С. В. Курочкин, Дискретность спектра линейной двухточечной краевой задачи с условиями ограниченности решения в особых точках, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1992, том 32, номер 12, 1995–2000

$3\pi/(4n), \ldots, (2n-1)\pi/(4n))$ и $W(\beta)=\{b+\beta : b\in W\}$. Множество точек $W(\beta)$ снова разбивается на пары (γ, γ'), для которых $\sin\gamma_i=\sin\gamma_i'$, $i=1, 2, \ldots, n$. Для индексов в нумерации узлов формулы (2), образующих пары, достаточно выполнения условия $i+j\equiv(2n+1)\bmod N$. Все остальные рассуждения повторяют случай четного m. Отметим, только, что здесь число узлов формулы (2) равно $2n$, т. е. является минимальным.

Список литературы

1. *Morrow C. R., Patterson T. N. L.* Construction of algebraic cubature rules using polynomial ideal theory // SIAM J. Numer. Analys., 1978. V. 15. N. 5. P. 953–976.
2. *Коробов Н. М.* Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.
3. *Носков М. В.* Формулы приближенного интегрирования периодических функций // Методы вычислений. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. Вып. 15. С. 19–22.
4. *Носков М. В.* Кубатурные формулы для приближенного интегрирования функций трех переменных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 10. С. 1583–1586.
5. *Носков М. В.* Некоторые аналоги кубатурных формул типа Морроу – Паттерсона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 8. С. 1254–1257.

Поступила в редакцию 26.04.91

УДК 517.927

С. В. КУРОЧКИН

(Москва)

ДИСКРЕТНОСТЬ СПЕКТРА ЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЯ В ОСОБЫХ ТОЧКАХ

Доказана дискретность спектра двухточечной краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с регулярными особенностями на концах интервала и условиями ограниченности решения в случае, когда спектральный параметр не входит в главную часть особенностей. В дополнительном предположении, что спектральный параметр входит в правую часть линейно, получена оценка роста собственных значений, аналогичная известной оценке для задачи без особенностей.

Многие задачи математической физики при разделении переменных сводятся к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих особенности в концах интервала или рассматриваемых на бесконечном интервале. Роль граничных условий при этом часто выполняют условия ограниченности решения. При численном отыскании собственных значений (с. з.) и собственных функций полученной задачи бывает важно заранее знать общее строение ее спектра, в частности, будет ли он чисто дискретным. Ниже доказывается дискретность спектра для случая линейной системы с регулярными особенностями, когда спектральный параметр не входит в главные части разложений матрицы системы в ряд Лорана в окрестности особенностей. Примеры задач, приводящих к системам такого вида, см. в [1]. При дополнительном предположении, что спектральный параметр входит в матрицу правой части линейно, доказано, что показатель сходимости последовательности с. з. равен единице (для задачи без особенностей это известный факт).

Пусть имеется система

(1) $\qquad \mathbf{y}'=A(x, \lambda)\mathbf{y}, \qquad 0<x<1,$

где комплексная $(n\times n)$-матрица $A(x,\lambda)$ непрерывна по (x,λ) на $(0,1)\times\mathbb{C}$ и при фиксированном x является целой функцией λ. Рассматривается случай, когда в окрестности точки $x=0$ матрица $A(x,\lambda)$ имеет представление

$$A(x,\lambda)=\frac{1}{x}A_0+\tilde{A}(x,\lambda), \tag{2}$$

где A_0 – постоянная матрица, $\tilde{A}(x,\lambda)$ голоморфна по (x,λ) в окрестности точки $(0,0)$. Ниже будут уточнены условия на $\tilde{A}(x,\lambda)$. При этом они будут охватывать важный для приложений случай, когда

$$A(x,\lambda)=\frac{1}{x}A_0+G(x)+\lambda H(x), \tag{3}$$

$G(x)$ и $H(x)$ голоморфны в окрестности точки $x=0$. Вблизи точки $x=1$ строение $A(x,\lambda)$ аналогичное. Решение системы (1) ищется в классе вектор-функций, ограниченных на интервале $(0,1)$.

