С. В. Курочкин, О сингулярных краевых задачах для линейных гамильтоновых систем, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1994, том 34, номер 1, 58–67

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 34, 1994 № 1

УДК 517.926

© 1994 г. С. В. КУРОЧКИН

(Москва)

О СИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются краевые задачи для линейных гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих на концах интервала особенности I рода. Исследуются вопросы о правильной постановке граничных условий, свойства спектра, его близость к спектру приближенной регулярной задачи, полученной отходом от особенности.

Рассмотрим систему

(1) $$Jy' = [G(x) + \lambda H(x)]\,y, \qquad 0 < x < 1,$$

где $G(x)$, $H(x)$ – непрерывные по x комплексные $(2n\times 2n)$-матрицы, причем для любого x верно $G^*(x) = G(x)$, $H^*(x) = H(x)$, $H(x) \geq 0$; y – комплексный $2n$-вектор-решение; матрица J имеет вид

(2) $$J = \begin{Vmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{Vmatrix},$$

где E_n – единичная матрица. Система вида (1) является наиболее общей формой записи самосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов, как частный случай она включает классические и матричные операторы Штурма—Лиувилля, систему Дирака и др. Такие системы изучались в [1]. Как и в [1], будем предполагать, что операторный пучок (1) невырожденный, т. е.

(3) $$Jy' = G(x)\,y, \quad H(x)\,y \equiv 0 \;\Rightarrow\; y(x) \equiv 0.$$

На практике часто встречается и важен случай, когда матрица $H(x)$ постоянная и представляет собой ортогональный проектор. Тогда условие (3) означает, что у системы (1) нет нетривиальных решений с соответствующими компонентами, тождественно равными нулю.

В этой статье исследуются сингулярные краевые задачи для систем вида (1). Именно, предположим, что $G(x)$ имеет в одном или обоих концах интервала особенность I рода, т. е. представима сходящимся рядом

(4) $$G(x) = (G_0 + xG_1 + x^2G_2 + \ldots)/x$$

в окрестности точки $x = 0$ (G_i – постоянные матрицы) и, соответственно, для другого конца интервала. Предположим, что $H(x)$ не имеет особенностей и представляется сходящимся рядом

(5) $$H(x) = H_1 + xH_2 + \dots$$

в окрестности $x = 0$; аналогично — для $x = 1$. Конкретным примером, где возникают такие системы, является задача о колебаниях замкнутых оболочек вращения [2], [3]. В качестве краевых условий могут налагаться условия ограниченности решения $y(x)$ вблизи особых точек.

Будут рассматриваться следующие вопросы.

I. В каких случаях условие ограниченности решения порождает для системы (1) самосопряженную краевую задачу. Какова правильная постановка краевых условий в общем случае.

II. Для системы вида (1) без особенностей и с явными линейными краевыми условиями (см. [1]) известны свойства собственных значений (с. з.) вещественность, дискретность, оценки роста. Нужно выяснить, имеют ли они место в данном случае.

III. При численном решении таких задач делается так называемый «отход от особенности» (см. [4]), т. е. исходная задача заменяется специальным образом выбранной регулярной краевой задачей для той же системы на некотором отрезке $[\delta, 1 - \delta]$. Нужно выяснить, будут ли с. з. приближенной задачи близки к с. з. исходной задачи.

Далее будут сделаны необходимые уточнения формулировок этих вопросов и будут получены ответы на них. Доказательства приводятся в краткой форме.

