УДК 519.624

О НУМЕРАЦИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. В. Курочкин

(119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)

e-mail: kuroch@ccas.ru

Поступила в редакцию 02.08.2013 г.

Для самосопряженных спектральных краевых задач для линейных гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследуется вопрос о нумерации собственных значений, которая была бы инвариантна относительно гладких изменений параметров задачи. Библ. 11.

Ключевые слова: линейная гамильтонова система, краевая задача, собственные значения, нумерация собственных значений.

DOI: 10.7868/S0044466914030119

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обобщение классических осцилляционных теорем Штурма для уравнений Штурма–Лиувилля на более общие классы самосопряженных краевых задач является предметом многочисленных исследований. При этом уже в случае уравнений 4-го порядка (в частности в задаче об изгибных колебаниях стержня), в зависимости от краевых условий и ограничений на коэффициенты уравнения, задача обнаруживает значительное разнообразие и сложность осцилляционных свойств (см., например, [1]).

Наиболее общим видом самосопряженной краевой задачи, описывающей собственные колебания консервативной системы, распределенной в одном пространственном измерении, является запись в виде линейной гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [2]):

$$Jy' = [A(x) + \lambda Q(x)]y, \tag{1.1}$$

где y – вектор-функция аргумента x, y: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$, коэффициенты A, Q – вещественные $2m \times 2m$-матричные функции, непрерывные на $[a, b]$ и симметричные при всех значениях аргумента, J – матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 & -E^m \\ E^m & 0 \end{pmatrix},$$

E^m – единичная $m \times m$-матрица.

Предполагается, что $Q(x) \geq 0$ и

$$\int_a^b y^{\mathrm{T}}(x)Q(x)y(x)dx > 0 \tag{1.2}$$

для любого нетривиального решения уравнения (1.1). Условие (1.2) введено в [2] как условие определенности и выполнено в физически осмысленных задачах.

В части краевых условий ограничимся далее практически важным случаем разделенных краевых условий, т.е. условий вида

$$\psi_a y(a) = \psi_b y(b) = 0, \tag{1.3}$$

где ψ_a, ψ_b – $m \times 2m$-матрицы полного ранга, $\psi_a J\psi_a^{\mathrm{т}} = \psi_b J\psi_b^{\mathrm{т}} = 0$ (условие самосопряженности краевых условий). В виде (1.1), (1.3) могут быть записаны классическая и матричная задачи Штурма–Лиувилля, самосопряженная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения произвольного (четного) порядка, задачи о продольных и изгибных колебаниях стержней, об осесимметричных колебаниях оболочек и др.

В отношении систем (1.1), (1.3) имеются многочисленные глубокие результаты (см. [2]–[8]), где устанавливается связь между суммарным количеством собственных значений, лежащих в заданном интервале, и свойствами осцилляции траектории переноса одного из краевых условий (1.3) по соответствующему многообразию Грассмана посредством уравнения (1.1). (Представляется, что ключевой результат получен в [3], но он не сформулирован в терминах собственных значений, потому что автор исследовал эволюционные уравнения, а не краевые задачи.)

Предметом исследования в настоящей работе является нумерация собственных значений задачи типа (1.1), (1.3). Поскольку спектр несингулярной задачи является дискретным, в силу самосопряженности – вещественным, то вопрос о нумерации обычно решается стандартным образом – собственные значения упорядочиваются по возрастанию (с учетом их кратности). Постановка задачи о подсчете общего количества собственных значений в заданном интервале вполне соответствует такому пониманию. В некоторых из указанных выше работ нумерация по порядку используется напрямую, в других ([7], [9]) вводится дополнительная конструкция "номера" собственного значения в терминах осцилляционных свойств траекторий прогонки. Во всех случаях сохраняется свойство: если одно собственое значение больше другого, то у него больше номер. Однако, как это замечено в [10, II.5.2, II.6.4], для случая линейно-алгебраических задач, естественное упорядочение собственных значений не всегда удобно: если конкретная спектральная задача рассматривается не сама по себе (т.е. с окончательно заданными числовыми значениями параметров), а как описание класса физических задач, могущих отличаться значениями параметров при неизменной конструкции системы, то простое упорядочение обычно приводит к недифференцируемой зависимости собственных частот от параметров. В то же время в некоторых случаях удается ввести такую нумерацию, при которой каждое собственное значение с фиксированным номером зависит от параметров задачи дифференцируемым образом. Добавим также, что такая "гладкая" нумерация (когда она возможна) оказывается более естественной и с той точки зрения, что она сохраняет (при изменении параметров системы) осцилляционные свойства собственных функций.

В настоящей работе эти вопросы исследуются применительно к классу спектральных задач (1.1), (1.3). Результаты – как в части положительных утверждений, так и по смыслу контрпримеров – оказываются во многом аналогичными линейно-алгебраическому случаю.

