УДК 519.6:517.588

# ВЫСОКОТОЧНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ УГЛОВЫХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ[1)]

© 2006 г. А. А. Абрамов, С. В. Курочкин
(119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)
e-mail: alalabr@ccas.ru, kuroch@ccas.ru
Поступила в редакцию 01.07.2005 г.

Предлагается и исследуется новый метод вычисления угловых сфероидальных функций I рода. Метод частично основан на известных представлениях таких функций; однако некоторые дополнительные конструкции, предлагаемые в работе, дают возможность эффективно вычислять с высокой точностью значение функций в заданной точке при широком диапазоне изменения параметров. Библ. 7.

**Ключевые слова:** угловая сфероидальная функция, присоединенная функция Лежандра, задача на собственные значения.

**1.** Вопросам вычисления сфероидальных функций посвящено много работ (см., в частности, [1]–[6]). В настоящей статье мы рассматриваем задачу вычисления угловых сфероидальных функций I рода. Все утверждения разд. 1 взяты из [1]–[3].

Угловая сфероидальная функция I рода $u(z)$ определяется задачей на собственные значения (СЗ) для дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{du}{dz}\right)+\left(\lambda+4\theta(1-z^2)-\frac{m^2}{1-z^2}\right)u = 0, \quad -1<z<1. \tag{1.1}$$

Здесь $m$ – заданное неотрицательное целое число; $\theta$ – заданное вещественное число, $\theta > 0$ соответствует так называемым вытянутым сфероидальным функциям, $\theta < 0$ – сплюснутым, $\theta = 0$ – сферическим функциям; $\lambda$ – спектральный параметр, выбираемый так, чтобы уравнение (1.1) имело нетривиальное решение $u(z)$, ограниченное при $z \longrightarrow \pm 1$.

Возникающие СЗ образуют возрастающую последовательность вещественных чисел, члены которой принято нумеровать следующим образом: $\lambda_m < \lambda_{m+1} < \ldots$; $\lim\limits_{p\to\infty}\lambda_p = \infty$. Каждому $\lambda_l$ соответствует одна с точностью до числового множителя собственная функция $u_l(z)$, эта функция имеет на интервале $(-1, 1)$ ровно $l-m$ нулей; о нормировке $u_l(z)$ будет сказано далее.

Функция $u_l(z)$ представляется разложением

$$u_l(z) = \sum_{r=0,1}^{\infty}{}' d_r P_{m+r}^m(z),$$

где $P_n^m(z)$ – присоединенные функции Лежандра:

$$P_n^m(z) = \frac{(1-z^2)^{m/2}}{2^n n!}\frac{d^{m+n}(z^2-1)^n}{dz^{m+n}};$$

обозначение $\sum_{r=0,1}^{\infty}{}'$ указывает, что суммирование ведется по значениям $r$ той же четности, что и $l-m$, это соответствует тому, что функция $u_l(z)$ четная при четном $l-m$ и нечетная при нечетном $l-m$. Для коэффициентов $d_r$ возникают две бесконечные трехчленные системы уравнений

$$A_r d_{r+2} + (B_r - \lambda_l)d_r + C_r d_{r-2} = 0, \tag{1.2}$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00257).

где

$$A_r = \frac{4\theta(2m+r+2)(2m+r+1)}{(2m+2r+3)(2m+2r+5)},$$

$$B_r = (m+r)(m+r+1) - \frac{8\theta[(r+m)(r+m+1)+m^2-1]}{(2m+2r+3)(2m+2r-1)}, \tag{1.3}$$

$$C_r = \frac{4\theta r(r-1)}{(2m+2r-3)(2m+2r-1)}.$$

Соотношения (1.3) берутся при $r = 0, 2, \ldots$ для четных $l - m$ и при $r = 1, 3, \ldots$ для нечетных $l - m$. При $r = 0$ и $r = 1$ формула (1.2) принимает вид

$$A_r d_{r+2} + (B_r - \lambda_l)d_r = 0; \tag{1.4}$$

тем самым $d_{-1}$ и $d_{-2}$ в соотношения (1.2) не входят, хотя формально в записи присутствуют.

При $\theta = 0$ из формулы (1.3) следует, что функция $u_l(z)$ пропорциональна присоединенной функции Лежандра и $\lambda_l = l(l+1)$; далее всюду полагаем, что $\theta \neq 0$.

