ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
ИМ. А.А.ДОРОДНИЦЫНА РАН

ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ.А.А.ДОРОДНИЦЫНА
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
МОСКВА 2013

Ответственные редакторы

доктор физ.-матем. наук С.Я.Степанов,
канд. физ.-матем. наук А.А.Буров,
канд. физ.-матем. наук И.Ф.Кожевников

В сборник включены статьи, посвященные исследованию взаимодействия точильного камня и затачиваемого инструмента, математическим основам исключения гравитации в неинерциальных системах отсчета, рационального экономического поведения, устойчивости предельно-периодических движений интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра и невозможности чистого скатывания вниз диска по кривой при наличии кулоновского трения.

Работа публикуется в авторской редакции.

Рецензенты: И.И. Косенко,
А.Д.Герман

Научное издание

УДК 531.01

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА ГЛАВНОМ РАССЛОЕНИИ. ГАЛИЛЕЕВСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ИСКЛЮЧЕНИЕ ГРАВИТАЦИИ*

Д.П.Шевалльe †

Для уравнений движения, справедливых для деформируемых систем и полученных из вариационного принципа Гамильтона в рамках общего формализма главного расслоения, получены условия инвариантности относительно перехода к другой галилеевской системе отсчета. Показано, что эти условия также достаточны для того, чтобы обеспечить исключение гравитационных сил в системе отсчета, совершающей ускоренное движение, что указывает на примечательную связь. В этой публикации осуществляется распространение на деформируемые системы результатов, полученных в [1] для твердого тела, и дополняются результаты, полученные в общем контексте работ [2, 3].

Ключевые слова: деформируемые механические системы, главное расслоение, связность, безразличие по отношению к выбору системы отсчета, исключение гравитации.

1. Введение. Заслуживает внимания то, что принцип независимости сил инерции от выбора системы отсчета, или принцип «объективности», обсуждался в литературе. Конечно, если разрешена произвольная замена системы отсчета, то, будучи

---

* перевод А.А.Бурова

† Ecole nationale des ponts et chaussées, Laboratoire Navier et Université Paris-Est, 6-8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, 77455 Marne-la-Vallée, France. e-mail: fdchevallier@yahoo.fr

строго ограниченным своим общим видом $\mathrm{f} = \dfrac{d}{dt}m\mathbf{v}$, второй закон Ньютона в динамике частицы проявляется как закон, зависящий от выбора системы отсчета. Однако так как все остальные силы являются объективными величинами (см., например, работы Нолля [4, 5]), то «необъективность» лишь только сил инерции привела бы к противоречиям в законах механики. Пристальное изучение этого предмета нуждается в более тщательном анализе.

В [1] было показано, что принцип объективности, примененный к силам инерции, оказывается достаточным, чтобы придать математическую форму классическим уравнениям Ньютона - Эйлера в динамике твердых тел, а не только в динамике частиц. Математические рамки, позволяющие осуществить такой вывод, родственны тем, что использовались В.И.Арнольдом в [6]. Такой подход также эффективен в практических приложениях в задачах динамики многих тел, см. [7]. Эта позиция основывается на более или менее произвольной модели твердого тела, рассматриваемого как совокупность частиц. Она опирается на более слабые предположения, сводящиеся к следующему:

i) Конфигурационное пространство $\mathbb{S}$ твердого тела – это главное однородное пространство группы Ли $\mathbb{D}$. Это означает, что группа $\mathbb{D}$ действует *свободно и транзитивно* на пространстве $\mathbb{S}$ ($\mathbb{D}$ – это «группа перемещений», на практике она будет евклидовой группой в размерности три).

ii) Соотношение между скоростью и моментом тела определено изоморфизмом $\mathcal{H}\colon T\mathbb{S} \to T^*\mathbb{S}$ касательного векторного расслоения на кокасательное векторное расслоение пространства $\mathbb{S}$, которое инвариантно относительно поднятых действий группы $\mathbb{D}$ на $T\mathbb{S}$ и $T^*\mathbb{S}$ ($\mathcal{H}(g.\boldsymbol{v}) = g.\mathcal{H}(\boldsymbol{v})$, где $g \in \mathbb{D}$).

iii) Силы инерции представляют собой объективные величины, определенные по отношению к произвольной системе отсчета. По отношению к галилеевским, а не к произвольным системам отсчета их значение равно взятой со знаком минус производной по времени от момента сообразно канонической связности ∇ пространства $\mathbb{S}$.

Свойство i) лишь переносит понятие «жесткости». Оно определяет дифференциальную геометрию на пространстве $\mathbb{S}$ переносом геометрии на группе Ли $\mathbb{D}$. Этого оказывается достаточно для того, чтобы определить структуру многообразия на пространстве $\mathbb{S}$ с помощью условия, согласно которому для произвольного выбора r в пространстве $\mathbb{S}$ («исходного положения тела») биекция $g \mapsto g.\mathrm{r}$ из группы $\mathbb{D}$ в пространство $\mathbb{S}$ является изоморфизмом. Геометрия пространства $\mathbb{S}$ не зависит от этого выбора и позволяет представить всю кинематику твердых тел, включая эффекты, связанные с заменой системы отсчета, в свободном от координат виде безотносительно к его начальному положению. В частности, *каноническая связность* ∇ на пространстве $\mathbb{S}$, упоминаемая в iii), соответствует правоинвариантной связности Картана группы $\mathbb{D}$ и определена внутренним образом.