Прежде чем формулировать общие результаты, проанализируем конкретный пример, вполне иллюстрирующий явление и требуемую конструкцию. Рассмотрим векторную систему типа Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} y_1'' &= \gamma(y_1 - y_2) - \lambda y_1, \\ y_2'' &= -\gamma(y_1 - y_2) - \lambda y_2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

с краевыми условиями Дирихле

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = y_2(\pi) = 0. \tag{1.5}$$

Можно интерпретировать ее как описывающую колебание системы, состоящей из двух параллельно натянутых одинаковых однородных струн с натянутой между ними анизотропной пленкой с поперечной жесткостью $\gamma > 0$.

Физически естественная нумерация собственных значений задачи (1.4), (1.5) дает две серии:

$$\lambda_n^{(1)} = n^2, \quad \lambda_n^{(2)} = n^2 + 2\gamma, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Каждое из пронумерованных (в данном случае, двумя индексами) собственных значений гладко зависит от (в данном случае единственного) физического параметра γ. Соответствующие собственные функции обладают ясными и инвариантными при изменениях γ осцилляционными свойствами: для первой серии – синхронные однонаправленные колебания обеих струн, для второй – синхронные колебания в противоположные стороны, количество узлов внутри отрезка $[0, \pi]$ равно $n-1$. В то же время при "обычной" нумерации собственных значений, т.е. по порядку, при изменении параметра γ при прохождении через кратное значение они испытывают изломы, а собственные функции – скачкообразные перестановки.

2. ВОЗМОЖНОСТИ ДЛЯ НУМЕРАЦИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Основной результат будет доказан в следующем дополнительном предположении относительно способа вхождения спектрального параметра λ: существует подмножество координат $i_1, \ldots, i_s$, $0 < s \le 2m$, такое что для всех $x \in [a, b]$ подматрица $Q(x)$, расположенная в строках и столбцах с номерами $i_1, \ldots, i_s$, положительно определена, а все прочие элементы $Q(x)$ равны нулю. Соответствующее подпространство в $\mathbb{R}^{2m}$ будет далее обозначаться через L. Данное предположение выполнено для всех упомянутых выше физических систем.

Теорема 1 (ср. [10], Теорема II.6.8). *Пусть коэффициенты системы* (1.1) *являются непрерывно дифференцируемыми функциями вещественного параметра* $\mu \in [\alpha, \beta]$. *Тогда существует счетное*[1] *семейство непрерывно дифференцируемых функций от аргумента* μ, *которые представляют полный набор собственных значений задачи* (1.1), (1.3).

Доказательство. Используется переход к интегральному уравнению с помощью функции Грина (см., например, [2, § 9.4]). Не ограничивая общности, можно считать, что 0 не является собственным значением задачи (1.1), (1.3). Тогда, с учетом (1.2), система (1.1), (1.3) эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \tau) Q(\tau) y(\tau) d\tau \tag{2.1}$$

(G и Q зависят также от параметра μ) или, в обозначениях

$$u(x) = Q^{1/2}(x) y(x), \quad K(x, \tau) = Q^{1/2}(x) G(x, \tau) Q^{1/2}(\tau),$$

где $Q^{1/2}$ – неотрицательный корень из неотрицательной матрицы Q, уравнению

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, \tau) u(\tau) d\tau. \tag{2.2}$$

Ввиду компактности интегрального оператора K, учитывая, что $\lambda \ne 0$, собственные значения, даже в кратном случае, могут быть представлены в виде набора непрерывно дифференцируемых функций параметра μ (см. [10, § IV.3.5], по существу, это конечномерный и нетривиальный факт, результат принадлежит Реллиху, см. [10, Теорема II.6.8]).

Замечание 1. Конструкция доказательства сходна с примененной в [11] для случая одного уравнения 4-го порядка. Существенное отличие состоит в том, что в общем случае системы (1.1) с матрицей Q неполного ранга (что обычно имеет место в реальных задачах) требуется переход к подпространству.

Замечание 2. Доказанное утверждение неявно содержит один из возможных способов нумерации собственных значений. Именно, устраивая гладкую гомотопию по μ, переводящую $A(x)$ в тождественно нулевую матрицу, а $Q(x)$ – в E_L: $A(x, \mu) = (1-\mu)A(x)$, $Q(x, \mu) = (1-\mu)Q(x) + \mu E_L$, можно установить нумерацию собственных значений, состоящую из нескольких полубесконечных ($j_{(k)} \in \mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, p$) и нескольких бесконечных в обе стороны ($j_{(k)} \in \mathbb{Z}$, $k = p+1, \ldots, p+q$) серий. Структура множества номеров, т.е. значения p, q, будет определяться размерностью L и расположением координат $i_1, \ldots, i_s$ в множестве $1, \ldots, 2m$. Однако, как это видно уже на примере изгибных колебаний стержня, такая гомотопия может не соответствовать физическому смыслу задачи.

Теорема 2. *Существуют системы, вида* (1.1), (1.3), *непрерывно дифференцируемо зависящие от двух вещественных параметров, которые не допускают дифференцируемой нумерации собственных значений.*

[1] Непустота, дискретность, бесконечность спектра и отсутствие конечных предельных точек следуют из сделанных предположений.

