Отсюда и из (2.5) следует, что при $\omega^2 \geq 2$

$$\delta E = \omega Q \geq \sqrt{2} Q. \quad (2.9)$$

Окончательно получаем, что энергия конфигурации, представляющей собой доменную стенку (2.1) с заряженными возмущениями (2.3) над ней, складывается из E_w (см. (1.11)) и δE (см. (2.9)):

$$E = \omega Q + 4\sqrt{2}/(3\kappa) \geq \sqrt{2} Q + 4\sqrt{2}/(3\kappa), \quad \omega \geq \sqrt{2}. \quad (2.10)$$

(Заметим, что энергия E_0 и заряд Q_0 точного решения (1.12), (1.13) однозначно фиксированы параметрами лагранжиана (1.1). В то же время конфигурация (2.1), (2.3) может иметь в линейном приближении любые E и Q , связанные между собой соотношением (2.10).)

К неравенству (2.10) можно прийти и иным путем. Так как доменная стенка (2.1) локализована на интервале $\sim \kappa/\sqrt{2}$, то для вычисления энергии нелокализованных возмущений поля ξ подставим в уравнение (1.4) $\phi^2 = 1$ и $\xi = \delta\xi(t, x)$, что означает возмущение вакуумов (1.9) по компоненте ξ (здесь заложено разумное с физической точки зрения предположение, что поле ξ сосредоточено в основном вне области локализации стенки). Для функции $\delta\xi$ получим уравнение (ср. с (2.2))

$$\frac{\partial^2 \delta\xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta\xi}{\partial x^2} + 2\delta\xi = 0. \quad (2.11)$$

Для того чтобы избежать появления расходящихся интегралов при вычислении энергии и заряда, снова рассматриваем возмущения $\delta\xi$ на большом, но конечном интервале $-L < x < L$. При заданном заряде Q наименьшую энергию будет иметь следующее (не зависящее от x) нормирован-

ное решение уравнения (2.11):

$$\delta\xi = \sqrt{Q/(4\sqrt{2}L)} \exp(i\sqrt{2}t), \quad (2.12)$$

где нормирующий множитель определен из условия равенства $U(1)$ -заряда поля $\delta\xi$ величине Q :

$$-i \int_{-L}^L \left(\delta\xi^* \frac{\partial \delta\xi}{\partial t} - \delta\xi \frac{\partial \delta\xi^*}{\partial t} \right) dx = Q.$$

Энергия решения (2.12) равна $\sqrt{2}Q$. Добавив к этой величине энергию стенки (1.11), получим выражение, совпадающее с правой частью (2.10).

Для точного же решения (1.12), (1.13) мы получаем из (1.14) и (1.15) следующую связь между зарядом и энергией:

$$E_0 = 4(Q_0 + 1)/3. \quad (2.13)$$

Из (2.10) и (2.13) легко видеть, что при любых допустимых значениях параметра κ энергия точного решения меньше минимально возможной энергии нелокализованной конфигурации (2.1), (2.3) с таким же зарядом. Это позволяет сделать вывод об устойчивости решения (1.12), (1.13) относительно распада на нелокализованную конфигурацию типа стенка + плоские волны.

2. Основная цель данной работы – проведение математического исследования динамической устойчивости решения (1.12), (1.13) в рамках линейной теории возмущений. При этом используется подход из [8]–[10] к изучению устойчивости локализованных решений некоторых нелинейных волновых уравнений теории поля. В частности, в [10] исследовалась устойчивость точного нетопологического солитона, несущего $U(1)$ -заряд, для комплексного волнового уравнения с нелинейностью пятой степени.

Положим $\phi = \phi_0 + \delta\phi$, $\xi = \xi_0 + \delta\xi$, где $\delta\phi$, $\delta\xi$ – малые отклонения от (1.12), (1.13); при этом $\delta\phi(t, x)$ – вещественнозначная функция, $\delta\xi(t, x)$ – комплекснозначная функция. В линейном по отклонениям приближении получаем из (1.4), (1.5) систему уравнений

$$\frac{\partial^2 \delta\xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta\xi}{\partial x^2} + 2\phi_0^2 \delta\xi + 4\phi_0 \xi_0 \delta\phi = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial x^2} + 4\xi_0 \xi_0^* \delta\phi + 4\phi_0 (\xi_0 \delta\xi^* + \xi_0^* \delta\xi) + \frac{4}{\kappa^2} (3\phi_0^2 - 1) \delta\phi = 0. \quad (2.15)$$

Аналогично [8]–[10] ищем решения уравнений (2.14), (2.15) в виде

$$\delta\xi = [\eta(x) \exp(-i\lambda t) + \chi^*(x) \exp(i\lambda^* t)] \exp(it), \quad (2.16)$$

$$\delta\phi = V(x) \exp(-i\lambda t) + V^*(x) \exp(i\lambda^* t). \quad (2.17)$$