В этом случае при $r \longrightarrow \infty$ имеет место $A_r \longrightarrow \theta$, $B_r/r^2 \longrightarrow 1$, $C_r \longrightarrow \theta$. Если не учитывать (1.4) (т.е. рассматривать соотношения (1.2) только при $r \geq 2$), то в двумерном пространстве возникающих последовательностей $d_{2r}$ или $d_{2r+1}$ некоторое одномерное подпространство содержит последовательности, стремящиеся к 0 (очень быстро: $r^2 d_{r+2}/d_r \longrightarrow -\theta$); остальные последовательности быстро растут ($(d_{r+2}/d_r)/r^2 \longrightarrow -\theta$). Нужные СЗ $\lambda_l$ выделяются совокупностью условий: (1.2) и

$$\lim_{r\to\infty} \frac{d_{r+2}}{d_r} = 0 \tag{1.5}$$

(здесь учтено, что никаких два последовательных члена ненулевой последовательности $d_r$, удовлетворяющей (1.2), не могут одновременно обратиться в 0).

Из (1.2) при $r \geq 2$ следует

$$\frac{d_r}{d_{r-2}} = \frac{-C_r}{B_r - \lambda + A_r\dfrac{d_{r+2}}{d_r}}, \tag{1.6}$$

что дает для ненулевых последовательностей, удовлетворяющих (1.2) при $r \geq 2$ и (1.5), при любом $\lambda$ представление $d_r/d_{r-2}$ в виде непрерывной дроби

$$\frac{d_r}{d_{r-2}} = \cfrac{-C_r}{B_r - \lambda - \cfrac{A_r C_{r+2}}{B_{r+2} - \lambda - \cfrac{A_{r+2}C_{r+4}}{B_{r+4} - \lambda - \ldots}}}; \tag{1.7}$$

если $d_{r-2} \neq 0$, то эта непрерывная дробь сходится.

**2.** Дадим метод вычисления СЗ $\lambda_l$, имеющего заранее заданный номер $l$, $l \geq m$. Этот метод основан на использовании осцилляционных свойств последовательностей $(-\operatorname{sign}\theta)^r d_{2r}$ и $(-\operatorname{sign}\theta)^r d_{2r+1}$, удовлетворяющих при $r \geq 2$ рекуррентной формуле (1.2) и условию (1.5). В разд. 2 и 3 разберем случай, когда $\theta < 0$ (и, следовательно, все $C_r$ при $r \geq 2$ и все $A_r$ отрицательны) и $l - m$ четное, а в разд. 4 сформулируем соответствующие результаты для других случаев.

*2.1.* Для исследования осцилляционных свойств последовательности $d_{2r}$ сделаем, аналогично тому как это делается для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, замену

$$\frac{d_{2r+2}}{d_{2r}} = \operatorname{tg} W_{2r}.$$

Равенство (1.6) при $r \geq 2$ дает

$$\operatorname{tg} W_{2r-2} = \frac{-C_{2r}}{B_{2r} - \lambda + A_{2r}\operatorname{tg} W_{2r}}. \tag{2.1}$$

Легко проверить, что равенство

$$\operatorname{tg} y = \frac{-C_{2r}}{B_{2r} - \lambda + A_{2r}\operatorname{tg} x} \tag{2.2}$$

удовлетворяется, если взять

$$y(x; A_{2r}, B_{2r} - \lambda, C_r) = \int\limits_{-\pi/2}^{x} \frac{A_{2r}C_{2r}d\xi}{[(B_{2r} - \lambda)\cos\xi + A_{2r}\sin\xi]^2 - C_{2r}\cos^2\xi} \tag{2.3}$$

(доказательство – вычисление по (2.3) значения $dy/dx$). Функция $y(x; A_{2r}, B_{2r} - \lambda, C_{2r})$ определена для всех $x$ (напомним, что $C_{2r} < 0$ при $r \geq 1$ и $A_{2r} < 0$), возрастает по $x$, $y(-\pi/2; A_{2r}, B_{2r} - \lambda, C_{2r}) = 0$, $y(\pi/2; A_{2r}, B_{2r} - \lambda, C_{2r}) = \pi$, $y(3\pi/2; A_{2r}, B_{2r} - \lambda, C_{2r}) = 2\pi$ и т.д., для остальных $x$ она возрастает по $\lambda$ (доказательство: при $-\pi/2 + n\pi < x < \pi/2 + n\pi$, где $n$ целое, имеет место $y = \pi/2 + n\pi + \operatorname{arctg}[(B_{2r} - \lambda + A_{2r}\operatorname{tg} x)/C_{2r}]$).

