С. В. Курочкин, Свойства банаховых пространств, связанные с проективностью, *Функц. анализ и его прил.*, 1986, том 20, выпуск 1, 75–76

Функциональный анализ и его приложения,
1986, т. 20, вып. 1, 75—76

УДК 513.88

СВОЙСТВА БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОЕКТИВНОСТЬЮ

С. В. Курочкин

Для категории **Comp** компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений хорошо известны следующие факты [1]: 1. В **Comp** существуют проективные объекты. 2. Для каждого объекта X в **Comp** существует проективный объект P и неприводимая сюръекция π: $P \to X$ (проективное накрытие); эта конструкция единственна в следующем смысле: если ψ: $P' \to X$ — другое проективное накрытие, то существует гомеоморфизм χ: $P' \to P$ такой, что $\psi = \pi \circ \chi$. 3. Объект X в **Comp** проективен $\Leftrightarrow$, пространство X экстремально несвязно.

В настоящей заметке рассматриваются ковариантные аналоги этих утверждений в категории $\mathbf{Ban_1}$ банаховых пространств (б. п.) и линейных операторов с нормой $\leqslant 1$. Полем скаляров может быть R или C. Слово «подпространство» будет означать: для **Comp** — замкнутое подпространство, для Ban_1 — замкнутое линейное подпространство. Через B_X обозначается замкнутый единичный шар б. п. X.

1. Определение. *Оператор A из б. п. X в б. п. Y называется суперморфизмом, если* $A\ (B_X) = B_Y$.

Замечание. Термин — из [2], там же соответствующее чисто категорное определение, причем в применении к **Comp** оно дает обычные сюръекции; операторы из этого класса изучались в [3] под названием «точные фактор-отображения»: в [4] — аналогичное понятие для банаховых модулей. Некоторые из результатов [2—4] и настоящей заметки говорят о том, что этот класс морфизмов в $\mathbf{Ban_1}$ естественно рассматривать как двойственный к изометрическим вложениям.

Определение [2]. *Объект P называется проективным, если для любых объектов X, Y морфизма φ: $P \to Y$ и суперморфизма π: $X \to Y$ существует морфизм ψ: $P \to X$ такой, что $\varphi = \pi \circ \psi$.*

Можно показать, что проективные объекты в $\mathbf{Ban_1}$ — это в точности пространства $l_1\ (\Gamma)$. В силу известного результата Гротендика введенное свойство эквивалентно для банаховых пространств свойству метрического лифтинга, или $(1 + \varepsilon)$-проективности: для любого оператора φ: $P \to Y$, фактор-отображения π: $X \to Y$ и числа $\varepsilon > 0$ существует оператор ψ: $P \to X$ такой, что $\varphi = \pi * \psi$ и $\| \psi \| \leqslant (1 + \varepsilon) \cdot \| \varphi \|$. Однако, в отличие от проективности, $(1 + \varepsilon)$-проективность не является категорным свойством.

2. Определение (абстрактно-категорный вариант в [2]). *Оператор π из б. п. X в б. п. Y называется неприводимым, если он суперморфизм, и для любого б. п. Z и оператора φ: $Z \to X$, $\| \varphi \| \leqslant 1$ верно следующее: если $\pi \circ \varphi$ — суперморфизм, то φ — суперморфизм.*

Возникает вопрос: существуют ли неприводимые отображения банаховых пространств, отличные от тождественных?

Пример: Пусть X есть R^3 с нормой $\sum | x_i |$, K — подпространство X, натянутое на вектор $(1, 1, 1)$. Тогда фактор-отображение π: $X \to X/K$ неприводимо.

Двойственным к введенному понятию является хорошо известное понятие оболочки банахова пространства.

Предложение. *Если π: $l_1\ (\Gamma) \to X$ неприводимо, то для любого $\gamma \in \Gamma$ $\pi\ (e_\gamma)$ есть крайняя точка B_X.*

Следствия. *У б. п. X существует проективное накрытие, если и только если каждый вектор из B_X представим в виде $\sum c_\alpha x_\alpha$, где все x_α — крайние точки B_X и $\sum | c_\alpha | = 1$; если у данного б. п. проективное накрытие существует, то оно единственно.*

Существует пример, показывающий, что сформулированное в следствии условие на B_X не эквивалентно следующему: B_X есть замкнутая выпуклая оболочка своих крайних точек.

3. *Подобъект* объекта в **Comp** или $\mathbf{Ban_1}$ — это подпространство в совокупности с естественным вложением (общее определение в [2]). Пусть X — некоторый объект и F, G — его подобъекты. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & & X & & \\
 & & & & \\
F \arrow[uurr, "j_F"] \arrow[r, "i_F"'] & F \oplus G \arrow[uur, phantom] & & G \arrow[l, phantom] & \\
\end{tikzcd}$$

где i_F, i_G, j_F, j_G — естественные вложения, а φ — морфизм, делающий диаграмму коммутативной (он существует и единствен по определению прямой суммы). Зафиксируем F и рассмотрим множество $\mathcal{K}_F$ подобъектов G таких, что в диаграмме φ-суперморфизм. В категории **Comp** $\mathcal{K}_F = \{G\colon F \cup G = X\}$. Для любых X и F в $\mathcal{K}_F$ есть наименьший (по включению) элемент, а именно $(\overline{X \setminus F})$, и для экстемальной несвязности можно дать эквивалентное и уже чисто категорное

Определение. *Объект X называется экстремально несвязным, если для любого его подобъекта F наименьший элемент $\mathcal{K}_F$ выделяется прямым слагаемым в X.*

Оказывается, что эти конструкции переносятся в $\mathbf{Ban}_1$.

Теорема. *Для любого б. п. X и любого его подпространства F в множестве $\mathcal{K}_F$ есть наименьший элемент.*

Эквивалентная формулировка, не использующая языка категорий, такова: *для любого б. п. X и любого его подпространства F существует наименьшее среди подпространств G, обладающих свойством: для любого $x \in X$ найдутся $f \in F$ и $g \in G$ такие, что $x = f + g$ и $\|x\| = \|f\| + \|g\|$.*

Эта теорема позволяет формально определить в $\mathbf{Ban}_1$ «экстремальную несвязность», и она будет обладать рядом естественных свойств, в частности, как и в **Comp**, имеет место

Предложение. *Прямая сумма произвольного семейства экстремально несвязных пространств экстремально несвязна.*

Отсюда следует, что пространства $l_1(\Gamma)$ «экстремально несвязны». Однако существуют и другие «э. н.» б. п., например все двумерные и все строго выпуклые б. п. Среди трехмерных б. п. есть уже не «э. н.». Таким образом, ввведенное понятие нетривиально в $\mathbf{Ban}_1$, но, в отличие от **Comp**, не является внутренней характеристикой проективности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gleason A. M.*— Illinois J. Math., 1958, v. 2, № 4A, p. 482—483. 2. *Semadeni Z.* Banach spaces of continuous functions.— Warszawa: PWN, 1971. 3. *Amir D.*, *Arbel B.*— Israel J. Math., 1973, v. 15, № 3, p. 301—310. 4. *Graven A.*— Proc. Konf. Ned. Akad. Wetensch., 1979, v. 82, Ser. A, № 3, p. 253—272.

Вычислительный центр
АН СССР

Поступило в редакцию
21 мая 1985 г.