1. Система (1) имеет вид

(6) $$y' = A(x, \lambda)\, y, \qquad 0 < x < 1,$$

где матрица $A(x, \lambda)$, рассматриваемая как функция x при фиксированном λ, в окрестности точки $x = 0$ представляется сходящимся рядом

(7) $$A(x, \lambda) = x^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} x^k A_k,$$

и то же для $x = 1$. Известно (см. [5]), что в таких предположениях поведение решений системы (6) вблизи особенности (их рост, количество линейно независимых ограниченных решений и т. п.) определяется жордановой структурой матрицы A_0. В рассматриваемом случае A_0 имеет вид

(8) $$A_0 = -JG_0,$$

где J — вида (2), $G_0^{*} = G_0$. Поэтому необходимо выяснить, какой может быть жорданова структура матрицы вида (8). Далее, нужно выяснить, как эта жорданова структура соотносится со свойствами самосопряженной системы (1), отличающими ее от общей системы (6). Введем в $\mathbb{C}^{2n}$ структуру комплексного евклидова пространства $(x, y) = y^{*}x$ и комплексную симплектическую структуру $[x, y] = (Jx, y)$. Линейное подпространство $\mathbb{L} \subset \mathbb{C}^{2n}$ называется изотропным, если для любых $x, y \in \mathbb{L}$ верно $[x, y] = 0$. Изотропное подпространство размерности n называется лагранжевым. Из результатов [1] следует, что разделенные краевые условия для системы вида (1) без особенностей порождают самосопряженную краевую задачу тогда и только тогда, когда каждое из них выделяет лагранжево подпространство. Поэтому, например, если рассматривается условие ограниченности решения в окрестности точки $x = 0$, то вопрос о том, является ли оно самосопряженным, очевидно, связан (а ниже будет доказано, что эквивалентен) с вопросом о том, является ли лагранжевым подпространство, порожденное корневыми векторами матрицы $-JG_0$, отвечающими с. з. μ с $\mathrm{Re}(\mu) > 0$, и собственными векторами для с. з. μ с $\mathrm{Re}(\mu) = 0$.

Предложение 1. *Пусть A — матрица вида* (8). *Тогда выполняется следующее:*

а) *если λ – с. з. A, то $\mu = -\bar{\lambda}$ – тоже с. з. A;*

б) *если λ, μ – с. з. A, $\mu = -\bar{\lambda}$, то строение корневых подпространств (размерность, количество и размеры жордановых клеток), соответствующих λ и μ, одинаково;*

в) *если дополнительно известно, что матрица A вещественна, то вместе со всяким ее с. з. λ числа $-\lambda$, $\bar{\lambda}$, $-\bar{\lambda}$ также являются ее с. з. Аналог утверждения* б) *также имеет место;*

г) *если векторы x, y принадлежат, соответственно, корневым подпространствам, порожденным с. з. λ и μ, и $\lambda \neq -\bar{\mu}$, то $[x, y] = 0$ (здесь не исключается случай $\lambda = \mu$);*

д) *если λ, μ – с. з., $\lambda = -\bar{\mu}$, $x_1, \ldots, x_p$, $y_1, \ldots, y_q$ – жордановы цепочки в корневых подпространствах, соответствующих λ и μ (x_1 и y_1 – собственные векторы), то $[x_m, y_n] = 0$, если $m + n \leq \max(p, q)$ (здесь не исключается случай, когда $\lambda = \mu$, т. е. $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, и когда $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$ совпадают).*

Доказательство. Пусть $A = -JQ$, $Q^* = Q$. Тогда $(-JQ - \lambda E)^* = J(-JQ + \bar{\lambda}E)J$, откуда следует справедливость пп. а) и б). Утверждение п. в) получается комплексным сопряжением. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^p$, $\{y_j\}_{i=1}^q$ – цепочки собственных и присоединенных векторов для с. з., соответственно, λ и μ. Для удобства записи положим $x_k = y_k = 0$ при $k \leq 0$. Непосредственными выкладками получается, что при $m \leq p$, $n \leq q$

$$\lambda\,[x_m, y_n] = -\bar{\mu}\,[x_m, y_n] - [x_m, y_{n-1}] - [x_{m-1}, y_n], \tag{9}$$

откуда при $\lambda \neq -\bar{\mu}$ индукцией по $m + n$ получаем п. г). Если $\lambda = -\bar{\mu}$, то (9) превращается в

$$[x_m, y_{n-1}] + [x_{m-1}, y_n] = 0,$$

откуда следует п. д).