Мы берем для определения $W_{2r-2}$ при уже вычисленном $W_{2r}$ именно значение, даваемое формулой (2.3), и этим снимаем неоднозначность, возникающую при определении $W_{2r-2}$ формулой (2.1). Сразу же отметим, что формула (2.3) введена нами только для исследования свойств последовательности $d_{2r}$, в каких-либо практических вычислениях она использоваться не будет.

Нужные нам последовательности $d_{2r}$ выделяются, как уже говорилось, условием (1.5), т.е. условием $\lim\limits_{r \to \infty} \operatorname{tg} W_{2r} = 0$. При фиксированном $\lambda$ и больших $r$ имеет место (см. разд. 1) $A_{2r} \approx \theta$, $C_{2r} \approx \theta$, $B_{2r} \approx 4r^2$; поэтому при фиксированном $\lambda$ для больших $r$ из малости $W_{2r}$ следует малость $W_{2r-2}$. Так как одновременное прибавление ко всем $W_{2r}$ слагаемого, кратного $\pi$, не изменяет формул (2.1) и (2.3), то мы выделяем при фиксированном значении $\lambda$ нужную последовательность $W_{2r}$ условием

$$\lim_{r \to 0} W_{2r} = 0. \tag{2.4}$$

Из единственности с точностью до числового множителя ненулевой последовательности $d_{2r}$, удовлетворяющей условиям (1.2) при $r \geq 2$ и (1.5), вытекает, что последовательность $W_{2r}$, удовлетворяющая (2.4), существует и единственна.

Зафиксируем какой-либо диапазон изменения $\lambda$, $\alpha \leq \lambda \leq \beta$. Так как $B_{2r} \longrightarrow \infty$ при $r \longrightarrow \infty$, то для достаточно больших $r$ непрерывная дробь, фигурирующая в (1.7), сходится и дает на $[\alpha, \beta]$ функцию, которая непрерывна и, как легко проверить, монотонно возрастает. Поэтому на $[\alpha, \beta]$ функция $W_{2r}(\lambda)$ для достаточно большого $r$ непрерывна и монотонно возрастает. Пользуясь свойствами функции, определенной формулой (2.3), получаем, что функции $W_{2r}(\lambda)$ для всех $r$, $r = 0, 1, \ldots$, определены на $[\alpha, \beta]$, непрерывны и каждая из них монотонно возрастает.

Равенство (1.4) дает

$$A_0 d_2 + (B_0 - \lambda)d_0 = 0,$$

т.е.

$$\frac{d_2}{d_0} = \frac{B_0 - \lambda}{-A_0},$$

т.е.

$$\operatorname{tg} W_0 = \frac{B_0 - \lambda}{-A_0}.$$

Поэтому если составить функцию

$$\omega(\lambda) = W_0(\lambda) - \operatorname{arctg}\frac{B_0 - \lambda}{-A_0}, \tag{2.5}$$

то СЗ выделяются уравнениями

$$\omega(\lambda) = k\pi, \quad k \text{ целое}.$$

Из сказанного выше следует, что $\omega(\lambda)$ определена при $-\infty < \lambda < \infty$, непрерывна и монотонно возрастает. При $\lambda \longrightarrow -\infty$ непрерывная дробь (1.7) для $r = 2$ определена и, как легко видеть, дает $W_0(\lambda) \longrightarrow 0$, поэтому $\omega(\lambda) \longrightarrow -\pi/2$ при $\lambda \longrightarrow -\infty$. Таким образом (см. разд. 1), при возрастании $\lambda$ от $-\infty$ до $\infty$ функция $\omega(\lambda)$ монотонно меняется от $-\pi/2$ до $\infty$, проходя последовательно значения $k\pi$, $k = 0, 1, \ldots$, что дает $\lambda_l$, где $l = m + k$.