Далее будут использоваться результаты о перенесении условия ограниченности из особой точки. Для случая регулярной особенности (см. [2]) суть этих результатов, вкратце, такова. Выберем базис в C^n так, чтобы в качестве последних k базисных векторов были взяты корневые векторы, отвечающие с. з. μ матрицы A_0 с $\operatorname{Re}\{\mu\}>0$ и собственные векторы для с. з. μ с $\operatorname{Re}\{\mu\}=0$. В таком базисе

$$A_0=\begin{Vmatrix} A_0^- & 0 \\ B & A_0^+ \end{Vmatrix},$$

где $\operatorname{Re}\{\mu(A_0^+)\}\geqslant 0$, $\operatorname{Re}\{\mu(A_0^-)\}\leqslant 0$. Компоненты решения будем обозначать, соответственно, $\mathbf{y}^+$ и $\mathbf{y}^-$. Пусть

$$x\tilde{A}=\begin{Vmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{Vmatrix}.$$

Условие ограниченности $\mathbf{y}(x)$ при $x\to 0$ эквивалентно при малых x условию

$$\mathbf{y}^-(x)=\alpha(x)\mathbf{y}^+(x), \tag{4}$$

где $\alpha(x)$ – решение сингулярной задачи Коши для уравнения Риккати

$$x\alpha'=A_0^-\alpha-\alpha A_0^++V_{11}\alpha-\alpha V_{22}-\alpha(B+V_{21})\alpha+V_{12}, \tag{5}$$

$$\alpha(x)=O(x^\varepsilon)\qquad \forall\varepsilon,\quad 0<\varepsilon<1. \tag{6}$$

Решение задачи (5), (6) при малых x существует, единственно и представимо сходящимся рядом

$$\alpha(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m x^m, \tag{7}$$

коэффициенты которого определяются по рекуррентным формулам подстановкой в (5) разложения $\tilde{A}$ по степеням x.

Теорема 1. *Пусть дана система* (1) *с особенностями вида* (2) *на одном или обоих концах интервала, причем матричная функция $\tilde{A}$ из* (2) *голоморфна по (x,λ) в точке $(0,0)$, и для любого $\Lambda>0$ существует $R>0$ такое, что бикруг $\{|\lambda|\leqslant\Lambda,\ |x|\leqslant R\}$ принадлежат области голоморфности $\tilde{A}$. Пусть вблизи точки $x=1$ правая часть имеет аналогичное строение (или же A не имеет особенности при $x\to 1$ и в точке $x=1$ поставлены k независимых линейных краевых условий). Предположим, что условия ограниченности на концах дают по формуле* (4) *в сумме n независимых линейных условий. Тогда имеем следующее:*

а) *либо спектр задачи дискретен и не имеет конечных предельных точек,*

б) *либо любая точка $\lambda\in\mathbb{C}$ принадлежит спектру.*

Доказательство. Рассмотрим вначале точку $x=0$. Выберем базис в $\mathbb{C}^n$ указанным выше способом. Введем в $\mathbb{C}^n$ гильбертову норму так, чтобы выбранный базис был ортонормированным. Для матриц различных размеров будем использовать соответствующие операторные нормы. Пусть в окрестности точки $(0, 0)$

(8) $$x\tilde{A}(x,\lambda)=\sum_{p=0,m=1}^{\infty} Q_{pm}\lambda^p x^m.$$

Возьмем произвольно $\Lambda>0$. По условию, существует $R>0$ такое, что точка $\lambda=\Lambda$, $x=R$ принадлежит области сходимости ряда (8). Переразлагая (8) в ряд Хартогса, получаем

(9) $$x\tilde{A}(x,\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty} U_m(\lambda)\,x^m.$$

Из сходимости ряда (8) в бикруге $\{|\lambda|\leqslant\Lambda,\ |x|\leqslant R\}$ можно получить для коэффициентов (9) оценку вида

(10) $$\|U_m(\lambda)\|\leqslant C(\Lambda)\,\rho^m,$$

равномерную по λ в круге $|\lambda|\leqslant\Lambda$. При каждом (фиксированном) λ решение задачи (5), (6) представимо рядом (7). Рассмотрим, как коэффициенты этого ряда зависят от λ. Примем обозначения

$$U_m(\lambda)=\left\|\begin{matrix} V_{11,m}(\lambda) & V_{12,m}(\lambda)\\ V_{21,m}(\lambda) & V_{22,m}(\lambda)\end{matrix}\right\|.$$

Рекуррентные формулы для коэффициентов ряда (7) таковы:

(11)
$$\alpha_1-A_0^-\alpha_1+\alpha_1A_0^+=V_{12,1}(\lambda),$$
$$m\alpha_m-A_0^-\alpha_m+\alpha_mA_0^+=\sum_{p=1}^{m-1}V_{11,p}(\lambda)\alpha_{m-p}-\sum_{p=1}^{m-1}\alpha_pV_{22,m-p}(\lambda)-$$
$$-\sum_{p=1}^{m-1}\alpha_pB\alpha_{m-p}-\sum_{p=1}^{m-2}\sum_{q=1}^{m-p-1}\alpha_pV_{21,q}(\lambda)\alpha_{m-p-q}+V_{12,m}(\lambda).$$