Примеры показывают, что в рамках ограничений, налагаемых предложением 1, для матриц вида (8) могут осуществляться различные возможности, в том числе наиболее трудный для численного решения случай, когда имеются жордановы клетки, соответствующие с. з., лежащим на мнимой оси.

2. Если матрица системы вида (6) имеет особенность на конце интервала, то термин «краевое условие» в этой точке означает выделенное линейное

подпространство M в пространстве всех решений системы. Решения $y(\cdot)$, принадлежащие M, должны характеризоваться каким-то определенным поведением вблизи особенности, например, быть ограниченными. Пусть размерность системы (6) равна n, $\dim(M)=k$, $k \leq n$. Для $x \in (0, 1)$ положим

$$M(x) = \{u \in \mathbb{C}^n : u = y(x) \text{ для некоторого } y(\cdot) \in M\}.$$

Для каждого x множество $M(x)$ представляет собой k-мерное подпространство в $\mathbb{C}^n$, и его можно рассматривать как точку грассманова многообразия $\mathbb{C}G(n, k)$ (см., например, [6]). Практика показывает, что если краевое условие поставлено с физической точки зрения правильно, то при изменении x в окрестности точки $x=0$ подпространство $M(x)$ меняется плавно (в смысле какой-либо естественной метрики на $\mathbb{C}G(n, k)$) и при $x \to +0$ имеет предел. Таким свойством, как правило, не обладают отдельные решения, составляющие M.

Рассмотрим систему (6) с особенностью (7). Временно не будем рассматривать зависимость ее от спектрального параметра λ. Пространство $\mathbb{C}^n$ можно (вообще говоря, многими способами) представить в виде прямой суммы двух подпространств таким образом, что матрица A_0 из (7) будет иметь вид

$$(10)\qquad A_0 = \begin{Vmatrix} A_0^- & 0 \\ B & A_0^+ \end{Vmatrix},$$

где вещественные части с. з. матрицы A_0^- неположительны, а матрицы A_0^+ неотрицательны. Соответствующие компоненты произвольного вектора $w \in \mathbb{C}^n$ обозначим через w^- и w^+. В [7] доказано, что среди краевых условий, представимых в окрестности точки $x=0$ в виде

$$(11)\qquad y^-(x) = \alpha(x)\, y^+(x),$$

имеется ровно одно, для которого переменная матрица $\alpha(x)$ представляется в некоторой окрестности $x=0$ сходящимся рядом

$$(12)\qquad \alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^k.$$

Коэффициенты ряда (12) определяются по рекуррентным формулам подстановкой (7) и (12) в уравнение Риккати, которое получается из (6) и (11). Сходимость ряда (12) можно доказать прямой оценкой норм его коэффициентов. Условию ограниченности решения соответствует такое разбиение $\mathbb{C}^n$ в прямую сумму, при котором «положительное» подпространство есть линейная оболочка корневых векторов матрицы A_0, соответствующих с. з., лежащих в правой полуплоскости, и собственных векторов, соответствующих с. з. на мнимой оси.

Краевые условия вида (11), (12) обладают, очевидно, тем свойством, что отображение $x \to M(x)$ интервала $(0, 1)$ в $\mathbb{C}G(n, k)$ можно доопределить в точке $x=0$ так, чтобы оно было аналитическим в этой точке. Далее для краткости такие краевые условия будут называться «гладкими». Из сказанного выше следует, что условие ограниченности всегда является таковым.

От системы общего вида (6) вернемся к гамильтоновой системе (1). Выясним, какие гладкие краевые условия порождают для нее самосопряженную краевую задачу. Назовем гладкое условие лагранжевым, если

$$M(0) = \lim_{x \to +0} M(x)$$

есть лагранжево подпространство. Такое название оправдано только в том случае, если в результате "отгонки" условия от особой точки получим самосопряженную (в смысле [1]) регулярную краевую задачу. Это действительно так, если среди решений, выделяемых краевым условием, нет сильно растущих.

