А. А. Абрамов, С. В. Курочкин, Вычисление решений уравнения Матье и связанных с ними величин, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2007, том 47, номер 3, 414–423

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2007, том 47, № 3, с. 414–423

УДК 519.624.2+517.589

ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ВЕЛИЧИН[1)]

© 2007 г. А. А. Абрамов, С. В. Курочкин
(119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)
e-mail: alalabr@ccas.ru; kuroch@ccas.ru
Поступила в редакцию 03.10.2006 г.

Для уравнения Матье рассматриваются следующие вопросы: нахождение собственных значений с нужным номером (с использованием осцилляционных теорем для возникающих разностных уравнений); устойчивость решений разностных уравнений; корректное определение и вычисление собственных значений и функций Матье с нецелым номером; корректное определение и вычисление характеристического показателя Матье; вычисление значений решений уравнения Матье для больших значений аргумента. Для численного решения указанных проблем предложены вычислительные алгоритмы. Библ. 14. Фиг. 5. Табл. 1.

Ключевые слова: функции Матье, осцилляционные теоремы, рекуррентные формулы, численная устойчивость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Матье

$$y'' + (p - 2q\cos 2t)y = 0, \tag{1.1}$$

где $-\infty < t < \infty$, p, q – вещественные числа, играет важную роль во многих разделах математической физики и в течение долгого времени является объектом систематического исследования. Основные факты, касающиеся уравнения (1.1), представлены в классических руководствах [1], [2]. Современные работы сосредоточиваются на конкретных вопросах: получение асимптотических представлений для собственных значений (СЗ) при малых и больших значениях q (см. [3], [4]), аппроксимация, нормировка и автомодельное поведение для СЗ (см. [5]), а также на различных вычислительных аспектах (см. [6]–[8]), включая вычисление СЗ в случае невещественного q (см. [9]). В данной работе рассматривается ряд вопросов как аналитического, так и вычислительного характера, до настоящего времени остававшихся не полностью исследованными.

Содержание статьи следующее. В разд. 2 дается корректное определение СЗ и функций Матье с произвольным (неотрицательным) вещественным номером. Предложен метод вычисления СЗ и собственных функций (СФ) с заданным номером. Отыскание хорошего приближения к СЗ для последующего применения методов типа Ньютона является трудной самостоятельной задачей (это отмечено, в частности, в [5]). Предложенный в настоящей статье метод не требует предварительного поиска приближенного значения. Метод основан на одной осцилляционной теореме для возникающих разностных уравнений, которая, как и соответствующая возможность непосредственного нахождения СЗ и СФ, является новой уже для случая классической периодической задачи Матье. В разд. 3 исследуется аналитическая зависимость характеристического показателя задачи (1.1) от параметра p, в результате чего получается другая (эквивалентная предыдущему определению) характеризация СЗ с произвольным вещественным номером, а также метод его вычисления. Далее, проведенный анализ приводит к корректному определению характеристического показателя Матье, основанному на конструкции аналитического продолжения. При этом устраняется (якобы имеющаяся) его неоднозначность с точностью до слагаемого вида $2k$, где k – произвольное целое. В этом вопросе в литературе распространены ошибочные представления, которые также воспроизводятся в некоторых известных современных математических пакетах. В разд. 4 предложен метод устойчивого вычисления значений решения уравнения (1.1) для больших значений аргумента t. В разд. 5 кратко описана численная реализация предложенных методов и приведены примеры расчетов.

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00257).

2. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ФУНКЦИИ МАТЬЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ (НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМ) ВЕЩЕСТВЕННЫМ НОМЕРОМ

В классической постановке задачи на СЗ для уравнения (1.1), где p – спектральный параметр, ставятся условия периодичности или антипериодичности на промежутке $[0, \pi]$. Соответствующие СЗ образуют возрастающие последовательности a_n, $n = 0, 1, \ldots$, b_n, $n = 1, 2, \ldots$, соответственно, для четных и нечетных решений уравнения (1.1). Получающиеся при этом СФ – четные ce_{2m} (периода π), ce_{2m+1} (периода 2π) и нечетные se_{2m} (периода π), se_{2m+1} (периода 2π) – имеют по m нулей на интервале $(0, \pi/2)$. Обобщение этих понятий на нецелые рациональные номера СЗ (см. [1]) достигается с использованием кратных периодов, при этом СЗ оказываются двукратными ($a_\mu = b_\mu$ при $\mu \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$; далее для таких СЗ будем использовать обозначение p_μ). Для обобщения на случай произвольных (иррациональных) μ далее предложена конструкция, существенно уточняющая известное определение, основанное на теореме Флоке (см., например, [10]).

Этот вопрос может быть поставлен также следующим образом. При $q = 0$, $0 < p = \mu^2$ функции $y_1(t) = \cos\mu t$ и $y_2(t) = (\sin\mu t)/\mu$ являются решениями уравнения Матье. Как продолжить эти решения на значения $q \neq 0$? Отметим, что при целом положительном μ в качестве таких функций возникают функции Матье $ce_\mu(t)$ и $se_\mu(t)$. Важно, что в этой задаче при $q \neq 0$ число p уже не является заданным, здесь возникает задача на СЗ.