Выбор решения в виде (2.16), (2.17) позволяет разделить переменные в (2.14), (2.15) и получить ОДУ для амплитуд возмущений η , χ , V как величин, не зависящих от t . Действительно, подставляя (1.12), (1.13), (2.16), (2.17) в (2.14) и (2.15), получаем относительно функций η , χ , V следующую систему ОДУ с параметром λ :

$$\eta'' = \left(1 + 2\lambda - \lambda^2 - \frac{2}{\text{ch}^2 x} \right) \eta + 4\rho(x) \frac{\text{th} x}{\text{ch} x} V, \quad (2.18)$$

$$\chi'' = \left(1 - 2\lambda - \lambda^2 - \frac{2}{\text{ch}^2 x} \right) \chi + 4\rho(x) \frac{\text{th} x}{\text{ch} x} V, \quad (2.19)$$

$$V'' = \left(\frac{8}{\kappa^2} - \lambda^2 - \frac{8 + 2\kappa^2}{\kappa^2 \text{ch}^2 x} \right) V + 4\rho(x) \frac{\text{th} x}{\text{ch} x} (\eta + \chi), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

Решения системы (2.18)–(2.20) ищем в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \chi(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \chi'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} V'(x) = 0 \quad (2.21)$$

и интегрируемых с квадратом на всей действительной оси.

Требуется найти СЗ параметра λ , при которых сингулярная краевая задача (2.18)–(2.21) имеет нетривиальные решения – СФ, отвечающие этим СЗ. В силу (2.16), (2.17), для любого невещественного СЗ λ (т.е. с ненулевой мнимой частью) возмущения экспоненциально растут во времени. Тем самым для динамической устойчивости решения (1.12), (1.13) относительно малых возмущений вида (2.16), (2.17) дискретный спектр задачи (2.18)–(2.21) должен быть вещественным.

Кроме того, если система ОДУ (2.18)–(2.20) обладает непрерывным спектром, то для устойчивости решения (1.12), (1.13) он также должен лежать на вещественной оси комплексной плоскости λ .

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Учитывая, что система ОДУ (2.18)–(2.20) не меняется при заменах (x, η, χ, V) на $(-x, \eta, \chi, -V)$ и на $(-x, -\eta, -\chi, V)$, окончательно рассматриваем сингулярную краевую задачу на полуоси:

$$\eta'' = \left(1 + 2\lambda - \lambda^2 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}\right)\eta + 4\rho(\kappa)\frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x}V, \quad (3.1)$$

$$\chi'' = \left(1 - 2\lambda - \lambda^2 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}\right)\chi + 4\rho(\kappa)\frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x}V, \quad (3.2)$$

$$V'' = \left(\frac{8}{\kappa^2} - \lambda^2 - \frac{8 + 2\kappa^2}{\kappa^2 \operatorname{ch}^2 x}\right)V + 4\rho(\kappa)\frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x}(\eta + \chi), \quad (3.3)$$

$$0 \leq x < \infty, \quad \kappa^2 \leq 2,$$

$$\eta(0) = \chi(0) = V(0) = 0 \text{ или } \eta'(0) = \chi'(0) = V(0) = 0, \quad (3.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \eta(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \eta'(x) = 0, \quad (3.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \chi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \chi'(x) = 0, \quad (3.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} V'(x) = 0. \quad (3.7)$$

Эта задача с нелинейным вхождением спектрального параметра λ может, вообще говоря, иметь комплексные СЗ. Ее нетривиальные решения ищем в классе комплекснозначных функций, удовлетворяющих требованию

$$\int_0^{\infty} [\eta^*(x)\eta(x) + \chi^*(x)\chi(x) + V^*(x)V(x)] dx < \infty. \quad (3.8)$$

Сразу здесь заметим, что для того, чтобы сингулярная краевая задача (3.1)–(3.7) была корректно поставлена по числу граничных условий при больших x , необходимо и достаточно, чтобы сингулярная задача Коши на бесконечности (3.1)–(3.3), (3.5)–(3.7) выделяла трехпараметрическое семейство решений. Так как система (3.1)–(3.3) асимптотически эквивалентна системе с постоянными коэффициентами, то каждое из распавшихся при больших x ОДУ второго порядка должно обладать однопараметрическим семейством стремящихся к нулю на бесконечности решений. Это приводит к следующим требованиям на расположение СЗ λ в комплексной плоскости:

$$1 + 2\lambda - \lambda^2 \notin (-\infty, 0], \quad 1 - 2\lambda - \lambda^2 \notin (-\infty, 0], \quad 8/\kappa^2 - \lambda^2 \notin (-\infty, 0], \quad (3.9)$$

т.е. в комплексной плоскости λ эти величины не лежат на неположительной вещественной полуоси. Тогда для достаточно больших x , $x \gg 1$, трехмерное линейное подпространство, порожденное в фазовом пространстве \mathbb{C}^6 системы (3.1)–(3.3) значениями решений сингулярной задачи Коши (3.1)–(3.3), (3.5)–(3.7), задается в виде

$$\eta'(x) \approx -\sqrt{1 + 2\lambda - \lambda^2}\eta(x), \quad (3.10)$$

$$\chi'(x) \approx -\sqrt{1 - 2\lambda - \lambda^2} \chi(x), \quad (3.11)$$

$$V(x) \approx -\sqrt{8/\kappa^2 - \lambda^2} V(x), \quad (3.12)$$

где корни берутся с положительной вещественной частью (подробнее см. [11]).