Предложение 2. *Пусть для системы* (1) *в точке* $x=0$ *задано лагранжево гладкое краевое условие M. Предположим, что для всех составляющих его решений* $y(\cdot)$ *выполнено*

$$x\,\|y(x)\| \to 0 \quad при \quad x \to +0. \tag{13}$$

Если λ *– вещественно, то* $M(x)$ *— лагранжево подпространство для любого* $x \in (0, 1)$.

Доказательство. Пусть $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot)$ – произвольные два решения системы (1), удовлетворяющие краевому условию. Тогда (см. [1])

$$(y_2^* J y_1)' = y_2^* (\lambda - \bar{\lambda}) H y_1. \tag{14}$$

Поскольку λ вещественно, для любых x, x_0 будет

$$y_2^*(x_0)\, J y_1(x_0) = y_2^*(x)\, J y_1(x). \tag{15}$$

Зафиксируем x_0, а x устремим к 0. Докажем, что правая части (15) стремится к нулю. Действительно, $y_1(x)$, $y_2(x)$ удовлетворяют (11), причем подпространство, соответствующее слагаемому y^+, лагранжево, а $\|\alpha(x)\| = \dot{O}(x)$ при $x \to 0$ в силу (12). Это означает, что угловое расстояние векторов $y_i(x)$, $i = 1, 2$, до предельного подпространства $M(0)$ есть $O(x)$, и с учетом ограничений (13) на рост $y_i(x)$ получим, что $y_2^*(x)\, J y_1(x) \to 0$ при $x \to 0$, а значит, $y_2^*(x_0)\, J y_1(x_0) = 0$ для любого $x_0 \in (0, 1)$.

Ответим теперь на первый из поставленных во введении вопросов.

Предложение 3. *Рассмотрим систему* (1) *с матрицами G и H вида* (4), (5).

а. *Если у матрицы* JG_0 *нет с. з. на мнимой оси, то условие ограниченности решения в окрестности точки* $x = 0$ *является лагранжевым.*

б. *Если у матрицы* JG_0 *есть с. з. на мнимой оси, возможно кратные, но все они полупростые, т. е. им не соответствуют жордановы клетки, то условие ограниченности может быть (вообще говоря, разными способами) дополнено другими линейными условиями до лагранжева условия.*

в. *В общем случае в особой точке может быть поставлено такое лагранжево краевое условие, что оно содержит все решения системы* (1), *стремящиеся к* *нулю при $x \to 0$, и не содержит ни одного решения, растущего при $x \to 0$ быстрее $x^{-\varepsilon}$ для какого-либо $\varepsilon > 0$.*

г. *Если матрицы $G(x)$ и $H(x)$ вещественны при любом x, то в каждом из случаев* а — в *соответствующие краевому условию подпространства $M(x)$, $x \in (0, 1)$ и $M(0)$ могут быть заданы вещественными матрицами.*

Доказательство. С учетом сказанного выше об условии ограниченности, утверждение а следует из утверждений а), б) и г) предложения 1. Рассмотрим случай б. Пусть L_+ – линейная оболочка всех корневых подпространств матрицы — JG_0, соответствующих с. з. в правой полуплоскости. Из п. г) предложения 1 следует, что это изотропное подпространство. Аналогично тому, как это делается в вещественном случае, можно показать, что любое изотропное подпространство может быть вложено в лагранжево. Проделаем это для L_+ и покажем, что полученное лагранжево подпространство $\widetilde{L}_+$ принадлежит линейной оболочке корневых подпространств, соответствующих с. з. в правой полуплоскости и на мнимой оси. Допустим противное, т. е. что существует с. з. μ, $\mathrm{Re}\mu < 0$, и вектор $w \in \widetilde{L}_+$ такой, что его риссова проекция w_μ на корневое подпространство, соответствующее μ, не равна нулю. Тогда, в силу предложения 1 п. а), число $\lambda = -\bar{\mu}$ – также с. з., и из изотропности $\widetilde{L}_+$ следует, что $[w, y] = 0$ для любого y из корневого подпространства λ. Из п. г) предложения 1 следует, что $[y, w - w_\mu] = 0$, значит, $[y, w_\mu] = 0$. Тогда опять из п. г) предложения 1 следует, что $[z, w_\mu] = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}^{2n}$ т. е. получили противоречие. Построенное подпространство $\widetilde{L}_+$ обладает всеми свойствами, требуемыми для представления вида (10), и, следовательно, является предельным подпространством $M(0)$ для некоторого гладкого краевого условия M. Из асимптотических свойств решений (см. [5]) следует, что все решения, принадлежащие M, ограничены.