В данном разделе с целью технических упрощений сделаем в (1.1) замену $q \longrightarrow -q$, что приводит к следующей форме уравнения Матье:

$$y'' + (p + 2q\cos 2t)y = 0. \tag{2.1}$$

Достаточно рассмотреть случай $q \geq 0$. Случай $q < 0$ приводится к рассматриваемому заменой $t \longrightarrow t + \pi/2$.

Пусть $0 \leq p = \mu^2$ и $q = 0$ в (2.1). Уравнение (2.1) имеет решение вида

$$y(t) = e^{i\mu t}. \tag{2.2}$$

При фиксированном μ продолжением по q, $q \neq 0$, решения вида (2.2) естественно считать функцию, полученную следующим образом (см., например, [11]). Надо найти такое $p = p(\mu)$, при котором уравнение (2.1) имеет решение Флоке вида $F(t) = e^{i\mu t}P(t)$, где $P(t)$ является π-периодичной, $P(t) \not\equiv 0$.

Исследуем полученную задачу. Представив $P(t) = \Sigma_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i2kt}$, получим

$$(\mu + 2k)^2 c_k - q(c_{k-1} + c_{k+1}) = pc_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{2.3}$$

Из (2.3) видно, что временно можно положить $0 \leq \mu < 2$, так как изменение μ на четное целое число может быть компенсировано сдвигом в последовательности индексов и не меняет свойств возникшей задачи. Однако (ср. [10]) имеется единственный естественный выбор этого слагаемого. Далее однозначность будет восстановлена.

Задача (2.3) – спектральная задача в гильбертовом пространстве двусторонних последовательностей $\{c_k\}$ таких, что $\Sigma_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2 < \infty$, со скалярным произведением $(\{c_k\}, \{d_k\}) = \Sigma_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \bar{d}_k$. Исследуем некоторые ее свойства. Возьмем какое-либо вещественное Q большее, чем $2q$. Приведем (2.3) к виду

$$((\mu + 2k)^2 + Q)c_k - q(c_{k-1} + c_{k+1}) = \lambda c_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \lambda = p + Q. \tag{2.4}$$

Оператор в левой части имеет вид $L + S$, где L эрмитов и положительно определен, L^{-1} вполне непрерывен, $|L^{-1}| \leq 1/Q$, S эрмитов, $|S| = 2q$. Тогда $(L + S)^{-1} = L^{-1/2}(I + L^{-1/2}SL^{-1/2})^{-1}L^{-1/2}$, $|L^{1/2}SL^{-1/2}| \leq \leq \frac{1}{\sqrt{Q}}2q\frac{1}{\sqrt{Q}} < 1$. Поэтому $(I + L^{-1/2}SL^{-1/2})^{-1}$ существует и ограничен. Следовательно, $(L + S)^{-1}$ существует и вполне непрерывен, а спектр $L + S$ дискретен и собственные элементы оператора $L + S$ образуют базис. Так как все нужные p суть СЗ эрмитова оператора, то они вещественны; следовательно, можно ограничиться вещественными $\{c_k\}$ (если $\{c_k\}$ – решение уравнения (2.3), то $\{c_k + \bar{c}_k\}$ и $i\{c_k - \bar{c}_k\}$ – решение уравнения (2.3)). Далее все величины считаются вещественными.

Из (2.3) имеем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\mu+2k)^2c_k^2+\sum_{k=-\infty}^{\infty}q(c_{k+1}-c_k)^2=(p+2q)\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k^2.$$

Для самого левого СЗ задачи (2.3) (обозначим его через p_1) получаем

$$p_1=-2q+\min\left\{\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\mu+2k)^2c_k^2+\sum_{k=-\infty}^{\infty}(c_{k+1}-c_k)^2\right]\Big/\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k^2\right\}.$$

Отсюда сразу следует, что $p_1\ge -2q$. Так как $(c_{k+1}-c_k)^2\ge(|c_{k+1}|-|c_k|)^2$, то нужные для минимума величины c_k все либо неотрицательны, либо неположительны. Подряд двух c_k и c_{k+1}, равных нулю, быть не может, так как формула (2.3) трехчленная и все c_k стали бы нулями. Ситуации $c_k=0$, $c_{k+1}c_{k-1}>0$ также быть не может (см. (2.3)). Поэтому для p_1 все c_k отличны от нуля и одного знака (без ограничения будем считать их положительными). Отсюда следует некратность p_1 (далее мы увидим, что каждое СЗ задачи (2.3) некратное).

Достаточно полное исследование нужных нам свойств задачи (2.3) может быть проведено теми же методами, которыми исследовалась аналогичная задача в [12]. Поэтому мы ограничимся формулировками нужных нам выводов и фиксацией возникающих численных алгоритмов.