Пример (использована идея примера II.5.12 из [10]). Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} y_1'' &= (\mu-\lambda)y_1 + \nu y_2, \\ y_2'' &= \nu y_1 + (-\mu-\lambda)y_2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

с краевыми условиями (1.5). При $\mu = \nu = 0$ число $\lambda = 1$ является двукратным собственным значением. При малых μ, ν соответствующие возмущенные собственные значения имеют вид $1 \pm \pm \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$ и не могут быть представлены в виде двух дифференцируемых функций аргументов μ, ν.

3. ВЫВОДЫ, ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

Была исследована возможность нумерации собственных значений краевых задач для линейных гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которая бы сохраняла дифференцируемую зависимость от параметров задачи. Полученные результаты — как положительные, так и отрицательные — свидетельствуют о том, что положение дел здесь аналогично тому, что имеет место в линейно-алгебраической задаче на собственные значения для вещественных симметрических матриц. Без дополнительных предположений было бы неестественно ожидать для краевых задач (с вхождением спектрального параметра через матрицу неполного ранга) более благоприятной картины, чем в алгебраическом случае со стандартным (через единичную матрицу) вхождением спектрального параметра. Таким образом, в принятых общих предположениях полученные результаты можно рассматривать как окончательные.

В то же время для конкретных классов краевых задач, включающих нескольких физических параметров, в отношении нумерации собственных значений может наблюдаться более простая картина, чем в общем случае. Такие конкретные классы задач могут быть предметом исследования. В качестве подтверждающего примера рассмотрим модификацию примера (1.4), (1.5), где допускается, что линейная плотность каждой из струн, оставаясь постоянной по x, является переменным параметром, т.е. систему

$$\begin{aligned} y_1'' &= \gamma(y_1 - y_2) - \lambda\rho_1 y_1, \\ y_2'' &= -\gamma(y_1 - y_2) - \lambda\rho_2 y_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

с теми же краевыми условиями.

Собственные значения λ задачи (3.1), (1.5) определяются из двух серий соотношений

$$F_\pm(\gamma, \rho_1, \rho_2, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\lambda(\rho_1+\rho_2) - 2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 + \lambda^2(\rho_1-\rho_2)^2}\right)/2 = n^2, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.2}$$

Прямая проверка показывает, что в случае двукратного собственного значения, т.е. когда одно из значений из серии “+” совпадает с одним из значений серии “−” (с различными n), градиенты в соответствующей точке функций F_+ и F_- неколлинеарны (это видно на частных производных по ρ_1 и ρ_2). Таким образом, в окрестности двукратных точек (такие будут существовать при достаточно большом γ) собственные значения разных серий при изменении параметров гладко проходят друг сквозь друга. Нумерация двумя сериями номеров подтверждается осцилляционными свойствами нормальных форм колебаний: при $n - 1$ нулях на $[0, \pi]$ (узлы у компонент y_1 и y_2 общие) для собственных функций серии “+” будет

$$\int_a^b y_1(x)y_2(x)dx < 0,$$

для “−”:

$$\int_a^b y_1(x)y_2(x)dx > 0.$$

Последнее можно установить по знакам компонент собственных векторов матрицы в правой части (3.1).

Таким образом, на области изменения параметров $\gamma \geq 0$, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$ в задаче возможна нумерация собственных значений двумя сериями номеров так, что:

– внутри каждой из серий значения следуют по порядку номеров, а из разных серий могут располагаться друг относительно друга по разные стороны или совпадать в зависимости от значений параметров;

– каждое $\lambda_n^{(+)}$ и $\lambda_n^{(-)}$, непрерывно дифференцируемо по совокупности параметров;

– то же верно для соответствующих собственных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ben Amara J.* Sturm theory for the equation of vibrating beam // J. Math. Anal. Appl. 2009. V. 349. P. 1–9.
2. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
3. *Арнольд В.И.* О характеристическом классе, входящем в условие квантования // Функц. анализ и его прил. 1967. Т. 1. Вып. 1. С. 1–14.
4. *Арнольд В.И.* Теоремы Штурма и симплектическая геометрия // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 85. Вып. 4. С. 1–9.
5. *Абрамов А.А.* Об отыскании собственных значений и собственных функций самосопряженной дифференциальной задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 6. С. 819–831.
6. *Greenberg L., Prüfer A.* Method for calculating eigenvalues of self-adjoint systems of ordinary differential equations. University of Maryland Technical Report TR91-24, 1991. www.math.umd.edu/lng/prufer1.ps
7. *Абрамов А.А., Ульянова В.И., Юхно Л.Ф.* Об индексе краевой задачи для однородной гамильтоновой системы дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 2009. Т. 49. № 3. С. 490–497.
8. *Абрамов А.А., Ульянова В.И., Юхно Л.Ф.* Определение номера собственного значения сингулярной нелинейной самосопряженной спектральной задачи для линейной гамильтоновой системы дифференциальных уравнений // Дифференц. ур-ния. 2011. Т. 47. № 8. С. 1099–1104.
9. *Абрамов А.А.* О вычислении собственных значений нелинейной спектральной задачи для гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 2001. Т. 41. № 1. С. 29–38.
10. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
11. *Janczewski S.* Oscillation theorems for the differential boundary value problems of the fourth order // Ann. of Math. 1928. V. 29. P. 521–542.