Отсюда справедливы следующие утверждения: 1) вещественные СЗ задачи (3.1)–(3.8), если они существуют, в силу (3.9) удовлетворяют неравенствам

$$-\sqrt{2} + 1 < \lambda < \sqrt{2} - 1; \quad (3.13)$$

2) геометрическая кратность каждого СЗ задачи (3.1)–(3.8) не может превосходить трех, т.е. каждому СЗ может отвечать не более трех линейно независимых СФ;

3) система ОДУ (3.1)–(3.3) обладает непрерывным спектром, лежащим на вещественной оси комплексной плоскости λ на интервалах $(-\infty, -\sqrt{2} + 1)$ и $(\sqrt{2} - 1, \infty)$ (условия (3.10), (3.11) и (3.12) переходят в условия типа излучения, соответственно, при $\lambda \in (-\infty, -\sqrt{2} + 1)$ и $\lambda \in (1 + \sqrt{2}, \infty)$, при $\lambda \in (-\infty, -\sqrt{2} - 1)$ и $\lambda \in (\sqrt{2} - 1, \infty)$ и при $\lambda^2 > 8/\kappa^2 \geq 4$); эти вещественные интервалы непрерывного спектра не влияют на устойчивость решения (1.12), (1.13) относительно малых возмущений вида (2.16), (2.17).

Заметим также, что если λ – чисто мнимое СЗ задачи (3.1)–(3.8), то $\eta = \chi^*$, а V – вещественная функция.

Дополним эти утверждения дальнейшими фактами и оценками.

1. **Случай $\kappa^2 = 2$.** При $\kappa^2 = 2$ система (3.1)–(3.3) распадается на три ОДУ второго порядка:

$$\eta'' + [2/\operatorname{ch}^2 x - (1 + 2\lambda - \lambda^2)]\eta = 0, \quad (3.14)$$

$$\chi'' + [2/\operatorname{ch}^2 x - (1 - 2\lambda - \lambda^2)]\chi = 0, \quad (3.15)$$

$$V'' + [6/\operatorname{ch}^2 x - (4 - \lambda^2)]V = 0, \quad (3.16)$$

каждое из которых может быть приведено к гипергеометрическому уравнению. В самом деле, рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \left[\frac{s(s+1)}{\operatorname{ch}^2 x} - \varepsilon^2 \right] \Psi = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (3.17)$$

и введем замену переменной $y = \operatorname{th} x$. Для функции $\psi(y)$ получим уравнение

$$\frac{d}{dy} \left[(1 - y^2) \frac{d\psi}{dy} \right] + \left[s(s+1) - \frac{\varepsilon^2}{1 - y^2} \right] \psi = 0, \quad -1 < y < 1,$$

которое сводится к гипергеометрическому подстановкой $\psi(y) = (1 - y^2)^{\varepsilon/2} w(y)$ и заменой $(1 - y)/2 = z$. Считая $w = w(z)$, получаем

$$z(1 - z)w'' + [(\varepsilon + 1) - ((\varepsilon - s) + (\varepsilon + s + 1) + 1)z]w' - (\varepsilon - s)(\varepsilon + s + 1)w = 0, \quad 0 < z < 1.$$

Это уравнение имеет два независимых интеграла (см. [12]):

$$w_1(z) = F(\varepsilon - s, \varepsilon + s + 1, \varepsilon + 1, z) \quad \text{и} \quad w_2(z) = z^{-\varepsilon} F(s + 1, -s, 1 - \varepsilon, z),$$

где F – гипергеометрическая функция:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} z^k, \quad |z| < 1, \quad (\sigma)_k = \frac{\Gamma(\sigma + k)}{\Gamma(\sigma)}.$$

Следовательно, возвращаясь к (3.17), получаем

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^\varepsilon x} F(\varepsilon - s, \varepsilon + s + 1, \varepsilon + 1, (1 - \operatorname{th} x)/2),$$

$$\psi_2(x) = 2^\varepsilon \exp(\varepsilon x) F(s + 1, -s, 1 - \varepsilon, (1 - \operatorname{th} x)/2).$$

Тогда только ψ_1 принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$ при условии, что $\varepsilon > 0$, $\varepsilon - s = -n$, где $n = 0, 1, \dots$, когда F становится полиномом степени n относительно $\text{th} x$ и, следовательно, имеет конечные пределы при $x \rightarrow \pm\infty$.