Каждое СЗ задачи (2.3) некратное. Через p_m обозначим m-е (при перечислении слева направо) СЗ задачи (2.3). Тогда соответствующая p_m последовательность c_k имеет $m-1$ перемен знака (т.е. ровно в $m-1$ местах имеет место $c_kc_{k-1}<0$ или $c_k=0$, $c_{k-1}c_{k+1}<0$), ситуация $c_k=0$, $c_{k-1}c_{k+1}>0$ невозможна. Из (2.3) получаем

$$\frac{c_k}{c_{k-1}}=\frac{1}{M_k-\dfrac{c_{k+1}}{c_k}},\tag{2.5}$$

где $M_k=[(\mu+2k)^2-p]/q$. Пусть $\alpha\le p\le\beta$. Возьмем такое k_f, что $[(\mu+2k)^2-\beta]/q\ge 2$ при $k\ge k_f$. Тогда при $\alpha\le p\le\beta\wedge k\ge k_f$ непрерывная дробь

$$\cfrac{1}{M_k-\cfrac{1}{M_{k+1}-\cfrac{1}{M_{k+2}-\dots}}}$$

сходится, ее значение – непрерывная положительная неубывающая функция p, обозначим ее через $\varphi(p)$; $c_k/c_{k-1}=\varphi(p)$ при $k=k_f$. Аналогично получаем $c_{k-1}/c_k=\psi(p)$ при $k=-k_f-1$, $\psi(p)$ – непрерывная положительная неубывающая функция. Поэтому задачу (2.3) можно решать не при $k=0,\pm1,\pm2,\dots$, а при $-k_f\le k\le k_f-1$, используя “граничные условия”

$$c_{k_f}/c_{k_f-1}=\varphi(p),\quad c_{-k_f-1}/c_{-k_f}=\psi(p).\tag{2.6}$$

Используя приведенные утверждения, получаем следующий алгоритм решения задачи (2.3). В соответствии с пояснениями к формуле (2.3) берем $0\le\mu<2$. Фиксируем m. Пусть из каких-то соображений мы знаем оценку $\alpha\le p_m\le\beta$. Для этого β определяем k_f. Берем какое-либо p из указанного диапазона. Вычисляем (приблизительно, оборвав ценные дроби) значения $\varphi(p)$ и $\psi(p)$. Вычисляем по (2.5) значения c_{k+1}/c_k до k_0, близкого к нулю. Аналогично слева направо вычисляем c_k/c_{k+1}. Значение k_0 берем таким, чтобы $(c_{k_0+1}/c_{k_0})_r$ – значение, вычисленное при счете справа налево, и $(c_{k_0}/c_{k_0+1})_l$ – значение, вычисленное при счете слева направо, были бы положительными. Тогда верно следующее:

– суммарное (от $-k_f-1$ до k_f) число перемен знака в $\{c_k\}$ больше $m-1\Rightarrow p>p_m$;

– суммарное число перемен знака в $\{c_k\}$ меньше $m-1\Rightarrow p<p_m$;

– суммарное число перемен знака равно $m-1$ и $(c_{k_0+1}/c_{k_0})_r(c_{k_0}/c_{k_0+1})_l>1\Rightarrow p>p_m$;

– суммарное число перемен знака равно $m-1$ и $(c_{k_0+1}/c_{k_0})_r(c_{k_0}/c_{k_0+1})_l<1\Rightarrow p<p_m$;

– суммарное число перемен знака равно $m-1$ и $(c_{k_0+1}/c_{k_0})_r(c_{k_0}/c_{k_0+1})_l=1\Rightarrow p=p_m$.

В качестве алгоритма вычисления нужного значения p_m можно взять алгоритм, предложенный в [12].

Вычислив достаточно точно p_m, переходим к вычислению нужной последовательности $\{c_k\}$. Для этого, используя "граничные условия" (2.6), вычисляем отношения c_k/c_{k+1}, идя от $-k_f - 1$ слева направо, и отношения c_{k+1}/c_k, идя от k_f справа налево. Так как с достаточной точностью имеет место равенство

$$\left(\frac{c_{k_0+1}}{c_{k_0}}\right)_r = \left(\frac{c_{k_0+1}}{c_{k_0}}\right)_l,$$

то фиксируем какое-либо ненулевое значение c_{k_0} и, используя найденное отношение соседних членов, последовательно вычисляем c_{k_0+1}, c_{k_0+2}, …, c_{k_0-1}, c_{k_0-2}, … (о нормировке нужных решений исходного уравнения (2.1) сказано ниже). Возможное осложнение в вычислениях – обращение какого-либо из c_k в 0 и тем самым невозможность использовать c_{k+1}/c_k (или c_{k-1}/c_k). Простой способ преодоления этого осложнения – использование формулы (2.5) не для получения частного c_k/c_{k-1}, а для получения "проективного отношения" $c_k : c_{k-1}$, т.е. введение на каждом таком шаге какой-либо пары чисел, отношение которых равно $c_k : c_{k-1}$; если $c_k \approx 0$, то отношение $c_{k+1} : c_{k-1}$ определяется использованием (2.3).