Для доказательства п. в проделаем, исходя из L_+, те же действия. На примерах видно, что, вообще говоря, полученное $\widetilde{L}_+$ может оказаться не инвариантным для JG_0 и, следовательно, не порождать гладкого краевого условия. Однако этого можно добиться, специальным образом расширяя L_+ до $\widetilde{L}_+$. Представим это как процесс последовательного добавления векторов к L_+. Тогда из соотношений (9) следует, что, прежде чем добавить очередной вектор w, можно, сохраняя подпространство изотропным, добавить вектор $JG_0 w$, если он еще в нем не содержится. Полученное таким образом $\widetilde{L}_+$ будет обладать теми же свойствами, что и в случае б, за исключением того, что некоторые решения будут при $x \to 0$ расти как $\ln x$ в некоторой целой степени.

Для доказательства г достаточно установить, что базис для представления типа (10) можно взять вещественным, так как далее вычисления коэффициентов ряда (12) будут производиться по вещественным рекуррентным формулам. Для случая а это следует из предложения 1 п. в). Для случаев б, в нужно дополнительно заметить, что если при расширении L_+ до $\widetilde{L}_+$ к очередному подпространству можно присоединить вектор x, то к нему, оставляя его изотропным, можно вместо x присоединить $\mathrm{Re}x$ либо $\mathrm{Im}x$.

Замечания. 1. Во всех трех случаях а — в полученное краевое условие удовлетворяет условию предложения 2.

2. Предложение 3 оправдывает введение понятия «гладкого» условия. Действительно, пусть, например, $n = 2$ и матрица JG_0 имеет единственное с. з. $\lambda = 0$ и представляет собой одну жорданову клетку4-го порядка. Условие ограниченности решения выделяет всего лишь одномерное подпространство решений системы (1). Понятие допустимого условия (см. [8]) в данном случае вообще не позволяет поставить какое-либо нетривиальное граничное условие. В то же время гладкое лагранжево условие существует и единственно — оно соответствует подпространству, натянутому на собственный и первый присоединенный векторы матрицы JG_0.

3. Перейдем к вопросу II.

Предложение 4. *Пусть для системы* (1) *с особенностями вида* (4) *на концах интервала* (0, 1) *поставлены гладкие лагранжевы краевые условия, причем каждое из них содержит все решения системы, стремящиеся к нулю в соответствующем конце интервала. Тогда все собственные значения краевой задачи вещественны, множество их не более чем счетно и не имеет конечных точек накопления; для собственных функций* $y_i(\cdot)$, *соответствующих с. з.* λ_i, $i = 1, 2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *выполнены соотношения ортогональности*

$$\int_{0+0}^{1-0} y_1^*(x)\, H(x)\, y_2(x)\, dx = 0.$$

Доказательство. Пусть λ – с. з., $y(\cdot)$ – собственная функция. Для малого $\delta > 0$ из (14) следует, что

$$y^*(1-\delta)\, Jy(1-\delta) - y^*(\delta)\, Jy(\delta) = 2i \operatorname{Im} \lambda \int_{\delta}^{1-\delta} y^*(x)\, H(x)\, y(x)\, dx. \tag{16}$$