Свойство ii) просто означает, что отношение между скоростью и моментом – это «объект», связанный с телом и что для фиксированного положения тела это отношение линейно. Эквивалентное выражение ii) выводит на передний план «обобщенный тензор инерции», выглядящий как «бинор инерции», преобразующий «кинематические моторы» в «моторы количества движения» и введенный Ф.М.Диментбергом в винтовом исчислении как отображение $s \mapsto H_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathcal{L}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}^*)$ такое, что

$$\text{для всех } s \in \mathbb{S} \text{ и всех } g \in \mathbb{D}\text{: } H_{g.s} = \mathrm{Ad}^*g \circ H_s \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}, \quad (1.1)$$

где $\mathfrak{d}$ – алгебра Ли группы Ли $\mathbb{D}$, Ad и Ad^* – присоединенное и коприсоединенное представления группы $\mathbb{D}$ в алгебре $\mathfrak{d}$.

Всякое определение математической формы операторов H_s (или операторов $\mathcal{H}$) приводит к принципу объективности: согласно iii), в галилеевской системе отсчета вдоль движения $t \mapsto s(t)\,(\in \mathbb{S})$ момент, определяемый соотношением $t \mapsto \mathcal{H}(\boldsymbol{v}(t))\,(\in T^*\mathbb{S})$, и сила инерции $\mathcal{J}(t)$ связаны соотношением

$$\mathcal{J}(t) = -\frac{\nabla}{dt}\,\mathcal{H}\big(\boldsymbol{v}(t)\big), \qquad \forall \boldsymbol{v}(t) = \frac{d}{dt}\,s(t)\,(\in T\mathbb{S}).$$

В [1] доказано, что *существование объективной величины, удовлетворяющей условию iii), эквивалентно следующему общему свойству операторов H_s*:

$$\forall s \in \mathbb{S}, \quad \forall U \in \mathfrak{t}, \quad \forall V \in \mathfrak{d}: \quad C_s(U,V) = 0, \tag{1.2}$$

где билинейное отображение $C_s\colon \mathfrak{d} \times \mathfrak{d} \to \mathfrak{d}^*$ определено как

$$C_s(X,Y) = \mathrm{ad}^*X.H_s(Y) + \mathrm{ad}^*Y.H_s(X)] + H_s\big([X,Y]\big).$$

(ad и ad^* – присоединенное и коприсоединенное представления алгебры Ли $\mathfrak{d}$ в $\mathfrak{d}$ и в $\mathfrak{d}^*$, так что $\mathrm{ad}\,X.Y = [X,Y]$, где $[\cdot,\cdot]$ – скобка Ли алгебры Ли $\mathfrak{d}$, $\mathrm{ad}^*X = -{}^t\mathrm{ad}\,X$).

Когда, как это имеет место в евклидовой группе в размерности 3, алгебра Ли $\mathfrak{d}$ оснащена невырожденным, Ad-инвариантным внешним произведением, эта алгебра Ли $\mathfrak{d}$ и ее двойственное пространство $\mathfrak{d}^*$ могут быть отождествлены. В этом случае момент представлен с помощью операторов $H_s \in \mathcal{L}(\mathfrak{d})$ и C_s становится отображением $C_s\colon \mathfrak{d} \times \mathfrak{d} \to \mathfrak{d}$:

$$C_s(X,Y) = [X, H_s(Y)] + [Y, H_s(X)] + H_s\big([X,Y]\big).$$

Наконец, в [1] доказано, что *в случае, когда группа Ли $\mathbb{D}$ – обычная евклидова группа в размерности, то свойство (1.2) определяет математическую структуру симметрических* [1] *опера-*

[1]т.е. $\langle H_s(X), Y\rangle = \langle H_s(Y), X\rangle$. Несимметричные операторы зависят еще от одного вещественного параметра, см. [1].

торов H_s и они с необходимостью – те самые операторы механики Ньютона - Эйлера, определенные полной массой, центром масс и тензором инерции. Свойства, такие как теорема Кёнига, включены в (1.1) и, в конечном итоге, вся классическая механика твердого тела выводится из i), ii), iii).

Математические основания описания движения деформируемых тел с точки зрения дифференциальной геометрии изложены в [3], их приложение к механике аффинно-деформируемых тел развито в [2]. Некоторые аспекты, относящиеся к голономии динамической связности изложены в [8, 9]. Вместо i), ii), iii) теперь предполагается:

iv) $(\mathbb{S}, \mathbb{X}, \mathbb{D}, \pi)$ – главное расслоение, где $\mathbb{X} = \mathbb{S}/\mathbb{D}$ – пространство орбит, а $\pi\colon \mathbb{S} \to \mathbb{X}$ – каноническая проекция. (*Иными словами,* $\mathbb{S}$ – многообразие, $\mathbb{D}$ – группа Ли, действие слева которой – дифференцируемое, свободное, собственное, но в общем случае нетранзитивное.)

v) пространство $\mathbb{S}$ оснащено римановой структурой $(\cdot \mid \cdot)$, инвариантной относительно действия группы $\mathbb{D}$.

vi) Основным принципом динамики является принцип Гамильтона.