Характеристическое уравнение на k-м шаге для (2.3) имеет вид

$$\omega^2 + \frac{p - (\mu + 2k)^2}{q}\omega + 1 = 0.$$

Корни его при больших k^2 – величины порядка $q/(4k^2)$ и $4k^2/q$, один корень очень маленький и один очень большой. Нужные нам последовательности быстро убывают в каждом из двух направлений: $\lim\limits_{k\to\infty} k^2 c_{k+1}/c_k = \lim\limits_{k\to-\infty} k^2 c_{k-1}/c_k = q/4$; ряд для $P(t)$ быстро сходится. Вследствие наличия большого корня, вычислив c_{k_0} и c_{k_0+1}, нецелесообразно вычислять c_{k_0+2}, c_{k_0+3}, …, используя формулу (2.3) (аналогично при счете налево); при таком вычислении влияние даже малых погрешностей в исходных данных (например, малая погрешность в p_m) и погрешностей арифметических операций катастрофически нарастает. Возможно, зафиксировав c_{k_0}, решать две возникшие "краевые задачи" (рекуррентная формула (2.3), значение c_{k_0}, одно из условий (2.6)), используя метод, предложенный в [13].

Как указано в пояснении к формуле (2.3), изменение μ на четное число не меняет спектр задачи. Но такое изменение меняет номер m нужного p_m (см. выше). Приведем окончательный рецепт получения тех решений задачи, которые являются продолжением функций $\cos\mu t$ и $(\sin\mu t)/\mu$, возникших при $q = 0$. Далее все формулируем для $q > 0$, $\mu \ge 0$.

Тот номер m, который нужен для продолжения $\cos\mu t$ (обозначим его через $m_{\cos}$), и тот номер m, который нужен для продолжения $(\sin\mu t)/\mu$ (обозначим его через $m_{\sin}$), вычисляются по следующим формулам:

– для μ нецелого $m_{\cos}(\mu) = m_{\sin}(\mu) = \mathrm{entier}(\mu) + 1$,

– для μ целого $m_{\cos}(\mu) = \mu + 1$ при $\mu \ge 0$, $m_{\sin}(\mu) = \mu$ при $\mu \ge 1$.

Для нецелого μ берем указанное выше m, находим соответствующее p_m. Вычислив $P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2kt}$, получим $y(t) = e^{i\mu t}P(t)$. Берем $[y(t) + y(-t)]/[2y(0)]$ в качестве продолжения $\cos\mu t$ и $[y(t) - y(-t)]/[2y'(0)]$ в качестве продолжения $(\sin\mu t)/\mu$. Если μ – рациональное число, $\mu = 2k/l$, где k, l – целые, то так полученные функции являются $l\pi$-периодическими.

Для целого четного μ, беря $m_{\cos}(\mu)$ и вычисляя p_m, получаем четное π-периодическое решение, а беря $m_{\sin}(\mu)$ и вычисляя p_m, получаем нечетное π-периодическое решение. Это функции $ce_\mu(t)$ и $se_\mu(t)$.

Для целого нечетного μ получаем, соответственно, 2π-периодические решения $ce_\mu(t)$ и $se_\mu(t)$, не являющиеся π-периодическими.

3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ МАТЬЕ

Характеристический показатель (ХП) Матье определяется из соотношения

$$F_\mu(t) = e^{i\mu t}P(t), \tag{3.1}$$

где F_μ – решение Флоке уравнения (1.1), $P(t)$ есть π-периодическая функция (см. [1], [2]). Соотношение (3.1) не определяет μ однозначным образом. Проведенный далее анализ позволяет уточнить этот вопрос.

Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (1.1), определяемая начальными условиями

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \tag{3.2}$$

$$y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1. \tag{3.3}$$

При этом, в силу четности коэффициентов уравнения (1.1), $y_1(t)$ – четная функция, $y_2(t)$ – нечетная функция. Введем величину

$$S(p) = y_1(\pi) + y_2'(\pi)$$

(описанная далее процедура применима к любому уравнению с периодическим потенциалом и не использует того факта, что для уравнения Матье слагаемые в правой части равны).

Далее значение параметра q предполагается зафиксированным. Тогда (см., например, [14], гл. I, § 4]) верно следующее:

1) p является СЗ периодической задачи (в обозначениях [1], a_n и b_n с четным n) $\Leftrightarrow S(p) = 2$;

2) p является СЗ антипериодической задачи (a_n и b_n с нечетным n) $\Leftrightarrow S(p) = -2$.

Далее, из асимптотик для решений (1.1) следует, что при $p \longrightarrow -\infty$ имеет место $S(p) \sim 2\cosh(\pi\sqrt{|p|}) \longrightarrow +\infty$ и при $p \longrightarrow +\infty$ значение $S(p)$ колеблется от 2 к –2 и обратно.

