

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Курочкин, Свойства банаховых пространств, связанные с проективностью, *Функци. анализ и его прил.*, 1986, том 20, выпуск 1, 75–76

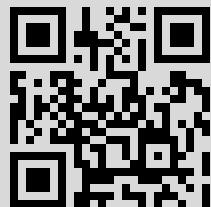
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 193.233.212.50

24 марта 2015 г., 13:48:51



## СВОЙСТВА БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОЕКТИВНОСТЬЮ

С. В. Курочкин

Для категории **Сomp** компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений хорошо известны следующие факты [1]: 1. В **Сomp** существуют проективные объекты. 2. Для каждого объекта  $X$  в **Сomp** существует проективный объект  $P$  и неприводимая сюръекция  $\pi: P \rightarrow X$  (проективное накрытие); эта конструкция единственна в следующем смысле: если  $\psi: P' \rightarrow X$  — другое проективное накрытие, то существует гомеоморфизм  $\chi: P' \rightarrow P$  такой, что  $\psi = \pi \circ \chi$ . 3. Объект  $X$  в **Сomp** проективен  $\Leftrightarrow$ , пространство  $X$  экстремально несвязно.

В настоящей заметке рассматриваются ковариантные аналоги этих утверждений в категории **Ban<sub>1</sub>** банаховых пространств (б. п.) и линейных операторов с нормой  $\leq 1$ . Поле скаляров может быть  $R$  или  $C$ . Слово «подпространство» будет означать: для **Сomp** — замкнутое подпространство, для **Ban<sub>1</sub>** — замкнутое линейное подпространство. Через  $B_X$  обозначается замкнутый единичный шар б. п.  $X$ .

**1. Определение.** Оператор  $A$  из б. п.  $X$  в б. п.  $Y$  называется суперморфизмом, если  $A(B_X) = B_Y$ .

**Замечание.** Термин — из [2], там же соответствующее чисто категорное определение, причем в применении к **Сomp** оно дает обычные сюръекции; операторы из этого класса изучались в [3] под названием «точные фактор-отображения»: в [4] — аналогичное понятие для банаховых модулей. Некоторые из результатов [2—4] и настоящей заметки говорят о том, что этот класс морфизмов в **Ban<sub>1</sub>** естественно рассматривать как двойственный к изометрическим вложениям.

**Определение [2].** Объект  $P$  называется проективным, если для любых объектов  $X, Y$  морфизма  $\varphi: P \rightarrow Y$  и суперморфизма  $\pi: X \rightarrow Y$  существует морфизм  $\psi: P \rightarrow X$  такой, что  $\varphi = \pi \circ \psi$ .

Можно показать, что проективные объекты в **Ban<sub>1</sub>** — это в точности пространства  $l_1(\Gamma)$ . В силу известного результата Гротендика введенное свойство эквивалентно для банаховых пространств свойству метрического лифтинга, или  $(1 + \varepsilon)$ -проективности: для любого оператора  $\varphi: P \rightarrow Y$ , фактор-отображения  $\pi: X \rightarrow Y$  и числа  $\varepsilon > 0$  существует оператор  $\psi: P \rightarrow X$  такой, что  $\|\varphi - \pi \circ \psi\| \leq (1 + \varepsilon) \cdot \|\varphi\|$ . Однако, в отличие от проективности,  $(1 + \varepsilon)$ -проективность не является категорным свойством.

**2. Определение** (абстрактно-категорный вариант в [2]). Оператор  $\pi$  из б. п.  $X$  в б. п.  $Y$  называется неприводимым, если он суперморфизм, и для любого б. п.  $Z$  и оператора  $\varphi: Z \rightarrow X, \|\varphi\| \leq 1$  верно следующее: если  $\pi \circ \varphi$  — суперморфизм, то  $\varphi$  — суперморфизм.

Возникает вопрос: существуют ли неприводимые отображения банаховых пространств, отличные от тождественных?

**Пример:** Пусть  $X$  есть  $R^3$  с нормой  $\sum |x_i|$ ,  $K$  — подпространство  $X$ , натянутое на вектор  $(1, 1, 1)$ . Тогда фактор-отображение  $\pi: X \rightarrow X/K$  неприводимо.