Левую часть формул (11) можно представить в виде $\mathcal{M}_m\alpha_m$, где $\mathcal{M}_m$ – линейный оператор в пространстве матриц. В силу свойств A_0^+ и A_0^- при $m\geqslant1$, оператор $\mathcal{M}_m$ обратим и

(12) $$M=\sup_m\left\|\left(\frac{1}{m}\mathcal{M}_m\right)^{-1}\right\|<\infty.$$

Из (10)–(12) можно получить оценку вида

(13) $$\|\alpha_m\|\leqslant C_1(\Lambda)\,(\gamma(\Lambda)\,\rho)^m,$$

равномерную по $|\lambda|\leqslant\Lambda$. Более подробно, пусть $b=\max(3\|B\|, 1)$. Нетрудно заметить, что $M\geqslant1$. Имея (10), можно выбрать r так, чтобы при $|\lambda|\leqslant\Lambda$ выполнялись неравенства

(14а) $$\|U_m(\lambda)\|\leqslant r^m/M,$$

(14б) $$\|V_{12,m}(\lambda)\|\leqslant\frac{4^m r^m}{M^2b}.$$

Тогда из (11) по индукции получаются неравенства

(15) $$\|\alpha_m\|\leqslant\frac{4^m r^m}{Mb}.$$

Из (11) непосредственно видно, что при фиксированном $x=x_0$ частичные суммы ряда (7) являются голоморфными функциями λ в круге $|\lambda|\leqslant\Lambda$. В силу (13), этот ряд равномерно по λ сходится, если x_0 выбрано достаточно близко к нулю. Следовательно, при таком x_0 его сумма, т. е. функция $\alpha(x_0,\lambda)$ будет голоморфной по λ в круге $|\lambda|\leqslant\Lambda$.

Для каждого λ, $|\lambda|<\Lambda$, возьмем векторы $\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_k\in\mathbb{C}^n$ так, чтобы

$$(16)\qquad (\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_k)=\left\|\begin{matrix}\alpha(x_0,\lambda)\\ E_k\end{matrix}\right\|.$$

Рассмотрим k задач Коши для уравнения (1) с начальными условиями $\mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_i$, $i=1,2,\dots k$. Пусть $\mathbf{y}_i(x,\lambda)$ – решения этих задач Коши. Пусть $\hat{x}$ – заранее фиксированная внутренняя точка интервала $(0,1)$, например $\hat{x}={}^1/_2$. Из того, что $\alpha(x_0,\lambda)$ голоморфна по λ, $A(x,\lambda)$ – целая по λ при $x\in[x_0,\hat{x}]$, в силу известных теорем об аналитической зависимости от параметра решений о. д. у. получаем, что $\mathbf{y}_i(\hat{x},\lambda)$, $i=1,2,\dots k$,– голоморфные функции λ в круге $|\lambda|<\Lambda$.

Проделав то же для правого конца, получим в точке $\hat{x}$ векторы $\mathbf{y}_i(\hat{x},\lambda)$, $i==k+1,\dots,n$. Если на правом конце особенности нет, то действия очевидным образом упрощаются. Точка λ, $|\lambda|<\Lambda$, принадлежит спектру в том и только том случае, если

$$D_\Lambda(\lambda)=\det(\mathbf{y}_1(\hat{x},\lambda),\dots \mathbf{y}_k(\hat{x},\lambda),\ \mathbf{y}_{k+1}(\hat{x},\lambda),\dots \mathbf{y}_n(\hat{x},\lambda))=0.$$

Функция $D_\Lambda(\lambda)$ голоморфна в круге $|\lambda|<\Lambda$. Если взять два разных Λ_1 и Λ_2, то соответствующие функции $D_{\Lambda_1}(\lambda)$ и $D_{\Lambda_2}(\lambda)$ в круге $|\lambda|<\min(\Lambda_1,\Lambda_2)$ будут отличаться друг от друга ненулевым множителем, и следовательно, имеют в этом круге одинаковые нули. Заключение теоремы получается теперь из известного свойства нулей голоморфной функции.

Замечание 1. Как и в случае системы (1) без особенностей (см. [3]), без дополнительных предположений нельзя исключить случай б), т. е. когда спектр совпадает со всей комплексной плоскостью. Примером такого дополнительного предположения может быть гамильтоновость системы (1). Кроме того, случай б) обычно сразу исключается при численном решении задачи.