Например, для уравнения (3.14) имеем $s = 1$, $\varepsilon = \sqrt{1 + 2\lambda - \lambda^2} = 1 - n > 0$, откуда следует $n = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\psi_1(x, \lambda_1) = \psi_1(x, \lambda_2) \equiv \eta(x) = 1/\text{ch} x$. Аналогично поступаем с уравнениями (3.15) и (3.16). Следовательно, в случае $\kappa^2 = 2$ можно найти все точки дискретного спектра задачи (3.1)–(3.8) и отвечающие им СФ (формулы для СФ всюду пишем с точностью до нормирующего множителя):

$$\lambda_1 = 0: \eta \equiv 0, \quad \chi \equiv 0, \quad V = 1/\text{ch}^2 x, \tag{3.18}$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ и } \lambda_2 = 2: \eta = 1/\text{ch} x, \quad \chi \equiv 0, \quad V \equiv 0, \tag{3.19}$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ и } \lambda_3 = -2: \eta \equiv 0, \quad \chi = 1/\text{ch} x, \quad V \equiv 0, \tag{3.20}$$

$$\lambda_{4,5} = \pm\sqrt{3}: \eta \equiv 0, \quad \chi \equiv 0, \quad V = \text{th} x/\text{ch} x.$$

Таким образом, при $\kappa^2 = 2$ для задачи (3.1)–(3.8) значение $\lambda = \lambda_1 = 0$ является СЗ максимально возможной геометрической кратности, равной трем, в то время как $\lambda_{2,3,4,5}$ – однократные СЗ.

2. Случай $0 < \kappa^2 < 2$. Нетрудно проверить, что при любом $\kappa: 0 < \kappa^2 < 2$, значение $\lambda = \lambda_1 = 0$ остается СЗ задачи (3.1)–(3.8), которому отвечают по крайней мере две СФ:

$$\lambda_1 = 0: \eta = -\chi = 1/\text{ch} x, \quad V = 0, \tag{3.21}$$

$$\lambda_1 = 0: \eta = \chi = -\rho(x) \frac{\text{th} x}{\text{ch} x}, \quad V = \frac{1}{\text{ch}^2 x}. \tag{3.22}$$

Далее заметим, что если $(\eta(x), \chi(x), V(x), \lambda)$ – решение задачи (3.1)–(3.8), то также будут решениями $(\eta^*(x), \chi^*(x), V^*(x), \lambda^*)$, $(\chi(x), \eta(x), V(x), -\lambda)$ и $(\chi^*(x), \eta^*(x), V^*(x), -\lambda^*)$, так что достаточно рассмотреть, например, следующую область значений λ :

$$\text{Re} \lambda \geq 0, \quad \text{Im} \lambda \geq 0. \tag{3.23}$$

Систему (3.1)–(3.3), следуя [8]–[10], запишем в виде

$$\lambda^2 I \Psi - 2\lambda D \Psi - H \Psi = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \tag{3.24}$$

где $\Psi = (\eta, \chi, V)^T$ (T – знак транспонирования), а I, H, D – операторы, рассматриваемые в пространстве трехкомпонентных комплекснозначных, дважды непрерывно дифференцируемых и ограниченных на полуоси функций Ψ , удовлетворяющих условиям (3.4)–(3.8), $\Psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^3$, со скалярным произведением

$$(\Psi, \Psi) = \int_0^\infty \Psi^*(x) \Psi(x) dx.$$

Здесь I – единичный оператор, а D и H имеют вид

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad H = \begin{vmatrix} H_{11} & 0 & H_{13} \\ 0 & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{vmatrix}, \tag{3.25}$$

где

$$H_{11} = H_{22} = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{\text{ch}^2 x} + 1, \tag{3.26}$$

$$H_{33} = -\frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{8}{\kappa^2} + 2\right) \frac{1}{\text{ch}^2 x} + \frac{8}{\kappa^2},$$

$$H_{13} = H_{31} = H_{23} = H_{32} = 4\rho(\kappa) \frac{\text{th} x}{\text{ch} x}.$$

Умножив (3.24) скалярно на Ψ (предполагаем, что Ψ нормирована условием $(\Psi, \Psi) = 1$), получаем

$$\lambda^2 - 2\lambda(\Psi, D\Psi) - (\Psi, H\Psi) = 0. \quad (3.27)$$

Так как H и D – эрмитовы операторы, то $(\Psi, D\Psi)$ и $(\Psi, H\Psi)$ – действительные числа. Из (3.27) следует

$$\lambda = (\Psi, D\Psi) \pm \sqrt{(\Psi, D\Psi)^2 + (\Psi, H\Psi)}. \quad (3.28)$$

Эрмитовость D очевидна; эрмитовость H следует из эрмитовости оператора $-d^2/dx^2$, которая, в свою очередь, следует из обращения в 0 подстановок $\Psi^* \frac{d\Psi}{dx} \Big|_0^\infty$ и $\frac{d\Psi^*}{dx} \Psi \Big|_0^\infty$ для функций, удовлетворяющих условиям (3.4)–(3.7).