Из предложения 3 следует, что $y(x)$ удовлетворяет условию (13) и аналогичному условию на другом конце. Так же, как это было сделано в доказательстве предложения 2, можно показать, что каждое из слагаемых в левой части (16) стремится к нулю при $\delta \to 0$. Поскольку при $x \to 0$ норма $y(x)$ самое большее растет как некоторая степень $\ln x$ и то же — при $x \to 1$, интеграл в правой части (16) сходится и, в силу условия невырожденности (3), строго больше нуля. Этим доказано, что $\operatorname{Im} \lambda = 0$. Дискретность множества с. з. следует теперь из теоремы 1 работы [9]. Соотношения ортогональности получаются их равенства

$$y_1^*(x)\, Jy_2(x)\Big|_{\delta}^{1-\delta} = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_{\delta}^{1-\delta} y_1^*(x)\, H(x)\, y_2(x)\, dx$$

при $\delta \to 0$ (здесь уже использовано, что λ_i вещественны).

4. Здесь будут рассмотрены вопросы, возникающие при численном решении задач на собственные значения для систем (1). В основе его лежит метод отхода от особенности [4], состоящий в том, что краевое условие в особой точке приближенно заменяется условием вида (11) в близкой точке x_0, причем вместо $\alpha(x_0)$ в (11) берется некоторая частичная сумма ряда (12) (далее m-ю такую частичную сумму будем обозначать $\alpha^{(m)}(x_0)$). Полученная регулярная краевая

задача на отрезке $[x_0, x_1]$ решается каким-либо методом дифференциальной прогонки (см., например, [10]). В рассматриваемом здесь случае в этой связи возникает вопрос о том, каково общее строение спектра получаемой регулярной задачи, а также сформулированный во введении вопрос III. Последний вопрос может встать в двух вариантах, в зависимости от того, как именно осуществляется отход от особенности. Первый вариант относится к тем случаям, когда коэффициенты ряда (12) вычисляются просто; например, если $n = 1$, то (11) —скалярное соотношение, (12) — числовой ряд и по рекуррентным формулам можно легко вычислить любое число его членов. На практике в этом случае обычно выбирается некоторая величина отхода δ, а затем вычисляется такое число m членов ряда (12), чтобы величина $\alpha^{(m)}(\delta)$ представлялась близкой к $\alpha(\delta)$. Другой, противоположный случай возникает, когда для нахождения каждого α_k требуются громоздкие вычисления с матрицами. Тогда обычно ограничиваются в (12) небольшим числом членов (одним-двумя, а иногда и вовсе полагая $\alpha = 0$), а затем путем проб выбирают достаточно маленькое δ. Из сказанного можно сделать вывод: желательно доказать, что с. з. приближенной задачи стремятся к с. з. точной как при величине отхода, стремящейся к нулю, и фиксированном числе членов в (12), так и при взятии все большего числа членов ряда и фиксированной величине отхода.

Обозначим через $T(\delta, m)$ краевую задачу, полученную отходом на δ от концов со взятием m членов в рядах (12) (для простоты эти величины берутся одинаковыми в обоих концах). Исходную задачу тогда естественно обозначить $T(0, \infty)$.

Предложение 5. *Для любого $\delta > 0$ и $m = 0$ или 1 спектр задачи $T(\delta, m)$ вещественный, дискретный, не имеет конечных точек накопления.*

Доказательство. При $m = 0$ краевые условия задачи $T(\delta, m)$ не зависят от λ и, по предложению 3, являются лагранжевыми. Утверждение в этом случае совпадает с утверждением теоремы 9.2.1 из [1].