Зафиксируем значение $\lambda$, проследим изменение $W_{2r}$ при уменьшении значения $r$. Как уже говорилось, $W_{2r} \approx 0$ при больших $r$ и, следовательно (см. формулу (2.3)), $0 < W_{2r} < \pi/2$ для этих $r$. Из $0 < W_{2r+2} < \pi/2$ следует $0 < W_{2r} < \pi$. Пусть на каком-либо шаге впервые получили $\pi/2 \le W_{2r}$. Тогда $\pi/2 \le W_{2r} < 3\pi/2$ и следовательно для всех $r' < r$ имеет место $\pi/2 < W_{2r'}$. Пусть, далее, на каком-либо шаге впервые получили $3\pi/2 \le W_{2r_1}$. Тогда аналогично для всех $r' < r_1$ имеет место $3\pi/2 < W_{2r'}$. Придя к значению $r = 0$, получим $(k-1)\pi + \pi/2 \le W_0 < k\pi + \pi/2$, где $k$ – некоторое целое неотрицательное число. Упрощенно выражаясь, при уменьшении $r$ значение $W_{2r}$ при больших $r$ находится в диапазоне $[0, \pi/2)$, затем, возможно, переходит в диапазон $[\pi/2, 3\pi/2)$, затем, возможно, в диапазон $[3\pi/2, 5\pi/2)$, и т.д.

Легко видеть, что переход $W_{2r}$ в следующий диапазон соответствует изменению знака последовательности $d_{2r}$. В самом деле, такой переход соответствует изменению знака $\operatorname{tg} W_{2r}$, т.е. изменению знака $d_{2r+2}/d_{2r}$. Уточним: $W_{2r} = n\pi + \pi/2$, где $n$ – целое, дает $\operatorname{tg} W_{2r} = \infty$, что соответствует $d_{2r} = 0$; в этом случае из (1.2) получаем, что $d_{2r-2}$ и $d_{2r+2}$ имеют разные знаки.

Итогом приведенных рассуждений является

**Теорема.** *Пусть при взятом значении* $\lambda$ *ненулевая последовательность* $d_r$ *удовлетворяет при* $r \ge 2$ *рекуррентной формуле* (1.2) *и условию* (1.5). *Пусть эта последовательность имеет* $k$ *перемен знака. Тогда*

$$k > l - m \Rightarrow \lambda > \lambda_l,$$

$$k < l - m \Rightarrow \lambda < \lambda_l,$$

$$k = l \wedge \frac{d_2}{d_0} > \frac{B_0 - \lambda}{-A_0} \Rightarrow \lambda > \lambda_l,$$

$$k = l \wedge \frac{d_2}{d_0} < \frac{B_0 - \lambda}{-A_0} \Rightarrow \lambda < \lambda_l,$$

$$k = l \wedge \frac{d_2}{d_0} = \frac{B_0 - \lambda}{-A_0} \Rightarrow \lambda = \lambda_l$$

(*при* $d_0 = 0$ *причисляем это соотношение к перемене знака и считаем, что* $\frac{d_2}{d_0} < \frac{B_0 - \lambda}{-A_0}$, *или не причисляем его к перемене знака и считаем, что* $\frac{d_2}{d_0} > \frac{B_0 - \lambda}{-A_0}$, *в обоих случаях получим один и тот же результат для знака* $\lambda - \lambda_l$).

*2.2.* Остановимся на некоторых вопросах, связанных с практическим использованием результатов п. 2.1.

При $\theta = 0$ уравнение (1.1) дает (см. разд. 1) $\lambda_l = l(l+1)$. Сопоставляя уравнение (1.1) при $\theta < 0$ с уравнением вида (1.1), получающимся при $\theta = 0$, видим, что

$$l(l+1) < \lambda_l < l(l+1) - 4\theta.$$

В силу быстрой сходимости непрерывной дроби (1.7), которую мы используем для вычисления $d_2/d_0$, практически достаточно взять подходящую дробь не очень высокого порядка. Однако важно взять то последнее $2r_\infty$, на котором мы обрываем дробь, таким, чтобы при $r' > r_\infty$ имело место $B_{2r'} > \lambda + \theta^2 + 1$; это гарантирует положительность подходящих дробей, получающихся для $d_{2r'}/d_{2r'+2}$. Тогда в последовательности $d_{2r'}, d_{2r'+2}, \ldots$ нет перемен знака. Выбрав методом проб нужное $r_\infty$, вычислим подходящую дробь непрерывной дроби (1.7) (что соответствует вычислениям по формуле (1.6)) при $r = 2$, подсчитывая в процессе ее вычисления число перемен знака последовательности $d_0, d_2, \ldots$. Далее используем теорему п. 2.1.