Отсюда можно получить оценки для СЗ λ с ненулевой мнимой частью. В самом деле, в этом случае из (3.28) можно заключить, что

$$\operatorname{Re} \lambda = (\Psi, D\Psi), \quad \operatorname{Im} \lambda = \sqrt{-(\Psi, D\Psi)^2 - (\Psi, H\Psi)}, \quad |\lambda|^2 = -(\Psi, H\Psi). \quad (3.29)$$

Имеем следующие оценки для действительной и мнимой частей λ :

$$|\operatorname{Re} \lambda| = |(\Psi, D\Psi)| = \left| \int_0^\infty dx (\eta^* \eta - \chi^* \chi) \right| \leq \int_0^\infty dx |\eta^* \eta - \chi^* \chi| \leq \int_0^\infty dx (\eta^* \eta + \chi^* \chi) \leq 1, \quad (3.30)$$

$$|\operatorname{Im} \lambda| = \sqrt{-(\Psi, D\Psi)^2 - (\Psi, H\Psi)} \leq \sqrt{-(\Psi, H\Psi)} \leq \sqrt{-\mu_{\min}}, \quad (3.31)$$

где μ_{\min} – наименьшее СЗ оператора H . Получим оценку для μ_{\min} . Из (3.25), (3.26) имеем

$$(\Psi, H\Psi) = \int_0^\infty dx [\eta^* H_{11} \eta + \chi^* H_{22} \chi + V^* H_{33} V] + \int_0^\infty dx [\eta^* H_{13} V + \chi^* H_{23} V + V^* H_{31} \eta + V^* H_{32} \chi].$$

Для первого интеграла получаем, отбрасывая заведомо положительные члены,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dx \left[\eta^* \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x} \right) \eta + \chi^* \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x} \right) \chi + V^* \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{8}{\kappa^2} - \left(\frac{8}{\kappa^2} + 2 \right) \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \right) V \right] = \\ & = \int_0^\infty dx \left[\eta^* \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2 \operatorname{th}^2 x - 1 \right) \eta + \chi^* \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2 \operatorname{th}^2 x - 1 \right) \chi + V^* \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{8}{\kappa^2} + 2 \right) \operatorname{th}^2 x - 2 \right) V \right] \geq \\ & \geq - \int_0^\infty dx [\eta^* \eta + \chi^* \chi + 2V^* V] \geq -2 \int_0^\infty dx [\eta^* \eta + \chi^* \chi + V^* V] = -2(\Psi, \Psi) = -2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Для оценки второго интеграла, учитывая, что $\left| \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x} \right| \leq \frac{1}{2}$, получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty dx 4\rho(\kappa) \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x} [V^*(\chi + \eta) + (\chi + \eta)^* V] \right| \leq \\ & \leq 4\rho(\kappa) \int_0^\infty dx \left| \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x} [V^*(\chi + \eta) + (\chi + \eta)^* V] \right| \leq 2\rho(\kappa) \int_0^\infty dx |V^*(\chi + \eta) + (\chi + \eta)^* V|. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Далее произведем преобразование по формулам

$$\eta = (u + w)/2 - t/\sqrt{2}, \quad \chi = (u + w)/2 + t/\sqrt{2}, \quad V = (u - w)/\sqrt{2}. \quad (3.34)$$

Заметим, что преобразование (3.34) унитарное, так что оно не меняет скалярного произведения (Ψ, Ψ) . Согласно (3.34) имеем

$$\int_0^{\infty} dx |V^*(\chi + \eta) + (\chi + \eta)^* V| = \sqrt{2} \int_0^{\infty} dx |u^* u - w^* w| \leq \quad (3.35)$$

$$\leq \sqrt{2} \int_0^{\infty} dx (u^* u + w^* w) \leq \sqrt{2} \int_0^{\infty} dx (u^* u + w^* w + t^* t) = \sqrt{2} (\Psi, \Psi) = \sqrt{2}.$$

Из (3.33), (3.35) получаем

$$\left| \int_0^{\infty} dx 4\rho(\kappa) \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x} [V^*(\chi + \eta) + (\chi + \eta)^* V] \right| \leq 2\sqrt{2/\kappa^2 - 1},$$

откуда и из (3.32) следует

$$\mu_{\min} \geq -2(1 + \sqrt{2/\kappa^2 - 1}). \quad (3.36)$$

Окончательно из (3.29)–(3.31), (3.36) получаем оценки

$$|\lambda| \leq \sqrt{-\mu_{\min}} \leq \sqrt{2(1 + \sqrt{2/\kappa^2 - 1})}, \quad (3.37)$$

$$|\operatorname{Re} \lambda| \leq 1, \quad |\operatorname{Im} \lambda| \leq \sqrt{-\mu_{\min}} \leq \sqrt{2(1 + \sqrt{2/\kappa^2 - 1})}. \quad (3.38)$$

4. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

1. Уточнение области локализации СЗ задачи (3.1)–(3.8)

Наряду с аналитическими оценками (3.37), (3.38) области локализации СЗ задачи (3.1)–(3.8) можно эту область уточнить численно, исходя непосредственно из оценки

$$|\lambda| \leq \sqrt{-\mu_{\min}(\kappa)}. \quad (4.1)$$

Для нахождения чисел $\mu_{\min}(\kappa)$ рассмотрим сопутствующую задачу на СЗ для оператора H (см. (3.25), (3.26)), т.е. систему ОДУ с параметром

$$\mu I \Psi - H \Psi = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (4.2)$$

с краевыми условиями (3.4)–(3.7) и требованием (3.8).