Случай $m = 1$. Пусть $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $u_{n+1}, \ldots, u_{2n}$ — какой-либо ортонормированный базис в $\widetilde{L}_+$ (см. доказательство предложения 3). Для $j = 1, 2, \ldots, n$ положим $u_j = -Ju_{n+j}$. Матрица U перехода к новому базису, образованная векторами u_j, $j = 1, 2, \ldots, 2n$, обладает свойствами $U^*U = E$, $U^*JU = J$. В этом новом базисе матрица $A_0 = -JG_0$ будет иметь вид (10) и при этом сохранится свойство $(JA_0)^* = JA_0$, что (см. (10)) означает $B^* = B$, $(A_0^+)^* = -A_0^-$. Пусть $G_{22,1}$ и $H_{22,1}$ — правые нижние блоки, соответственно, матриц G_1 и H_1 в этом базисе. Из принятого условия $H(x) \geq 0$ следует, что $H_{22,1} \geq 0$. Рекуррентная формула для α_1 (см. [17]) имеет вид

$$\alpha_1 - A_0^-\alpha_1 + \alpha_1 A_0^+ = G_{22,1} + \lambda H_{22,1}.$$

Переходя к сопряженному равенству и вычитая его, получаем

$$(\alpha_1 - \alpha_1^*) - A_0^-(\alpha_1 - \alpha_1^*) + (\alpha_1 - \alpha_1^*) A_0^+ = 2i \operatorname{Im}\lambda\, H_{22,1}.$$

Воспользуемся следующей теоремой А. М. Ляпунова (см. [11]): если $Q = Q^*$, все с. з. матрицы S лежат в правой полуплоскости и $QS + S^*Q \geq 0$, то $Q \geq 0$. Получаем, что $-i(\alpha_1 - \alpha_1^*) \geq 0$. Но

$$(\alpha_1^* E)\, J \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ E \end{Vmatrix} = \alpha_1 - \alpha_1^*,$$

поэтому для любого вектора w, удовлетворяющего левому краевому условию задачи $T(\delta, 1)$, выполнено $-iw^*Jw \geq 0$. При отходе от правого конца будет иметь место аналогичное неравенство с противоположным знаком. Если бы λ было с. з. задачи $T(\delta, 1)$, то эти неравенства вошли бы в противоречие с (16). Следовательно, у задачи $T(\delta, 1)$ нет вещественных с. з. Далее применяется теорема 1 из [9].

Уже при $n = 1$ можно построить пример, в котором задача $T(\delta, 2)$ имеет «паразитный» невещественный спектр, уходящий в бесконечность при $\delta \to 0$. Дискретность спектра задачи $T(\delta, m)$ при любом m и достаточно малом δ будет следовать из доказываемого ниже предложения 7. При дополнительном предположении $H_{22,1} > 0$ предложение 5 будет верно и для $m > 1$ при достаточно малых δ; это следует из того, что тогда $-i(\alpha_1 - \alpha_1^*) > 0$ и, в силу (12), имеем $-i(\alpha^{(m)}(x) - (\alpha^{(m)}(x))^*) > 0$ при малом x. В любом случае при вещественном λ задача $T(\delta, m)$ самосопряженная, так как при использовании выбранного выше базиса $\{u_j\}$ лагранжевость краевого условия эквивалентна равенствам $\alpha_i = \alpha_i^*, i = 1, 2, \ldots, m$, которые следуют из того, что $\alpha(x) \equiv \alpha^*(x)$ (см. (12) и предложение 3).

Будем говорить, что спектр задач $T^{(k)}$ стремится к спектру задачи T при $k \to \infty$, если для любого $R > 0$ в круге $|\lambda| < R$ для достаточно больших k задачи $T^{(k)}$ и T имеют одинаковое с учетом кратности число с. з. и с. з. $T^{(k)}$ стремятся к соответствующим им с. з. T при $k \to \infty$.

Предложение 6. *При любом* $\delta > 0$ *спектр задачи* $T(\delta, m)$ *стремится к спектру* $T(0, \infty)$ *при* $m \to \infty$.

Доказательство неявно содержится в доказательстве теоремы 1 из [9]. Суть в том, что при любом R с. з. задачи $T(0, \infty)$, лежащие в круге $|\lambda| < R$, могут быть представлены как нули некоторой аналитической функции, к которой при $m \to \infty$ сходится последовательность таких же функций задач $T(\delta, m)$. Подробнее см. [9].