Группа Ли $\mathbb{D}$ в iv) – это группа, порожденная преобразованиями, сохраняющими форму системы. На практике ею будет евклидова группа перемещений, а $\mathbb{X}$ будет «пространством форм». Предположение v) вводит билинейную дифференциальную форму, ассоциированную с кинетической энергией. Тогда на расслоении $(\mathbb{S}, \mathbb{X}, \mathbb{D}, \pi)$ может быть выведена осмысленная главная связность ∇, так называемая «динамическая связность». Эта связность вводит осмысленным образом неголономные координаты, точнее, компоненты формы связности, расщепляющие кинетическую энергию на энергию движений как твердого тела и энергию деформаций (см. ниже разд. 2.1).

Элементарный закон динамики, основанный на естественном предположении, выглядящем как iii), становится недоступным в данных рамках. В [3] мы прибегали к принципу Гамильтона, чтобы придать смысл тому, как здесь далее будут выведены уравнения движения в виде (2.6). Грубо говоря, первое уравнение управляет деформациями системы, в то время как второе управляет движением «замороженной» системы. Конечно, эти уравнения являются независимыми друг от друга за счет присутствия перекрестных слагаемых, представленных как $(-\nabla_x \mathbf{K}(s)(.)(\mathbf{V}) + \mathbf{J}(s)\,(\mathbf{V}, \mathbf{\Omega}_{\text{г}}(\dot{x}, \cdot))$ и $\nabla_x \mathbf{I}(s)(\dot{x})(\mathbf{V}))$. Эти слагаемые имеют примечательный вид, в который включены динамическая связность и ее кривизна. Однако приемлемые механические модели должны быть не зависящими от системы отсчета, по крайней мере, не зависящими от выбора галилеевской системы отсчета. Однако это свойство не оказывается выполненным автоматически для произвольной римановой структуры на пространстве $\mathbb{S}$ или для произвольного лагранжиана, даже если он имеет как в рассмотренном ниже случае стандартный вид (2.1). Цель настоящей работы состоит в том, чтобы сосредоточить внимание на математических свойствах, обеспечивающих такую инвариантность.

Согласно нашей цели, предположения iv), v), vi) или рассматриваемое ниже уравнение (2.6), относятся к системам, свободно движущимся в пространстве. Появление дополнительных кинематических связей влечет необходимость изменения уравнения (2.6), например, за счет введения множителей Лагранжа или реакций связи в правых частях уравнений. Примечательно, что главенствующие идеи, такие как инвариантность по отношению к действиям групп и использование неголономных переменных, например, $\mathbf{V}$ в (2.1), связаны с так называемыми уравнениями Пуанкаре - Четаева, изложенными в классических работах по аналитической механике (см., например, работу В.В.Румянцева [10], а также публикацию [3]).

В разд. 2 будет доказана теорема 2.2, дающая необходимые и достаточные условия для инвариантности уравнений (2.6) по отношению к заменам галилеевской системы отсчета. Грубо говоря, те условия, которые, с одной стороны, имеют место для замороженных систем, представляют собой не что иное как условие, найденное в [1] для твердого тела. С другой стороны, два условия, присущие именно деформируемым системам, содержат динамическую связность, ассоциированную с римановой структурой v) и ее кривизной.

В разд. 3 будет доказано, что деформируемые системы подчиняются уравнениям движения (2.6), а из условий инвариантности в теореме 2.2 следует «принцип эквивалентности», позволяющий исключить гравитационный эффект за счет соответствующего выбора ускоренно движущейся системы отсчета.

В приложении с целью прояснить связь со знакомыми величинами, имеющими место в общей механике, такими как поле моментов, силовой и кинематический винты, приводятся конкретные представления алгебры Ли $\mathfrak{d}$ и ее подалгебр.

2. Условия Галилеевской инвариантности для уравнений движения деформируемых систем.

Уравнения движения и геометрия главных расслоений. Теория главных расслоений изложена в трактатах по дифференциальной геометрии, например, в [11] или [12, гл. XVI]. В отношении механики, следует отослать читателя к предположениям iv), v), vi) разд. 1, и к [3].

Пусть $\mathbb{D} \times \mathbb{S} \ni (g, s) \mapsto g.s$ – действие слева $\mathbb{D}$ на пространстве $\mathbb{S}$, а $\mathbb{D} \times T\mathbb{S} \ni (g, \boldsymbol{v}) \mapsto g.\boldsymbol{v}$ – поднятое действие $\mathbb{D}$ на касательном пространстве $T\mathbb{S}$. Практично обозначить δs (соответственно δx и так далее) произвольный касательный вектор к многообразию $\mathbb{S}$ (соответственно к пространству $\mathbb{X}$) с началом s (соотв. x).

Горизонтальное подпространство пространства $T_s\mathbb{S}$ для динамической связности определено как ортогональное подпространство к слою s согласно римановой структуре v). Форма связности и ее кривизна обозначены как $\boldsymbol{\omega}$ (принимающая значения в $\mathfrak{d}$ 1-форма) и $\boldsymbol{\Omega}$ (принимающая значения в $\mathfrak{d}$ 2-форма), причем «$\delta s\,(\in T\mathbb{S})$ *горизонтальна* тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\omega}(\delta s) = 0$». Примеры явных вычислений динамических связностей и их кривизн для конкретных механических систем представлены в [2, 9] для аффинно-деформируемых тел и в приложении работы [3] для систем твердых тел.