Для численного решения эта задача должна быть сведена к задаче на конечном интервале. Как уже отмечалось в разд. 3, условие принадлежности решений пространству $L_2[0, \infty)$ эквивалентно требованию принадлежности значений решений при больших x трехмерному подпространству в \mathbb{C}^6 , которое с точностью до экспоненциально малых членов задается в виде

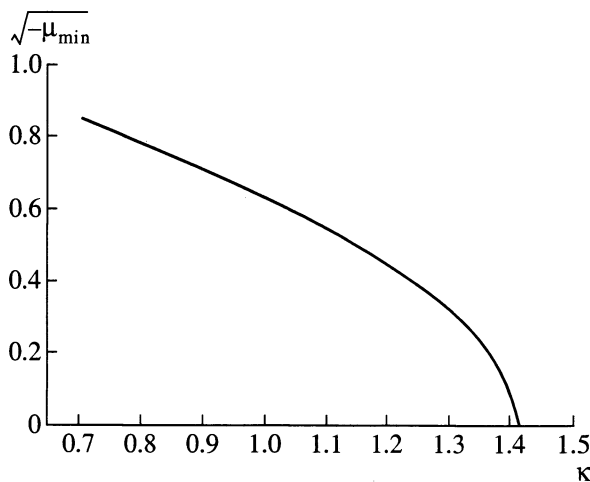
$$\eta'(x_{\infty}) = -\sqrt{1 - \mu} \eta(x_{\infty}), \quad (4.3)$$

$$\chi'(x_{\infty}) = -\sqrt{1 - \mu} \chi(x_{\infty}), \quad (4.4)$$

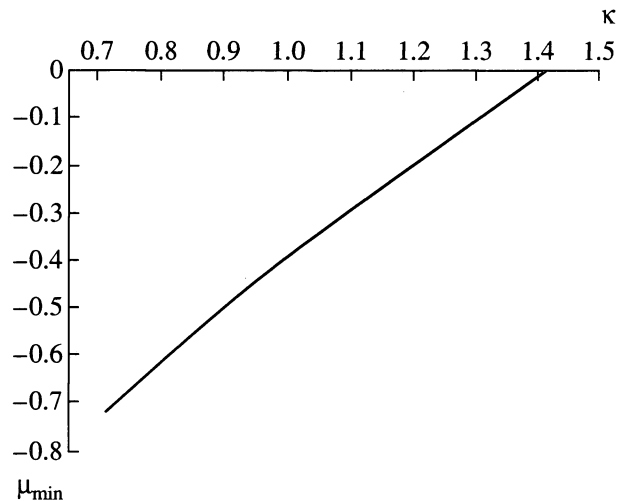
$$V'(x_{\infty}) = -\sqrt{8/\kappa^2 - \mu} V(x_{\infty}), \quad (4.5)$$

где $\mu < 1$, $x_{\infty} \gg 1$ (ср. (3.10)–(3.12)).

Задача (4.2), (3.4), (4.3)–(4.5) является самосопряженной. Учитывая п. 1 разд. 3, сразу получаем, что при $\kappa = \sqrt{2}$ ее единственным СЗ (кратности 3) является $\mu = 0$ и ему отвечают 3 СФ: (3.18)–(3.20). При κ , отличных от $\sqrt{2}$, значение $\mu = 0$ остается двукратным СЗ с СФ (3.21), (3.22), а третий нуль начинает ползти в область отрицательных значений, как показали расчеты. Численное отыскание СЗ осуществляется переносом граничных условий (4.3)–(4.5) из точки $x = x_{\infty}$ в точку $x = 0$ и исследованием перемен знака результирующего определителя. При этом используется ва-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

риант прогонки [13] (с учетом исследований [14] по устойчивому применению методов ортогональной прогонки в сингулярных задачах).

Расчеты показали, что при изменении κ от $\sqrt{2}$ к нулю двукратное СЗ остается в нуле, а однократное СЗ (которое и есть интересующее нас μ_{\min}) движется в область отрицательных значений (см. фиг. 1). Сравнение с (3.36) показывает, что аналитическая оценка сильно завышена; так, например, при $\kappa = 1.2$ значение $\sqrt{-\mu_{\min}}$, найденное численно, равно 0.45, тогда как (3.36) дает значение 1.8. Тем не менее уже при $\kappa \approx 1.23$ значение $\sqrt{-\mu_{\min}}$ по абсолютной величине превосходит $\sqrt{2}-1$ (см. оценку (3.36) и фиг. 2), что усложняет локализацию СЗ задачи (3.1)–(3.8) (см. далее).

2. Поиск СЗ задачи (3.1)–(3.8) в секторе (4.1), (3.23)

Перейдем непосредственно к задаче (3.1)–(3.8). Ее сведение к задаче на конечном интервале осуществляется аналогично предыдущей задаче для ОДУ (4.2), и отход от бесконечности в виде (3.10)–(3.12) дает граничные условия в точке $x = x_{\infty}$:

$$\eta'(x_{\infty}) = -\sqrt{1 + 2\lambda - \lambda^2} \eta(x_{\infty}), \quad (4.6)$$

$$\chi'(x_{\infty}) = -\sqrt{1 - 2\lambda - \lambda^2} \chi(x_{\infty}), \quad (4.7)$$

$$V'(x_{\infty}) = -\sqrt{8/\kappa^2 - \lambda^2} V(x_{\infty}), \quad (4.8)$$

где корни берутся с положительной действительной частью.