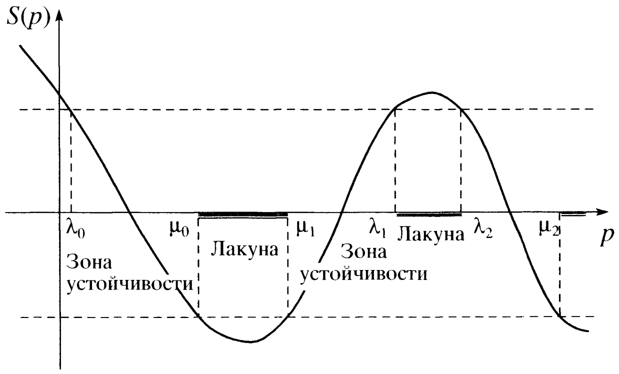
Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ – корни уравнения $S(p) = 2$, $\mu_0, \mu_1, \ldots$ – корни уравнения $S(p) = -2$. В вырожденных случаях эти уравнения могут иметь кратные корни (т.е. $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ или $\mu_k = \mu_{k+1}$), однако (см. [1]) для уравнения Матье так будет лишь в тривиальном случае $q = 0$. Промежутки $[\mu_0, \mu_1]$, (λ_1, λ_2), $[\mu_2, \mu_3]$, (λ_3, λ_4) называются лакунами. График функции $S(p)$ для уравнения (1.1) при $q \neq 0$ схематично изображен на фиг. 1. Из свойств симметрии коэффициентов уравнения (1.1) и осцилляционных теорем Штурма вытекает следующее:

1) $a_0 = \lambda_0$;

2) при $q > 0$ имеет место $b_1 = \mu_0$, $a_1 = \mu_1$, $b_2 = \lambda_1$, $a_2 = \lambda_2, \ldots$;

3) при $q < 0$ имеет место $a_1 = \mu_0$, $b_1 = \mu_1$, $b_2 = \lambda_1$, $a_2 = \lambda_2, \ldots$;

4) при $q = 0$ имеет место $\mu_0 = \mu_1 = a_1 = b_1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = a_2 = b_2, \ldots$.



Фиг. 1.

Далее, из периодичности коэффициентов уравнения (1.1) следует, что для любого его решения $y(t)$ имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix} y(\pi) \\ y'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

СЗ матрицы, стоящей в правой части, равны

$$\kappa_{\pm} = \left[S(p) \mp \sqrt{S^2(p) - 4}\right]/2.$$

Для $p \in (-\infty, \lambda_0)$ и в лакунах $\kappa_{\pm}$ вещественны, $|\kappa_+| < 1$, $|\kappa_-| > 1$ (области неустойчивости). Для p вне лакун $|\kappa_{\pm}| = 1$ и комплексно сопряжены (области устойчивости). В [14, гл. II, § 6] указано, что $\kappa_{\pm}$ при различных p являются аналитическими продолжениями друг друга. Рассмотрим более подробно аналитическую зависимость $S(p)$ и $\kappa_{\pm}$ от p. Пусть p проходит вещественную ось в положительном направлении, обходя СЗ a_k и b_k (точки ветвления $\kappa_{\pm}$) сверху. Учтем, что на промежутках $[\lambda_0, \mu_0]$, $[\lambda_2, \mu_2]$, … будет $S'(p) < 0$, а на промежутках $[\mu_1, \lambda_1]$, $[\mu_3, \lambda_3]$, … будет $S'(p) > 0$.

Тогда $S(p)$ будет двигаться по "гантеле" от -2 к 2, обходя эти точки по часовой стрелке. Движение κ_+ будет следующим (см. фиг. 2): из нуля $\kappa = +0$ $(p = -\infty)$ вправо до $\kappa = 1$ $(p = \lambda_0)$, затем по окружности $|\kappa| = 1$ против часовой стрелки до $\kappa = -1$ $(p = \mu_0)$, затем (в лакуне $[\mu_0, \mu_1]$) по вещественной оси вправо (не доходя до $\kappa = 0$) и обратно до $\kappa = -1$ $(p = \mu_1)$, затем по окружности против часовой стрелки до $\kappa = 1$ $(p = \lambda_1)$, и т.д.

Проведенный анализ позволяет дать еще одно определение СЗ с произвольным вещественным номером: при произвольном $r \in \mathbb{R}^+$ значение p_r однозначно определяется следующими условиями:

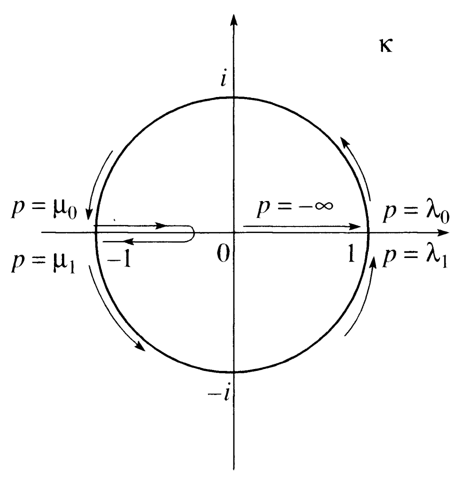
1)

$$\kappa_+(p_r) = e^{i\pi r}; \tag{3.5}$$

2) число полных оборотов, которое сделало $\kappa_+(p)$ при изменении p от $-\infty$ до p_r равно целой части от $r/2$.