Горизонтальная и вертикальная составляющие $\delta s \in T\mathbb{S}$ будут обозначены как $\operatorname{hor}\delta s$ и $\operatorname{vert}\delta s$. Если $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{E}$ – дифференцируемое отображение из $\mathbb{S}$ в векторное пространство $\mathbb{E}$, то можно заметить, что $f^T\colon T\mathbb{S} \to T\mathbb{E} \sim \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ – его касательное пространство и $df\colon T\mathbb{S} \to \mathbb{E}$ – его дифференциал ($df(\delta s) = p_2 f^T(\delta s)$); при фиксированном s $df(s)$ обозначает индуцированное отображение $T_s\mathbb{S} \to \mathbb{E}$. Связность позволяет определить ковариантную производную $\nabla f(\delta s) = df(\operatorname{hor}\delta s)$ для $\boldsymbol{v} \in T\mathbb{S}$, представляющую собой не что иное, как дифференциал вдоль касательных векторов из $T\mathbb{S}$. Если $\mathcal{Q}$ – многообразие и $\phi\colon \mathcal{Q} \to \mathbb{S}$, то можно определить $\nabla_q f(\delta q)$, полагая $\nabla_q f(\phi(q))(\delta q) = df(\phi(q))(\operatorname{hor}\partial_q\phi(\delta q))$.

Динамическая связность также может быть охарактеризована горизонтальным поднятием $\Gamma\colon \mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T\mathbb{X} \to T\mathbb{S}$, таким, что $\operatorname{hor}\delta s = \Gamma(s, \delta x)$ при $\delta x = \pi^T(\delta s)$. Тогда $\pi^T\Gamma(s, \delta x) = \delta x$, $\Gamma(g.s, \delta x) = g.\Gamma(s, \delta x)$. Также можно определить ковариантную производную вдоль касательных векторов для базы $\mathbb{X}$ как $\nabla_x f(s)(\delta x) = df\big(\Gamma(s, \delta x)\big)$ для $\delta x \in T_x\mathbb{X}$ с $x = \pi(s)$. Тогда $\nabla_x f(s)(\delta x) = \nabla f(\delta s)$, когда $\delta x = \pi^T(\delta s)$. Надо заметить, что $\nabla_x f$ определена не на $T\mathbb{X}$, а на $\mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T\mathbb{X}$.

Рассмотрим принцип Гамильтона с функцией Лагранжа стандартного вида

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t,\dot s) &= \frac{1}{2}\,(\dot s \mid \dot s) - \Pi(t,s) = \\ &= \frac{1}{2}\,\mathbf{J}(s)(\mathbf{V},\mathbf{V}) + \frac{1}{2}\,\mathcal{J}_{\mathrm{def}}\,(\dot x,\dot x) - \Pi(t,s), \qquad (2.1)\end{aligned}$$

$$\dot s = \frac{ds}{dt}, \quad \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}(\dot s), \quad x = \pi(s), \quad \dot x = \pi^T(\dot s),$$

как вариационный принцип с фиксированными концами на этом расслоении, приводящий к уравнениям Эйлера (2.6), выписанным ниже.

Величина $1/2\,\mathcal{J}_{\mathrm{def}}(\dot x,\dot x) = \mathrm{K}_{\mathrm{def}}$ – кинетическая энергия деформаций, связанная с римановой структурой $\mathcal{J}_{\mathrm{def}}$, корректно определенная на $\mathbb{X}$ благодаря инвариантности действия $\mathbb{D}$ на $\mathbb{S}$. Такое разделение кинетической энергии представляет собой ту самую причину определения динамической связности.

Величина $1/2\,\mathbf{J}(s)(\mathbf{V},\mathbf{V}) = \mathbf{K}(\mathbf{V})$ – кинетическая энергия замороженной системы. Можно определить $\mathbf{I}(s) \in \mathcal{L}(\mathfrak{d},\mathfrak{d}^*)$ как $\mathbf{J}(s)(X,Y) = \langle \mathbf{I}(s).X, Y\rangle$, тогда $\mathbf{J}(s)$ и $\mathbf{I}(s)$ – «ковариантный» и «смешанный тензоры инерции» замороженной системы в конфигурации s.

Рассмотрим $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ как отображения из $\mathbb{S}$ в векторные пространства $\mathcal{L}(\mathfrak{d},\mathfrak{d}^*)$, $\mathcal{L}_2(\mathfrak{d})$, $\mathrm{Q}_2(\mathfrak{d})$ (векторное пространство квадратичных форм на $\mathfrak{d}$). Например, $\nabla\mathbf{K}(s)$ будет отображением $\boldsymbol{v} \mapsto \nabla\mathbf{K}(\boldsymbol{v})$ из $T_s\mathbb{S}$ в $\mathrm{Q}_2(\mathfrak{d})$, и поэтому $\nabla\mathbf{K}(\boldsymbol{v})(X,Y)$ имеет смысл. Эти отображения обладают свойствами инвариантности, к которым мы будем часто обращаться:

$$\begin{gathered}\mathbf{J}(g.s)(X,Y) = \mathbf{J}(s)(\mathrm{Ad}\,g^{-1}.X, \mathrm{Ad}\,g^{-1}.Y), \\ \mathbf{I}(g.s) = \mathrm{Ad}^*g \circ \mathbf{I}(s) \circ \mathrm{Ad}\,g^{-1},\end{gathered} \qquad (2.2)$$

$$d\,\mathbf{J}(\delta s)(X,X) = \nabla\mathbf{J}(\delta s)(X,X) - 2\,\mathbf{J}(s)\left([\boldsymbol{\omega}(\delta s), X], X\right), \qquad (2.3)$$

$$d\mathbf{I}(\delta s) = \mathrm{ad}^*\boldsymbol{\omega}(\delta s) \circ \mathbf{I}(s) - \mathbf{I}(s) \circ \mathrm{ad}\,\boldsymbol{\omega}(\delta s) + \nabla\mathbf{I}(\delta s) \qquad (2.4)$$

$$\forall s \in \mathbb{S},\ \delta s \in T_s\mathbb{S}.$$

С отображением $s \mapsto \mathbf{I}(s)$ связано очень важное отображение $s \mapsto \mathbf{C}(s) \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{d};\mathfrak{d}^*)$, определенное как

$$\mathbf{C}(s)(X,Y) = \mathrm{ad}^*X.\mathbf{I}(s)(Y) + \mathrm{ad}^*Y.\mathbf{I}(s)(X) + \mathbf{I}(s)\big([X,Y]\big),$$

$$s \in \mathbb{S}, \quad X, Y \in \mathfrak{d}.$$

Согласно определению главного расслоения, $\mathbb{S}$ покрыто открытыми подмножествами $\pi^{-1}(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ – открытое подмножество в $\mathbb{X}$ с локальными картами вида $s = g.\mathrm{r}(q) = \varphi(q,g)$, где g и $q = (q_1,\ldots,q_d)$ принадлежат $\mathbb{D}$ и открытому подмножеству $\mathcal{Q}$ пространства $\mathbb{R}^d$, где q_i – координаты, описывающие форму системы $\pi(s)$. По отношению к некоторой системе отсчета принцип Гамильтона, примененный к области $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ и обладающий таким локальным представлением, приводит к уравнениям движения, выписанным в [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\partial_{\dot q}\,\mathrm{K}_{\mathrm{def}} - \partial_q \mathrm{K}_{\mathrm{def}} - \nabla_q \mathbf{K}(s)(\mathbf{V}) + \\ \qquad +\mathbf{J}(s)\left(\mathbf{V}, \mathrm{Ad}\,g.\,\mathbf{\Omega}_{\mathrm{r}}(\dot q,\cdot)\right) = Q - \nabla_q \Pi(t,s), \\ \dfrac{d}{dt}\,\mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) = \mathbf{F} - \pounds\Pi(t,s). \end{cases} \tag{2.5}$$

Пусть $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}$ и $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{r}}$ восстанавливаются с помощью $q \mapsto \mathrm{r}(q)$, например; $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{r}}(\delta q, \delta' q) = \mathbf{\Omega}\big(\mathrm{r}^T(\delta q), \mathrm{r}^T(\delta' q)\big)$. Пусть $\mathbf{K}_{\mathrm{r}}(q) = \mathbf{K}(\mathrm{r}(q))$ – значение на “сечении” $q \mapsto \mathrm{r}(q)$ величины $\mathbf{J}_{\mathrm{r}}(q) = \mathbf{J}(\mathrm{r}(q))$. Если положить $\mathbf{U} = \mathrm{Ad}\,g^{-1}\mathbf{V}$, то формула (2.3) с $\delta s = \partial_q\varphi(q,g)(\delta q) = L_g^T \mathrm{r}^T(q,\delta q)$ приводит к более явному виду, опирающемуся на переменные q, описывающие форму и согласованные с лагранжевым описанием движения:

$$\nabla_q \mathbf{K}(s)(\delta q)(\mathbf{V}) = \partial_q \mathbf{K}_{\mathrm{r}}(q)(\delta q)(\mathbf{U}) + \mathbf{J}_{\mathrm{r}}(q)([\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(\delta q), \mathbf{U}], \mathbf{U}),$$

$$\mathbf{J}(s)\big(\mathbf{V}, \mathrm{Ad}\, g.\, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}(\dot q, \delta q)\big) = \mathbf{J}_{\mathrm{r}}(q)\big(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}(\dot q, \delta q)\big).$$

Пусть $\nabla^{\mathbb{X}}$ обозначает ковариантную производную в связности Леви-Чивита, ассоциированную с римановой структурой $\mathcal{J}_{\mathrm{def}}$ на $\mathbb{X}$. Заметим, что ковариантная производная ∇ в динамической связности и $\nabla^{\mathbb{X}}$ – две совершенно различные операции дифференцирования. Применение к (2.5) классического вычисления из римановой динамики ведет к геометрической интерпретации левых частей уравнений Лагранжа и дает

$$\Big\langle \frac{d}{dt}\partial_{\dot q}\, \mathrm{K}_{\mathrm{def}} - \partial_q \mathrm{K}_{\mathrm{def}}, \delta q\Big\rangle = \mathcal{J}_{\mathrm{def}}\Big(\frac{\nabla^{\mathbb{X}}\dot x}{dt}, \delta x\Big).$$