Численное исследование полученной несингулярной спектральной задачи (3.1)–(3.4), (4.6)–(4.8) проводилось методом, основанным на обобщении принципа аргумента (о методах локализации точек дискретного спектра с применением принципа аргумента и его модификаций см., например, [15]–[18] и цитированную там литературу) с использованием дифференциальной прогонки (см. [13]) (как уже отмечалось, об устойчивом применении метода [13] и других вариантов прогонки в сингулярных задачах на отыскание СЗ и СФ дискретного спектра см. [14]). Условия (4.6)–(4.8) представляются в виде

$$\varphi(x_{\infty}, \lambda) W(x_{\infty}, \lambda) = 0, \quad (4.9)$$

где $W = (\eta, \eta', \chi, \chi', V, V)^\tau$,

$$\varphi(x_\infty, \lambda) = \begin{vmatrix} \sqrt{1+2\lambda-\lambda^2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-2\lambda-\lambda^2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{8/\kappa^2-\lambda^2} & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.10)$$

В результате прогонки получается эквивалентное (4.9), (4.10) условие в точке $x = 0$ с 3×6 -матрицей $\varphi(0, \lambda)$. Если дополнить эту матрицу до квадратной, приписав к ней снизу матрицу, соответствующую условиям (3.4), то задача поиска СЗ может быть переформулирована следующим образом:

число λ является СЗ \Leftrightarrow определитель результирующей матрицы равен нулю;

геометрическая (т.е. по количеству линейно независимых СФ) кратность СЗ равна дефекту результирующей матрицы.

Заметим, что коэффициенты матрицы $\varphi(0, \lambda)$, а следовательно, и определитель результирующей матрицы не аналитичны по λ . Тем не менее, как показано в [16], для определения количества СЗ в заданной области спектрального параметра λ по-прежнему можно использовать принцип аргумента применительно к указанной выше матрице. Поиск можно осуществлять по определителю M_{245} для первого из условий (3.4) и M_{136} – для второго, где M_{ijk} – минор матрицы $\varphi(0, \lambda)$, стоящий в столбцах i, j, k . Нули $\det(M_{ijk})$ соответствуют СЗ задачи (3.1)–(3.4), (4.6)–(4.8). Будем называть алгебраической кратностью СЗ его кратность как нуля этого определителя.

Из проведенных оценок следует, что областью поиска неустойчивых λ является при κ , мало отличающихся от $\sqrt{2}$, – круг с центром в нуле радиуса $\sqrt{-\mu_{\min}}$ (см. (4.1)), а при дальнейшем приближении κ к нулю – такой же круг с разрезами по вещественной оси от $\sqrt{2} - 1$ вправо и от $-\sqrt{2} + 1$ влево (см. (3.13)).

Принципиальной сложностью задачи является то, что точки, лежащие на разрезах, принадлежат непрерывному спектру (при λ , близких к разрезам, численный счет теряет устойчивость). Таким образом, методы локализации СЗ, описанные в [15]–[18], в непосредственном виде неприменимы, поскольку результирующий определитель (или иная функция, используемая в принципе аргумента) не продолжается непрерывно на границу области. (Заметим только, что если бы с интервалов непрерывного спектра появлялись дискретные СЗ, то они должны были бы как-то эволюционировать с изменением κ , но численно с изменением κ вблизи разрезов ничего не обнаруживается.)

Из симметрии задачи следует, что ее СЗ с ненулевыми вещественной и мнимой частями располагаются в комплексной λ -плоскости “четверками” ($\lambda, -\lambda, \lambda^*, -\lambda^*$), а с ненулевой только вещественной или только мнимой частью – парами по вещественной или мнимой оси соответственно.

Для исследования возмущения вырожденного СЗ $\lambda = 0$ и выявления наличия/отсутствия не вещественных СЗ проводились расчеты по следующим контурам в области λ :

по кругам с центром в $\lambda = 0$ радиусами от ϵ до $\sqrt{2} - 1 - \epsilon$, где ϵ – малое число;

по круговым секторам с углом раствора 90° , вершиной в $\lambda = i\epsilon$ и с радиусом $\sqrt{-\mu_{\min}}$, расположенным в первом квадранте (используется свойство симметрии СЗ);

по отрезкам вещественной и мнимой осей;

по отдельным контурам вне вещественной оси.

Расчеты показали, что в вырожденном случае $\kappa = \sqrt{2}$ СЗ $\lambda = 0$ имеет алгебраическую кратность 4 и геометрическую кратность 3 (ср. (3.18)–(3.20)). Несовпадение кратностей объясняется не наличием жордановой клетки (что невозможно в силу самосопряженности краевой задачи), а квадратичным вхождением спектрального параметра λ в уравнение (3.3).