Замечание. Для иррациональных r обозначения a_r, b_r вместо p_r, по-видимому, были бы неудачными, так как соответствующие решения уравнения Матье не могут быть охарактеризованы как собственные функции периодической краевой задачи на кратном промежутке.

Описанная конструкция позволяет однозначно и корректно определить вещественную часть ХП Матье, а именно избежать неопределенного слагаемого вида $2k$, где k целое. Для этого нужно сформулированные выше условия 1), 2) использовать в обратную сторону – от p к r: нужно взять аналитическое продолжение логарифма вдоль пути $(-\infty, p]$. В частности, в лакунах веще-



Фиг. 2.

ственная часть ХП равна удвоенному числу оборотов, которые к этому моменту сделало $\kappa_+(p)$. Второй ХП определяется как комплексно-сопряженный к первому.

По обсуждаемому вопросу в [1, 20.3.5] и в [2, 16.2] утверждается, что ХП определяется в принципе неоднозначно. В некоторых других текстах ошибочно утверждается, что ХП однозначно определяется уже из известного соотношения $\cos\pi\mu = y_1(\pi) = y_2'(\pi)$. В программных реализациях встречаются также различные произвольные выборы вещественной части и знака мнимой части с самопроизвольными скачками. Определенный же описанным выше образом ХП Матье, помимо определяющего соотношения (3.2), удовлетворяет всем естественным требованиям непрерывности.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ АРГУМЕНТА

Пусть имеется какой-либо способ вычисления решений уравнения Матье в форме (2.1) с условиями (3.1) и (3.2) и их производных при $0 < t \le \pi/2$. Пусть $|t|$ велико; как устойчиво вычислить $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_1'(t)$, $y_2'(t)$ для такого t? Прежде всего отметим, что выбранный при $0 < t \le \pi/2$ способ вычисления этих функций дает возможность легко вычислить их при $\pi/2 < t \le \pi$. Действительно, рассмотрим также уравнение в форме (1.1):

$$\tilde{y}'' + (p - 2q\cos 2t)\tilde{y} = 0 \tag{4.1}$$

и два его решения: $\tilde{y}_1(t)$ и $\tilde{y}_2(t)$, где

$$\tilde{y}_1(0) = 1, \quad \tilde{y}_1'(0) = 0, \tag{4.2}$$

$$\tilde{y}_2(0) = 0, \quad \tilde{y}_2'(0) = 1. \tag{4.3}$$

Очевидно, что $\tilde{y}_1(t - \pi/2)$ и $\tilde{y}_2(t - \pi/2)$ – решения уравнения (1.1) и так как $\tilde{y}_1\tilde{y}_2'(t) - \tilde{y}_2\tilde{y}_1' \equiv 1$, то

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \tilde{y}_2'\left(\frac{\pi}{2}\right)\tilde{y}_1\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \tilde{y}_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)\tilde{y}_2\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \\ y_2(t) &= \tilde{y}_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\tilde{y}_1\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \tilde{y}_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\tilde{y}_2\left(t - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Поэтому, используя упомянутый выше способ решения уравнения (2.1) при $0 < t \le \pi/2$ и применяя его к уравнению (4.1), получаем распространение этого способа на диапазон $(0, \pi]$.

Рассмотрим задачу вычисления $y_1(t + k\pi)$ и $y_2(t + k\pi)$, где k целое, возможно большое. Эти две функции также являются решениями уравнения (2.1). Поэтому имеем

$$\begin{aligned} y_1(t + k\pi) &= c_{11}y_1(t) + c_{12}y_2(t), \\ y_2(t + k\pi) &= c_{21}y_1(t) + c_{22}y_2(t), \end{aligned} \tag{4.5}$$

где константы c_{rs} зависят от k, их несложно вычислить. Далее мы используем факт существования для уравнения (2.1) решения Флоке

$$F(t) = e^{i\mu t}P(t), \tag{4.6}$$

где $P(t)$ есть π-периодическая функция, $P(t) \not\equiv 0$; μ – характеристический показатель. В окончательный алгоритм функция $P(t)$ не входит, используется только формула для определения μ:

$$\cos\mu\pi = y_1(\pi) = y_2'(\pi) = 1 + 2y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right); \tag{4.7}$$

пользуясь упомянутым выше способом вычисления $y_1(t)$, $y_1'(t)$, $y_2(t)$, $y_2'(t)$ в диапазоне $(0, \pi]$, вычисляем какое-либо (возможно, невещественное) значение μ.