Замечание 2. Можно попытаться доказать утверждение теоремы, используя не матрицу $\alpha(x)$, а непосредственно какую-либо фундаментальную матрицу-решение системы (1), например в том виде, как она записана в [4]. Однако при таком способе (если он вообще возможен) технические трудности будут гораздо бо́льшими, так как отдельные решения системы (1), в том числе и ограниченные вблизи особенности, ведут себя более сложно, чем все подпространство ограниченных решений.

Рассмотрим теперь случай, когда $A(x,\lambda)$ имеет вид (3). Следующая теорема дает такую же оценку роста собственных значений, какая имеется для системы (1) без особенностей (см. [3, теорема 9.2.1]).

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1, $A(x,\lambda)$ имеет вид (3) и имеет место случай а). Пусть λ_i, $i=1,2,\dots$ – ненулевые с. з. (их число может быть конечным или бесконечным). Тогда для любого $\varepsilon>0$ сходится ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_i|^{1+\varepsilon}}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что точка $\lambda=0$ не принадлежит спектру (иначе сделаем сдвиг в λ-плоскости). Возьмем некоторое $\Lambda_0>0$, соответствующие ему точки отхода $x_0{}^0$ и $x_1{}^0$ и построим, как в доказательстве теоремы 1, функцию $D_{\Lambda_0}(\lambda)$. Пусть $D_{\Lambda_0}(0)=a$. В силу сказанного выше, $a\neq0$. Пусть теперь $\Lambda>\Lambda_0$ взято произвольно. Из того, что $A(x,\lambda)$ имеет вид (3), следует, что в (14) можно полагать $r=(\Lambda+1)s$, где s не зависит от Λ (а зависит от норм коэффициентов разложения $G(x)$ и $H(x)$ в ряд в окрестности $x=0$). Соответственно, из (15) можно получить оценку

$$\|\alpha_m\|\leqslant C_3[4(\Lambda+1)s]^m \quad \text{при } |\lambda|\leqslant\Lambda,$$

C_3 от Λ не зависит. Если теперь взять x_0 достаточно близко к нулю, а именно:

$$x_0=[8C_3(\Lambda+1)s]^{-1},$$

то при $|\lambda|\leqslant\Lambda$ будем иметь $\|\alpha(x_0)\|\leqslant 1$. Рассмотрим, как в теореме 1, задачи Коши для (1) с начальными условиями $\mathbf{y}_i(x_0)=\mathbf{y}_i$, $\mathbf{y}_i$ из (16). Имеем, что $\|\mathbf{y}_i(x_0)\|\leqslant\sqrt{2}$, $i=1,2,\ldots,k$. Пусть, как и раньше, $\hat{x}$ – какая-то фиксированная точка интервала $(0, 1)$. Тогда

$$\|\mathbf{y}_i(\hat{x})\|\leqslant\|\mathbf{y}_i(x_0)\|\exp\left[\int_{x_0}^{\hat{x}}\|A(\xi,\lambda)\|\,d\xi\right], \tag{17}$$

$$\int_{x_0}^{\hat{x}}\|A(\xi,\lambda)\|\,d\xi\leqslant\|A_0\|\int_{x_0}^{\hat{x}}\frac{1}{\xi}\,d\xi+\int_{x_0}^{\hat{x}}\|G(\xi)\|\,d\xi+|\lambda|\int_{x_0}^{\hat{x}}\|H(\xi)\|\,d\xi. \tag{18}$$

Очевидно, что

$$\int_{x_0}^{\hat{x}}\frac{1}{\xi}\,d\xi\leqslant\ln\frac{1}{x_0}=\ln[8C_3(\Lambda+1)s].$$

Отсюда

$$\exp\left[\int_{x_0}^{\hat{x}}\|A(\xi,\lambda)\|\,d\xi\right]\leqslant C_4(\Lambda+1)\exp(C_5\Lambda), \tag{19}$$

константы C_4 и C_5 не зависят от Λ.