Предложение 7. *При любом* $m \geq 0$ *спектр задачи* $T(\delta, m)$ *стремится к спектру задачи* $T(0, \infty)$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство. Чтобы применить те же соображения, что в предложении 6, достаточно сказать следующее: при каждом фиксированном λ значения решений системы (1), удовлетворяющих (например) левому краевому условию задачи $T(\delta, m)$, в некоторой фиксированной точке $\hat{x} \in (0, 1)$, например $\hat{x} = 1/2$, образуют подпространство $\mathbb{L}_{\delta, m}$ в $\mathbb{C}^{2n}$, которое при $\delta \to 0$ стремится в $\mathbb{C}G(2n, n)$ к соответствующему подпространству $\mathbb{L}_{0, \infty}$ задачи $T(0, \infty)$. Предположим противное. Тогда, в силу компактности $\mathbb{C}G(2n, n)$, для некоторой последовательности $\{\delta_k\}$, $\delta_k \to 0$, подпространства $\mathbb{L}_{\delta_k, m}$ будут стремиться к некоторому $\mathbb{L}' \in \mathbb{C}\, G(2n, n)$, $\mathbb{L}' \neq \mathbb{L}_{0,\infty}$. Из асимптотических свойств решений (см. [5, гл. III, упр. 35]) следует, что для любого $\mathbb{L} \in \mathbb{C}G(2n, n)$, $\mathbb{L} \neq \mathbb{L}_{0,\infty}$, существуют решения $y(\cdot)$ системы (1) такие, что $y(\hat{x}) \in \mathbb{L}$ и для них угловое расстояние $y(x)$ до $\widetilde{\mathbb{L}}_+$ либо вообще не стремится к нулю при $x \to 0$, либо имеет порядок $(1/\ln x)^q$, где q натуральное. Если $V \subset \mathbb{C}G(2n, n)$ – такая окрестность, что $\mathbb{L}' \in V$, $\mathbb{L}_{0,\infty} \notin \overline{V}$, то числовой множитель при $(1/\ln x)^q$ может быть отделен от нуля равномерно по $\mathbb{L} \in V$. При $k \to \infty$, начиная с некоторого $k = K_V$, будет $\mathbb{L}_{\delta_k, m} \in V$, и это противоречит тому, что угловое расстояние краевого условия задачи $T(\delta, m)$ от $\widetilde{\mathbb{L}}_+$ есть $O(\delta)$.

Автор благодарен Н. Б. Конюховой и В. Б. Лидскому за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
2. *Абрамов А. А., Конюхова Н. Б., Парийский Б. С. и др.* Численные исследования свободных и вынужденных колебаний в сжимаемой среде замкнутых упругих моментных оболочек вращения//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 5. С. 747—764.
3. *Абрамов А. А., Конюхова Н. Б., Курочкин С. В., Парийский Б. С., Приходько В. Ю.* Численные исследования осесимметричных свободных колебаний в вакууме и возбуждения в сжимаемой среде вытянутой цилиндрической оболочки с полусферическими торцами//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 10. С. 1550—1580.
4. *Abramov A. A. et al.* Numerical segregation of the bounded solutions for systems of ordinary differential equations//Colloguia Math. Soc. Janos Bolyai 15. Different. equations. Keszthely (Hungary): Nort-Holland Publ., 1975. P. 17—26.
5. *Коддингтон Э., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
6. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
7. *Абрамов А. А.* О поведении граничных условий, переносимых в окрестности регулярной особой точки//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 4. С. 901—908.
8. *Абрамов А. А.* О граничных условиях в особой точке для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 1. С. 275—278.
9. *Курочкин С. В.* Дискретность спектра линейной двухточечной краевой задачи с условиями ограниченности решения в особых точках//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1995—2000.
10. *Абрамов А. А., Диткин В. В., Конюхова Н. Б. и др.* Вычисление собственных значений и собственных функций обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 5. С. 1155—1173.
11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 26.05.93