Выводя формулы для c_{rs}, временно предположим, что $F(0) \ne 0$ и $F'(0) \ne 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{F(t)+F(-t)}{2F(0)}, \\ y_2(t) &= \frac{F(t)-F(-t)}{2F'(0)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Отсюда, учитывая (4.6), получаем

$$\begin{aligned} y_1(t+k\pi) &= \frac{e^{i\mu k\pi}F(t)+e^{-i\mu k\pi}F(-t)}{2F(0)}, \\ y_2(t+k\pi) &= \frac{e^{i\mu k\pi}F(t)-e^{-i\mu k\pi}F(-t)}{2F'(0)}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Исключив из (4.8), (4.9) величины $F(t)$ и $F(-t)$, получим

$$y_1(t+k\pi) = (\cos k\pi\mu)y_1(t) + i\frac{F'(0)}{F(0)}(\sin k\pi\mu)y_2(t), \tag{4.10}$$

$$y_2(t+k\pi) = i\frac{F(0)}{F'(0)}(\sin k\pi\mu)y_1(t) + (\cos k\pi\mu)y_2(t). \tag{4.11}$$

Из (4.10) имеем

$$y'_1(t+k\pi) = (\cos k\pi\mu)y'_1(t) + i\frac{F'(0)}{F(0)}(\sin k\pi\mu)y'_2(t). \tag{4.12}$$

Положив $t = 0$, $k = 1$ в (4.11), (4.12), получим

$$y_2(\pi) = i\frac{F(0)}{F'(0)}\sin\pi\mu, \quad y'_1(\pi) = i\frac{F'(0)}{F(0)}\sin\pi\mu.$$

Дополнительно предположив, что μ не является целым, получим

$$\begin{aligned} i\frac{F(0)}{F'(0)}\sin k\pi\mu &= y_2(\pi)\frac{\sin k\pi\mu}{\sin\pi\mu}, \\ i\frac{F'(0)}{F(0)}\sin k\pi\mu &= y'_1(\pi)\frac{\sin k\pi\mu}{\sin\pi\mu}. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в (4.10) и (4.11), окончательно получим

$$\begin{aligned} y_1(t+k\pi) &= (\cos k\pi\mu)y_1(t) + y'_1(\pi)\frac{\sin k\pi\mu}{\sin\pi\mu}y_2(t), \\ y_2(t+k\pi) &= y_2(\pi)\frac{\sin k\pi\mu}{\sin\pi\mu}y_1(t) + (\cos k\pi\mu)y_2(t). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Так как $(\sin k\pi\mu)/\sin\pi\mu$ и $\cos k\pi\mu$ суть многочлены от $\cos\pi\mu$, а $\cos\pi\mu = y_1(\pi) = y'_2(\pi)$ (см. (4.7)), то коэффициенты c_{rs} в (4.5) суть многочлены от $y_1(\pi)$, $y'_1(\pi)$, $y_2(\pi)$, $y'_2(\pi)$. Использовать это обстоятельство для непосредственных вычислений, по-видимому, неразумно, но для обоснования рассматриваемого далее предельного перехода оно существенно. Именно формула (4.13) была доказана при дополнительном предположении, что $F(0) \neq 0$, $F'(0) \neq 0$ и μ не является целым. Случай несоблюдения этого предположения получаем как предельный. Поэтому формула (4.13) верна и в общем случае.

5. О ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Описанные методы были реализованы в системе вычислений с произвольной точностью. Для определения внутренних параметров, таких как число взятых членов ряда, место обрыва цепных дробей и др., потребовалось разработать специальные методы контроля точности. Ниже приведены некоторые результаты расчетов.

В таблице, являющейся “продолжением” табл. 4.1 из [6], представлены СЗ b_{2n} при $q = 25$. Результаты расчетов с 40 значащими цифрами подтверждаются (воспроизводятся) при расчетах с

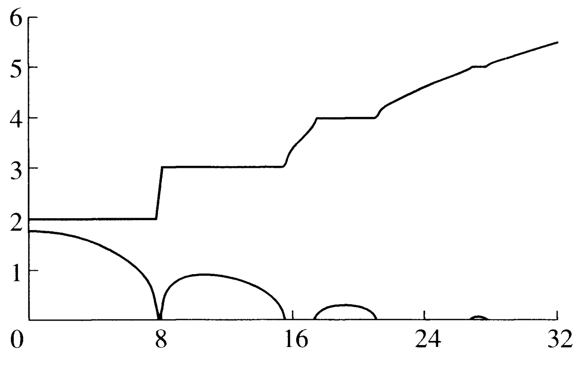
Таблица

СЗ	[1]	[8]	[6]	Расчеты авторов
b_2	–21.31486062	–21.314860622	–21.3148606222499	–21.314860622249850854314664972573 81226977
b_4	–	12.986489953	12.9864899527425	12.98648995274245978696086926962446752855
b_6	–	41.801071292	41.8010712918115	41.80107129181058013238706064957626657798
b_8	–	69.057988351	69.0579883512758	69.05798835128618256012392585342334608242
b_{10}	103.22568004	103.225680042	103.225680042418	103.2256800423734700047997305444380455190
b_{12}	–	146.207674647	146.207674647279	146.2076746474580792325359615455730525781
b_{14}	–	197.611164916	197.611164920589	197.6111649156508603480957728194897503429
b_{16}	–	257.229284862	257.22928528627	257.2292848625012979647682267875409801588