Используя (17), (19), такие же оценки для векторов, пригнанных справа, и очевидное неравенство $|\det(Q)|\leqslant\|Q\|^n$ для произвольной $(n\times n)$-матрицы Q, получаем

$$|D_\Lambda(\lambda)|\leqslant C_4^n(\Lambda+1)^n\exp(nC_5\Lambda)\quad\text{при } |\lambda|\leqslant\Lambda. \tag{20}$$

Оценим теперь $|D_\Lambda(0)|$. Положим $\lambda=0$. Из способа построения функций $\mathbf{y}_i(x)$ следует, что

$$(\mathbf{y}_1(x_0^0),\ldots,\mathbf{y}_k(x_0^0))=\left\|\begin{matrix}\alpha(x_0^0,\lambda)\\ E_k\end{matrix}\right\|\Omega_0,$$

где Ω_0 – некоторая невырожденная $(k\times k)$-матрица. Из оценок, аналогичных (17) и (18), следует, что

$$\|\Omega_0^{-1}\|\leqslant(2k)^{1/2}C_4(\Lambda+1)\exp(C_5\Lambda).$$

Аналогичные построения делаем на правом конце при этом получаем матрицу Ω_1. Из равенства

$$D_\Lambda(0)=D_{\Lambda_0}(0)\det(\Omega_0)\det(\Omega_1)$$

получаем

$$|D_\Lambda(0)|=\frac{|D_{\Lambda_0}(0)|}{|\det(\Omega_0^{-1})|\;|\det(\Omega_1^{-1})|}\geqslant\frac{a}{\|\Omega_0^{-1}\|^k\,\|\Omega_1^{-1}\|^{n-k}}\geqslant \tag{21}$$

$$\geqslant\frac{a}{2nC_4^n(\Lambda+1)^n\exp(nC_5\Lambda)}.$$

Пусть $N(r)$ – число нулей (с учетом кратности) функции $D_\Lambda(\lambda)$ в круге $|\lambda|<r$, $r\leqslant\Lambda$. Выше было сказано, что эти нули, а стало быть и $N(r)$, не зависят от того, какое именно Λ взято. Пусть $M_\Lambda(r)$ – максимум модуля $D_\Lambda(\lambda)$ в круге $|\lambda|\leqslant r$. Далее применяем известные факты из теории аналитических функций (см., например, [5]). По неравенству Иенсена

$$N(\Lambda)\leqslant\int_\Lambda^{e\Lambda}[N(r)/r]\,dr\leqslant\ln[M_{e\Lambda}(e\Lambda)]-\ln[M_{e\Lambda}(0)]. \tag{22}$$

Из (20)–(22) имеем

$$N(\Lambda)\leqslant C_6+C_7\ln(\Lambda+1)+C_8\Lambda.$$

Отсюда видно, что порядок последовательности с. з.

$$\limsup_{\Lambda\to\infty}\frac{\ln N(\Lambda)}{\ln\Lambda}=1. \tag{23}$$

Поскольку показатель сходимости последовательности равен ее порядку, из (23) следует утверждение теоремы.

Замечание 3. Утверждения теорем 1 и 2 остаются в силе, если вместо условий ограниченности решения рассматривать более общие допустимые в смысле [6] краевые условия. Такие условия характеризуются, в частности, тем, что соответствующее подпространство представимо в виде, аналогичном (4), со сходящимся рядом (7). Именно это свойство краевого условия использовалось в доказательствах.

Список литературы

1. *Абрамов А. А., Конюхова Н. Б., Парийский Б. С. и др.* Численные исследования свободных и вынужденных колебаний в сжимаемой среде замкнутых упругих моментных оболочек вращения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 5. С. 747–764.
2. *Абрамов А. А.* О поведении граничных условий, переносимых в окрестности регулярной особой точки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 4. С. 901–908.
3. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
4. *Коддингтон Э., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
5. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976. Ч. 1.
6. *Абрамов А. А.* О граничных условиях в особой точке для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 1. С. 275–278.

Поступила в редакцию 10.12.91

УДК 519.854.6

В. Г. АНИСИМОВ, Е. Г. АНИСИМОВ

(Москва)

АЛГОРИТМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

Рассматривается алгоритм решения динамической задачи оптимального распределения дискретных неоднородных ресурсов на сети, основанный на общих идеях метода ветвей и границ.

§ 1. Постановка задачи

Специальный, но достаточно широко распространенный в практике управления сложными системами класс задач теории расписаний составляют задачи минимизации времени выполнения комплекса работ при ограничениях на количество и взаимозаменяемость исполнителей. При решении таких задач структуру взаимосвязи и обусловленность работ целесообразно отображать в виде ориентированного графа $G\{(i,j)\}$, $i, j=1, 2, \ldots, m$, $i<j$, где m – число узлов графа, i, j – номера узлов. Граф G представляет собой сеть, т. е. имеет только одну начальную и одну конечную вершины, а также не имеет циклов. Каждой работе в этом графе ставится в соответствие дуга (i,j), соединяющая i-й и j-й узлы.