Для определения границ $\lambda'$ и $\lambda''$ того интервала, в котором число перемен знака последовательности $d_0, d_2, \ldots$ имеет нужное значение $l - m$, достаточно, отправляясь от оценки, указанной в начале п. 2.2, пользоваться грубыми методами типа метода деления отрезка пополам. После этого целесообразно перейти к более точным методам, например к разностному аналогу метода Ньютона. В этом методе для решения уравнения $f(\lambda) = 0$ при получении следующего приближения $\lambda^{(n+1)}$ используются два предыдущих приближения по формуле

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} - \frac{f(\lambda^{(n)})}{[f(\lambda^{(n)}) - f(\lambda^{(n-1)})]/(\lambda^{(n)} - \lambda^{(n-1)})}.$$

Этот метод требует, как известно, менее чем в полтора раза больше итераций, нежели метод Ньютона. При вычислении малых величин $f(\lambda^{(n)}) - f(\lambda^{(n-1)})$ нужно всего 1–2 дополнительных знака. Если очередное приближение $\lambda^{(n+1)}$ выйдет из уже установленного предыдущими итерациями интервала, на котором $f(x)$ меняет знак, то следует взять в качестве очередного приближения не $\lambda^{(n+1)}$, а значение ближайшего к $\lambda^{(n+1)}$ конца упомянутого интервала.

**3.** Перейдем к приближенному вычислению $u_l(z)$, полагая, что соответствующее СЗ $\lambda_l$ уже вычислено достаточно точно.

*3.1.* Прежде всего рассмотрим задачу вычисления последовательности $d_0, d_2, \ldots$. Значение $d_0$ определяется требованием нормировки $u_l(z)$. Тогда $d_2$ однозначно определяется формулой (1.4), а $d_4, d_6, \ldots$ – формулой (1.2) при $r \geq 2$. Однако такой путь вычисления нецелесообразен. Дело в том, что малые погрешности, допущенные, например, из-за неточности вычисления $\lambda$ или неточности реализации арифметических операций, будут быстро нарастать из-за наличия быстро растущих последовательностей, удовлетворяющих (1.2). Мы изберем другой путь: выделим последовательности, удовлетворяющие (1.2) при $r \geq 2$ и (1.5). При этом соотношение (1.4) при $r = 0$ будет удовлетворяться с нужной точностью вследствие того, что $\lambda_l$ вычислено с нужной точностью. Исходя из значения $d_0$, будем вычислять $d_2, d_4, \ldots$ не по формуле (1.2), а по формулам, выделяющим последовательности, удовлетворяющие также (1.5).

Возьмем достаточно большое $r_\infty$ и положим $d_{2r_\infty} = 0$ (ср. с п. 2.2). Пользуясь формулой (1.6), вычисляем величины $q_r = d_{2r}/d_{2r-2}$ для $r = r_\infty - 1, r_\infty - 2, \ldots, 2, 1$. Мы получим соотношения

$$A_0 d_2 + (B_0 - \lambda_l) d_0 = 0,$$

$$d_2 - q_1 d_0 = 0.$$

То, что эти два уравнения относительно $d_2$ и $d_0$ с достаточной точностью пропорциональны, – следствие того, что $\lambda_l$ вычислено с достаточной точностью.

Мы использовали известную нормировку $u_l(0) = P_l^m(0)$, $l - m$ четное, $u_l'(0) = (P_l^m(z))'|_{z=0}$, $l - m$ нечетное (см. [2, пп. 21.7.13–21.7.16]). В терминах $d_{2r}$ она эквивалентна линейному соотношению, в котором участвуют все коэффициенты $d_{2r}$, $r = 0, 1, \ldots$. Временно полагаем $d_0 = 1$. Затем вычисляем $d_2, d_4, \ldots$, пользуясь формулой

$$d_{2r} = q_r d_{2r-2}.$$

Этот процесс для больших $r$ численно устойчив, так как $q_r \approx -\theta/r^2$ (см. формулу (1.6)); это, кстати, является причиной и численной устойчивости вычислений по формуле (1.6).

Возможна ситуация, когда при некотором $r'$ имеет место $d_{2r'-2} = 0$, что дает $q_{r'} = \infty$ (этому соответствует и неприятность в вычислении непрерывной дроби (1.7)). Эта неприятность может быть ликвидирована использованием более громоздкого метода переноса условия (1.5) из бесконечности (см. [7]), здесь мы не будем на этом останавливаться.

После перенормировки получаем окончательные значения $d_{2r}$.