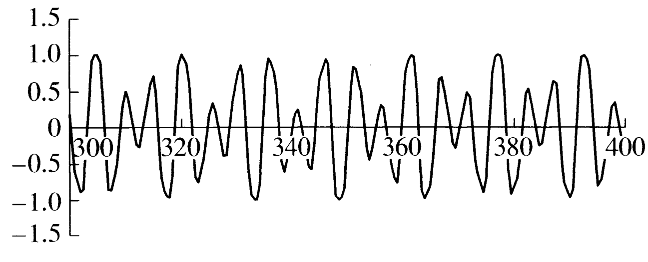
бо́льшим числом цифр (60, 100 и т.д.). Отметим, что наши результаты несколько отличаются от результатов из [6] в b_6, …, b_{12}, а в b_{14}, b_{16} отличаются более существенно. Наоборот, получено полное подтверждение результатов из [8] со всеми приведенными там значащими цифрами.

На фиг. 3 представлен график характеристического показателя (верхняя кривая – вещественная часть, нижняя кривая – мнимая часть) для значений параметров $q = 10$, $0 < p < 32$. Как видно, обе кривые непрерывны, а вещественная часть монотонно возрастает в промежутках вне лакун.

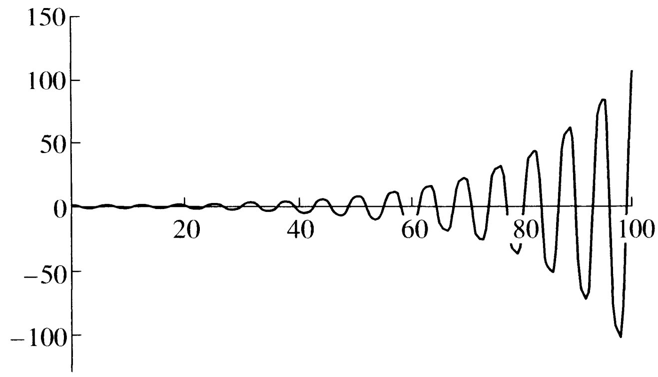
На фиг. 4, 5 приведены графики решения уравнения Матье на достаточно больших промежутках изменения аргумента. Использовалась обычная (ср. [1, рис. 20.2 и 20.3]) нормировка условиями вида (3.2), (3.3), соответственно, для четных и нечетных решений с соответствующей пере-



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

нормировкой коэффициентов c_k. Фиг. 4 соответствует параметрам $p = 2.0$, $q = 1.0$, $300 < t < 400$ (зона устойчивости $a_1 < p < b_2$), фиг. 5 – параметрам $p = 1.85$, $q = 1.0$, $0 < t < 100$ (лакуна $b_1 < p < a_1$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.
2. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1–3. М.: Наука, 1967.
3. *Frenkel D., Portugal T.* Algebraic methods to compute Mathieu functions: Laboratório Nacional de Computação Cientifica. Abstract. Petrópolis, Brazil, 2002. P. 1–14.
4. *Kokkorakis G.C., Roumeliotis J.A.* Power series expansions for Mathieu functions with small arguments // Math. Comput. 2000. V. 70. № 235. P. 1221–1235.
5. *Algarhan F.A.* A complete method for the computations of Mathieu characteristic numbers of integer orders // SIAM Rev. 1996. V. 38. 2. P. 239–255.
6. *Gutiérrez Vega J.C.* Theory and numerical analysis of the Mathieu functions. Monterrey, NL, México, 2003. http://homepages.mty.itesm.mx/jgutierr/Mathieu/Mathieu.pdf.
7. *Власов В.К., Глухова М.Н., Королев Л.Н. и др.* О вычислении функций Матье // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1992. № 1. С. 65–69.
8. *Leeb W.* Algorithm 537. Characteristic values of Mathieu's differential equation // ACM Trans. Math. Software. 1979. V. 5. № 1. P. 112–117.
9. *Березман А.М., Керимов М.К., Скороходов С.Л., Шадрин Г.А.* О вычислении собственных значений уравнения Матье с комплексным параметром // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 9. С. 1350–1361.
10. *Shirts R.B.* The computation of eigenvalues and solutions of Mathieu's differential equation for noninteger order // ACM Trans. Math. Software. 1993. V. 19. № 3. P. 377–390.
11. *Meixner J., Schäfke F.W., Wolf G.* Mathieu functions and spheroidal functions and their mathematical foundations. Further studies // Lect. Notes Math. 837. Berlin: Springer, 1981.
12. *Абрамов А.А., Курочкин С.В.* Высокоточное вычисление угловых сфероидальных функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 1. С. 12–17.
13. *Абрамов А.А.* Выделение медленно растущих последовательностей, члены которых удовлетворяют заданным рекуррентным соотношениям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 4. С. 661–668.
14. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.