Нетрудно проверить, что если $\delta x = \pi^T\big(\partial_q\varphi(q,g)(\delta q)\big)$, и определить $\boldsymbol{\Omega}_\Gamma\colon \mathbb{S}\times_{\mathbb{X}}(T\mathbb{X}\times_{\mathbb{X}} T\mathbb{X}) \to \mathfrak{d}$ как $\boldsymbol{\Omega}(\Gamma(s,\xi_1), \Gamma(s,\xi_2))$, где $\times_{\mathbb{X}}$ означает произведение слоев над $\mathbb{X}$, то

$$\begin{aligned} \nabla_q \mathbf{K}(s)(\delta q)(\mathbf{V}) &= \nabla_x \mathbf{K}(s)(\delta x),\\ \mathbf{J}(s)\left(\mathbf{V}, \mathrm{Ad}\, g.\, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}(\dot q, \delta q)\right) &= \mathbf{J}(s)\left(\mathbf{V}, \boldsymbol{\Omega}_\Gamma(s, \dot x, \delta x)\right). \end{aligned}$$

Следующая теорема дает внутренний («эйлеровский») вид уравнений движения (2.5) в виде равенства в $T_x^*\mathbb{X}$ и равенства в $\mathfrak{d}^*$:

Теорема 2.1 *Для функций Лагранжа вида (2.1), уравнения Эйлера выглядят как*

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{\mathrm{def}}\Big(\dfrac{\nabla^{\mathbb{X}}\dot x}{dt}, \cdot\Big) - \nabla_x \mathbf{K}(s)(.)(\mathbf{V}) + \mathbf{J}(s)\left(\mathbf{V}, \boldsymbol{\Omega}_\Gamma(\dot x, \cdot)\right) = \\ \qquad\qquad = Q - \nabla_x \Pi(t,s), \\ \dfrac{d}{dt}\,\mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) = \mathbf{F} - \pounds\Pi(t,s), \end{cases} \tag{2.6}$$

где $x = \pi(s)$, а $\nabla^{\mathbb{X}}$ – ковариантная производная в связности Леви-Чивита пространства $\mathbb{X}$, ассоциированного с $\mathcal{J}_{\mathrm{def}}$. Величины $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}(\dot s)$, $\boldsymbol{\Omega}_\Gamma(\dot x, \cdot)$ и $\nabla_x\mathbf{K}(s)(\mathbf{V})$ представляют собой линейные формы $\delta x \mapsto \boldsymbol{\Omega}(\Gamma(s,\dot x), \Gamma(s,\delta x))$ и $\delta x \mapsto \nabla_x \mathbf{K}(s)(\delta x)(\mathbf{V})$.

С помощью ковариантной производной второе уравнение (2.6) также может быть приведено к виду

$$\mathbf{I}(s)(\dot{\mathbf{V}}) + \operatorname{ad}^*\mathbf{V}.\mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) + \nabla_x \mathbf{I}(s)(\dot{x})(\mathbf{V}) = \mathbf{F} - \pounds\Pi(t,s). \quad (2.7)$$

Если теперь принять принцип Гамильтона за фундаментальный принцип динамики, то система отсчета должна быть галилеевской и тогда уравнения (2.6) оказываются верными уравнениями движения для рассматриваемой системы. Однако согласованность динамики требует того, что коль скоро эти уравнения справедливы в одной галилеевской системе отсчета, они должны оставаться справедливыми и в любой другой галилеевской системе отсчета. Доказываемая ниже теорема 2.2 содержит необходимые и достаточные условия того, чтобы это свойство было выполнено.

Галилеевская инвариантность и уравнения (2.6). Рассмотрим две системы отсчета – $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$. Пусть система отсчета $\mathcal{R}$ будет галилеевской, так что динамические уравнения (2.6) в $\mathcal{R}$ оказываются выполненными. Но система отсчета $\mathcal{R}'$ не обязательно такова на настоящем этапе. Наша первая цель состоит в том, чтобы вывести уравнения движения относительно системы отсчета $\mathcal{R}'$. Вывод будет существенным образом опираться на дифференциальное исчисление на группах Ли и многообразиях, а также на свойствах инвариантности (2.2), (2.3), (2.4).

Прежде всего существует дифференцируемое отображение $t \mapsto M(t) \in \mathbb{D}$, задающее движение системы отсчета $\mathcal{R}'$ относительно системы отсчета $\mathcal{R}$ (*и относительно самой системы отсчета* $\mathcal{R}'$), такое, что если s (соответственно σ) $\in \mathbb{S}$ – конфигурация механической системы, наблюдаемая по отношению к $\mathcal{R}$ (соответственно к $\mathcal{R}'$) в момент времени t, то

$$s = M(t).\sigma, \quad s, \sigma \in \mathbb{S},$$

откуда $\pi(s) = \pi(\sigma) = x$. Полагая

$$\mathbf{U} = \vartheta_r(\dot{M}),\ \mathbf{U}' = \vartheta_\ell(\dot{M}) \equiv \operatorname{Ad} M^{-1}.\mathbf{U},\ \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}(\dot{s}),\ \mathbf{W} = \boldsymbol{\omega}(\dot{\sigma}),$$