*3.2.* После того как $\lambda_l$ и все нужные $d_{2r}$ вычислены, вычисление суммы

$$\sum_{r=0}^{r_\infty} d_{2r} P_{m+2r}^m(z) \tag{3.1}$$

при взятом (т.е. фиксированном) $z$ проводится использованием известной рекуррентной формулы для $P_n^m(z)$:

$$(n-m+1)P_{n+1}^m(z) = (2n+1)zP_n^m(z) - (n+m)P_{n-1}^m(z).$$

Предельное при $n \longrightarrow \infty$ характеристическое уравнение этой рекуррентной формулы имеет вид

$$\rho^2 - 2z\rho + 1 = 0;$$

корни его $\rho = z \pm i\sqrt{1-z^2}$, $|\rho| = 1$ при $-1 < z < 1$; нарастания погрешностей в вычислении $P_n^m(z)$ не ожидается; напомним дополнительно, что $d_{2r}$ быстро убывают с ростом $r$. Счет начинается с $P_m^m(z) = (1-z^2)^{m/2}(2m)!/(2^m m!)$ и $P_{m+1}^m(z) = (1-z^2)^{m/2}z(2m+2)!/[2^{m+1}(m+1)!]$.

**4.** В случае, когда $l-m$ четное $\wedge\theta > 0$, вместо осцилляционных свойств последовательности $d_0$, $d_2$, $d_4$, $d_6$, … рассматриваются такие свойства последовательности $d_0$, $-d_2$, $d_4$, $-d_6$ …; соответствующие изменения формулировок разд. 2 и 3 очевидны.

В случае $l-m$ нечетного (для $\theta$ произвольного знака) соответствующие формулировки получаются заменой индекса $2r$ на $2r+1$.

**5.** При программной реализации описанных методов потребовалось решить следующие задачи.

1. Выбор $r_\infty$ (см. п. 3.1) осуществлялся из тех соображений, чтобы коэффициенты (1.3) трехчленных соотношений (1.2) были близки к своему предельному поведению. Конкретно, $r_\infty$ бралось в несколько раз больше, чем $\max(n, \sqrt{\theta})$.

2. Потеря значащих цифр при суммировании ряда (3.1) предотвращалась путем одновременного суммирования его абсолютных значений с добавлением количества знаков мантиссы, равного разности порядков второй и первой сумм. То же самое делалось для рядов, возникающих при выбранной нормировке функций.

3. Предел суммирования ряда (3.1) определялся адаптивно из требования, чтобы добавление новых членов ряда не приводило к изменению его суммы (как это обычно делается при численном суммировании в арифметике с произвольной разрядностью).

Полученные в результате программы позволяют вычислять значения вытянутых и сплюснутых угловых волновых сфероидальных функций для значений аргумента в области определения (см. (1.1)) и в широком диапазоне значений параметров. Расчеты проводились для $\theta$ – до порядков $10^4$, для $m$, $l$ – до сотен, количество верных знаков результата – до 100. Прямое сравнение/проверка точности вычисления затруднены ввиду отсутствия современных таблиц и нереализованности вычисления волновых сфероидальных функций в известных математических пакетах. Таблицы, приведенные в [2], воспроизводились с их точностью (кроме случаев имеющихся там ошибочных данных). В качестве основного метода проверки использовалось вычисление одного и того же значения с различной разрядностью арифметических операций. Также проверялся факт, что волновая функция при $\theta \longrightarrow 0$ и прочих фиксированных аргументах при выбранной нормировке непрерывно переходит в соответствующую присоединенную функцию Лежандра.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1–3. М.: Наука, 1967.
2. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.
3. *Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю.* Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976.
4. *Абрамов А.А., Дышко А.Л., Конюхова Н.Б. и др.* Вычисление вытянутых сфероидальных функций решением соответствующих дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 1. С. 3–18.
5. *Levitina T., Brändas E.* Computational techniques for prolate spheroidal wave functions in signal processing // J. Comput. Meth. Sci. and Eng. 2001. V. 1. № 2s-3s. P. 287–313.
6. *Скороходов С.Л.* Квазиавтомодельность собственных значений сфероидальных волновых функций // Spectral and Evolution Problems. Proc. XV Crimean Math. School (KROMSH-2004). Simferopol, 2005, Crimea, Ukraine.
7. *Абрамов А.А.* Выделение медленно растущих последовательностей, члены которых удовлетворяют заданным рекуррентным соотношениям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 4. С. 661–668.