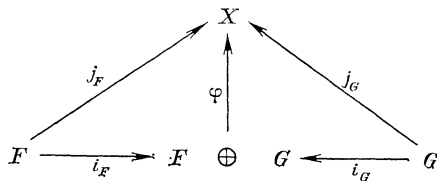
Двойственным к введенному понятию является хорошо известное понятие оболочки банахова пространства.

**Предложение.** Если  $\pi: l_1(\Gamma) \rightarrow X$  неприводимо, то для любого  $\gamma \in \Gamma$   $\pi(e_\gamma)$  есть крайняя точка  $B_X$ .

**Следствия.** У б. п.  $X$  существует проективное накрытие, если и только если каждый вектор из  $B_X$  представим в виде  $\sum c_\alpha x_\alpha$ , где все  $x_\alpha$  — крайние точки  $B_X$  и  $\sum |c_\alpha| = 1$ ; если у данного б. п. проективное накрытие существует, то оно единственно.

Существует пример, показывающий, что сформулированное в следствии условие на  $B_X$  не эквивалентно следующему:  $B_X$  есть замкнутая выпуклая оболочка своих крайних точек.

**3. Подобъект** объекта в **Сomp** или **Ban<sub>1</sub>** — это подпространство в совокупности с естественным вложением (общее определение в [2]). Пусть  $X$  — некоторый объект и  $F, G$  — его подобъекты. Рассмотрим диаграмму:



где  $i_F, i_G, j_F, j_G$  — естественные вложения, а  $\varphi$  — морфизм, делающий диаграмму коммутативной (он существует и единствен по определению прямой суммы). Зафиксируем  $F$  и рассмотрим множество  $\mathcal{K}_F$  подобъектов  $G$  таких, что в диаграмме  $\varphi$ -суперморфизм. В категории  $\text{Comr } \mathcal{K}_F = \{G: F \cup G = X\}$ . Для любых  $X$  и  $F$  в  $\mathcal{K}_F$  есть наименьший (по включению) элемент, а именно  $(X \setminus F)$ , и для экстремальной несвязности, можно дать эквивалентное и уже чисто категорное

**О п р е д е л е н и е.** *Объект  $X$  называется экстремально несвязным, если для любого его подобъекта  $F$  наименьший элемент  $\mathcal{K}_F$  выделяется прямым слагаемым в  $X$ .*

Оказывается, что эти конструкции переносятся в  $\text{Ban}_1$ .

**Т е о р е м а.** *Для любого б. п.  $X$  и любого его подпространства  $F$  в множестве  $\mathcal{K}_F$  есть наименьший элемент.*

Эквивалентная формулировка, не использующая языка категорий, такова: для любого б. п.  $X$  и любого его подпространства  $F$  существует наименьшее среди подпространств  $G$ , обладающих свойством: для любого  $x \in X$  найдутся  $f \in F$  и  $g \in G$  такие, что  $x = f + g$  и  $\|x\| = \|f\| + \|g\|$ .

Эта теорема позволяет формально определить в  $\text{Ban}_1$  «экстремально несвязность», и она будет обладать рядом естественных свойств, в частности, как и в  $\text{Co pr}$ , имеет место

**П р е д л о ж е н и е.** *Прямая сумма произвольного семейства экстремально несвязных пространств экстремально несвязна.*

Отсюда следует, что пространства  $I_1(\Gamma)$  «экстремально несвязны». Однако существуют и другие «э. н.» б. п., например все двумерные и все строго выпуклые б. п. Среди трехмерных б. п. есть уже не «э. н.». Таким образом, введенное понятие нетривиально в  $\text{Ban}_1$ , но, в отличие от  $\text{Comr}$ , не является внутренней характеристикой проективности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gleason A. M. — Illinois J. Math., 1958, v. 2, № 4A, p. 482—483.
2. Semadeni Z. Banach spaces of continuous functions. — Warszawa: PWN, 1971.
3. Amir D., Arbel B. — Israel J. Math., 1973, v. 15, № 3, p. 301—310.
4. Graven A. — Proc. Konf. Ned. Akad. Wetensch., 1979, v. 82, Ser. A, № 3, p. 253—272.

Вычислительный центр  
АН СССР

Поступило в редакцию  
21 мая 1985 г.