где ϑ_r и ϑ_ℓ – правая и левая формы Маурера-Картана $\mathbb{D}$, докажем, что

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \operatorname{Ad} M.\mathbf{W}, \quad \dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{U}} + \operatorname{Ad} M.\dot{\mathbf{W}} + [\mathbf{U}, \operatorname{Ad} M.\mathbf{W}] \tag{2.8}$$

и что *первое и второе уравнения (2.6) соответственно эквивалентны уравнениям*

$$\left\{\begin{aligned} & \mathcal{J}_{\mathrm{def}}\Big(\frac{\nabla^{\mathbb{X}}\dot{x}}{dt}, \cdot\Big) - \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(.)(\mathbf{W}) + \mathbf{J}(\sigma)(\mathbf{W}, \boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\dot{x}, .)) - \\ & \qquad -\nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(.)(\mathbf{U}') - \nabla_x \mathbf{J}(\sigma)(.)(\mathbf{U}', \mathbf{W}) + \\ & \qquad +\mathbf{J}(\sigma)(\mathbf{U}', \boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\dot{x}, .)) = Q - \nabla_x \Pi'(t, \sigma). \end{aligned}\right. \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W}) + \mathbf{C}(\sigma)(\mathbf{U}', \mathbf{W}) + \operatorname{ad}^*\mathbf{U}'.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}') + \\ & +\nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\dot{x})(\mathbf{U}') + \mathbf{I}(\sigma)\Big(\tfrac{d\mathbf{U}'}{dt}\Big) = \mathbf{F}' - \pounds\Pi'(t, \sigma), \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\mathbf{F}' = \operatorname{Ad}^* M^{-1}.\mathbf{F}$ *и* $\Pi'(t, \sigma) = \Pi(t, M.\sigma)$ *– сила и потенциал, наблюдаемые в системе отсчета* $\mathcal{R}'$.

□ Обозначим через σ_s отображение $g \mapsto g.s$, которое не следует путать с точкой σ в пространстве $\mathbb{S}$. Тогда

$$\dot{s} = \sigma_s^T\big(\vartheta_r(\dot{M})\big) + L_M^T(\dot{\sigma}).$$

Величина $\vartheta_r(\dot{M})$ – это *переносная скорость, обусловленная движением системы отсчета* $\mathcal{R}'$, в то же время $\boldsymbol{w} = \dot{\sigma}$ описывает *скорость системы по отношению к системе отсчета* $\mathcal{R}'$. В результате применения $\boldsymbol{\omega}$ к левой и правой частям и в силу общих свойств связности получается первое уравнение (2.8). Второе уравнение (2.8) следует из того, что

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Ad} M = \operatorname{ad}\vartheta_r(\dot{M}) \circ \operatorname{Ad} M.$$

Если предположить, что $s = M.\sigma$, *где* $M \in \mathbb{D}$, *то для фиксированных* X *и* Y *в* $\mathfrak{d}$

$$\nabla_x \mathbf{J}(s)(\delta x)(X,Y) = \nabla_x \mathbf{J}(\sigma)(\delta x)(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X, \mathrm{Ad}\, M^{-1}.Y) \tag{2.11}$$
$$\nabla_x \mathbf{I}(s)(\delta x)(X) = \mathrm{Ad}\, M^{*}.\nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\delta x)(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X). \tag{2.12}$$

Линейные формы $\nabla_x \mathbf{J}(s)(\delta x)(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X, \mathrm{Ad}\, M^{-1}.Y)$ и $\nabla_x \mathbf{J}(\sigma)(\delta x)(X,Y)$, соответственно представляют собой значения дифференциалов соотношений $\sigma \mapsto \mathbf{J}(\sigma)(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X, \mathrm{Ad}\, M^{-1}.Y)$ и $s \mapsto \mathbf{J}(s)(X,Y)$ для $\delta x \in T_x \mathbb{X}$ на

$$\boldsymbol{w} = \Gamma(\sigma, \delta x) \text{ и } \boldsymbol{v} = \Gamma(s, \delta x) = L_M^T(\boldsymbol{w}).$$

Более того, $\mathbf{J}(M.\sigma)(X,Y) = \mathbf{J}(\sigma)(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X, \mathrm{Ad}\, M^{-1}.Y)$, и дифференцирование по σ левой и правой частей дает

$$d\mathbf{J}(M.\sigma)(L_M^T(\boldsymbol{w}))(X,Y) = d\mathbf{J}(\sigma)(\boldsymbol{w})(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X, \mathrm{Ad}\, M^{-1}.Y).$$

Дифференцирование сложной функции дает $d\mathbf{J}(M.\sigma)(L_M^T(\boldsymbol{w})) \equiv d\mathbf{J}(s)(\boldsymbol{v})$, откуда следует соотношение (2.11), эквивалентное

$$\begin{aligned} \langle \nabla_x \mathbf{I}(s)(\delta x)(X), Y \rangle &= \langle \nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\delta x)\big(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X\big), \mathrm{Ad}\, M^{-1}.Y \rangle \\ &= \big\langle \mathrm{Ad}^{\,*} M.\nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\delta x)\big(\mathrm{Ad}\, M^{-1}.X\big), Y \big\rangle \end{aligned}$$