При изменении κ от $\sqrt{2}$ к 0 наблюдается следующая картина. СЗ $\lambda = 0$ по-прежнему имеет алгебраическую кратность 4. Тем самым можно утверждать, что от $\lambda = 0$ не отщепляются никакие (в том числе неустойчивые) СЗ. Более того, при κ , мало отличающихся от $\sqrt{2}$, из полученных результатов строго следует, что у задачи нет никаких других СЗ. Геометрическая кратность при

отходе от $\kappa = \sqrt{2}$ падает с 3 до 2 (вместо СФ (3.18), (3.20) остается (3.21)). Потеря геометрической кратности задачи при возмущении параметра – характерное явление для квадратичных пучков (в отличие от линейных). СФ (3.18)–(3.20) при $\kappa = \sqrt{2}$ и (3.21), (3.22) при других κ численно воспроизводятся с точностью порядка 10^{-4} . По мере приближения κ к нулю задача (3.1)–(3.8) становится все более жесткой. При расчетах с фиксированной (двойной) относительной точностью удалось довести κ до величин порядка 0.05.

В качестве дополнительного контроля устойчивости СЗ $\lambda = 0$ использовалось следующее соображение. Из симметрии СЗ и существования СФ (3.21), (3.22) следует, что, как минимум, двукратность СЗ $\lambda = 0$ сохраняется. Следовательно, возмущение могло бы происходить только отщеплением двух симметричных СЗ по какой-то из осей. Отсутствие такого эффекта было численно проверено отдельно (с учетом оценок (3.13) и (3.38)). Никаких других СЗ расчеты не обнаружили.

Окончательно можно утверждать (с наибольшей строгостью – для диапазона изменения параметра κ : $1.23 \leq \kappa < \sqrt{2}$), что сингулярная краевая задача (3.1)–(3.8) имеет только одно СЗ $\lambda = 0$ геометрической кратности 2 с СФ (3.21), (3.22) и алгебраической кратности 4; никаких комплексных СЗ в допустимой области (4.1) их существования нами не найдено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные аналитические и численные исследования позволяют сделать вывод о динамической устойчивости решения (1.12), (1.13) относительно малых возмущений вида (2.16), (2.17) при $0 < \kappa < \sqrt{2}$, причем с наибольшей строгостью это можно утверждать для диапазона изменения параметра κ : $1.23 \leq \kappa < \sqrt{2}$. Кроме того, решение (1.12), (1.13) в процессе эволюции не может распасться на малые нелокализованные колебания (по компоненте ξ) над кинком (1.10), так как это энергетически невыгодно. Вопрос же об абсолютной устойчивости/неустойчивости топологического Q-болла (1.12), (1.13) в секторе $\{P_0, Q_0\}$ остается открытым.

Авторы благодарят А.А. Абрамова, Н.А. Воронова, А.Е. Кудрявцева и С.П. Попова за обсуждение работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рубаков В.А. Классические калибровочные поля. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
2. Ленский В.А., Гани В.А., Кудрявцев А.Е. О доменных стенках, несущих $U(1)$ -заряд // Ж. эксперим. и теор. физ. 2001. Т. 120. С. 778–785.
3. Friedberg R., Lee T.D., Sirlin A. Class of scalar-field soliton solutions in three space dimensions // Phys. Rev. D. 1976. V. 13. P. 2739–2761.
4. Coleman S. Q-balls // Nucl. Phys. B. 1985. V. 262. P. 263–283.
5. Affleck I., Dine M. A new mechanism for baryogenesis // Nucl. Phys. B. 1985. V. 249. P. 361–380.
6. Kusenko A., Shaposhnikov M., Tinyakov P., Tkachev I. Star wreck // Phys. Letts. B. 1998. V. 423. P. 104–108.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988.
8. Anderson D.L.T., Derrick G.H. Stability of time-dependent particlelike solution in nonlinear field theories. I // J. Math. Phys. 1970. V. 11. № 4. P. 1336–1346.
9. Anderson D.L.T. Stability of time-dependent particlelike solution in nonlinear field theories. II // J. Math. Phys. 1971. V. 12. № 6. P. 945–952.
10. Белова Т.И., Воронов Н.А., Колюхова Н.Б., Парийский Б.С. Области устойчивости одномерных солитонов заряженного скалярного поля // Ядерная физ. 1994. Т. 57. № 11. С. 2105–2112.
11. Биргер Е.С., Ляликова (Колюхова) Н.Б. О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 5. С. 979–990.
12. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963.

13. *Абрамов А.А.* О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1961. Т. 1. № 3. С. 542–545.
14. *Абрамов А.А., Диткин В.В., Конюхова Н.Б. и др.* Вычисление собственных значений и собственных функций обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1980. Т. 20. № 5. С. 1155–1172.
15. *Курочкин С.В.* Метод нахождения собственных значений несамосопряженной краевой задачи // *Докл. РАН.* 1994. Т. 336. № 4. С. 442–443.
16. *Абрамов А.А., Юхно Л.В.* Об определении числа собственных значений спектральной задачи // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1994. Т. 34. № 5. С. 776–783.
17. *Курочкин С.В.* Топологические методы локализации собственных значений краевых задач // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1995. Т. 35. № 8. С. 1165–1174.
18. *Абрамов А.А., Ульянова В.И., Юхно Л.В.* Об использовании принципа аргумента в спектральной задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1998. Т. 38. № 1. С. 61–67.