и эквивалентное соотношению (2.12), так как это соотношение имеет место для всех X и $Y \in \mathfrak{d}$. Из (2.8) и (2.11) получается, что

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathbf{K}(s)(\delta x)(\mathbf{V}) &= \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(\delta x)(\mathbf{U}' + \mathbf{W}) = \\ &= \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(\delta x)(\mathbf{W}) + \nabla_x \mathbf{J}(\sigma)(\delta x)(\mathbf{U}', \mathbf{W}) + \\ &\quad + \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(\delta x)(\mathbf{U}'). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Так как

$$\Omega(L_M^T \boldsymbol{v}_1, L_M^T \boldsymbol{v}_2) = \mathrm{Ad}\, M.\Omega(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2), \quad \Gamma(M.\sigma, \delta x) = L_M^T \Gamma(\sigma, \delta x),$$

то имеют место равенства

$$
\begin{array}{rcl}
\Omega_\Gamma(s,\dot{x},\delta x) & = & \mathrm{Ad}\, M.\Omega_\Gamma(\sigma,\dot{x},\delta x) \quad \forall \delta x \in T_x\mathbb{X}, \\
\mathbf{J}(s)(\mathbf{V},\boldsymbol{\Omega}_\Gamma(\dot{x},\delta x)) & = & \mathbf{J}(\sigma)(\mathbf{W},\boldsymbol{\Omega}_\Gamma(\dot{x},\delta x)) + \\
 & & +\mathbf{J}(\sigma)(\mathbf{U}',\boldsymbol{\Omega}_\Gamma(\dot{x},\delta x)).
\end{array} \tag{2.14}
$$

Из (2.13) и (2.14) следует, что первое уравнение (2.6) эквивалентно уравнению (2.9).

Из соотношения (2.2) и равенства $\dfrac{d}{dt}\mathrm{Ad}^*M = \mathrm{ad}^*\vartheta_r(\dot{M}) \circ \mathrm{Ad}^*M \equiv \mathrm{Ad}^*M \circ \mathrm{ad}^*\vartheta_\ell(\dot{M})$ следует, что

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) & = & \mathrm{Ad}^*M.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W}) + \mathbf{I}(s)(\mathbf{U}), \\
\dfrac{d}{dt}\mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) & = & \mathrm{Ad}^*M.\Big(\dfrac{d}{dt}\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W}) + \mathrm{ad}^*\mathbf{U}'.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W})\Big) + \dfrac{d}{dt}\mathbf{I}(s)(\mathbf{U}).
\end{array}
$$

Имеем $\mathbf{I}(s)(\mathbf{U}) = \mathrm{Ad}^*M.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}')$. С помощью (2.4), где $\boldsymbol{w} = \dot{\sigma}$ можно найти, что

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{d}{dt}\mathbf{I}(s)(\mathbf{U}) & = & \mathrm{Ad}^*M.\Big(\mathrm{ad}^*\mathbf{U}'.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}') + \mathrm{ad}^*\mathbf{W}.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}') - \\
 & & \qquad -\mathbf{I}(\sigma)(\mathrm{ad}\,\mathbf{W}.\mathbf{U}')\Big) + \\
 & + & \mathrm{Ad}^*M.\Big(\nabla\mathbf{I}(\boldsymbol{w})(\mathbf{U}') + \mathbf{I}(\sigma)\Big(\dfrac{d\mathbf{U}'}{dt}\Big)\Big),
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{d}{dt}\mathbf{I}(s)(\mathbf{V}) & = & \mathrm{Ad}^*M.\Big(\dfrac{d}{dt}\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W})\Big) + \\
 & + & \mathrm{Ad}^*M.\Big(\mathrm{ad}^*\mathbf{U}'.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W}) + \mathrm{ad}^*\mathbf{W}.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}') + \\
 & & \qquad +\mathbf{I}(\sigma)([\mathbf{U}',\mathbf{W}]) + \mathrm{ad}^*\mathbf{U}'.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}')\Big) + \\
 & + & \mathrm{Ad}^*M.\Big(\nabla\mathbf{I}(\boldsymbol{w})(\mathbf{U}') + \mathbf{I}(\sigma)\Big(\dfrac{d\mathbf{U}'}{dt}\Big) = \Big)
\end{array}
$$

$$= \mathrm{Ad}^*M.\Big(\frac{d}{dt}\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W}) + \mathbf{C}(\sigma)(\mathbf{U}',\mathbf{W}) +$$
$$+\mathrm{ad}^*\mathbf{U}'.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}') + \nabla_x\mathbf{I}(\sigma)(\dot{x})(\mathbf{U}') + \mathbf{I}(\sigma)\Big(\frac{d\mathbf{U}'}{dt}\Big)\Big), \tag{2.15}$$

так как $\pi^T(\dot{s}) = \pi^T(\boldsymbol{w}) = \dot{x}$, $\nabla\mathbf{I}(\boldsymbol{w}) = \nabla_x\mathbf{I}(\sigma)(\dot{x})$). С другой стороны, для $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}$

$$\langle \pounds(\Pi(t,s)), \mathbf{u}\rangle = \left[\frac{d}{d\tau}\Pi(t, \exp(\tau\mathbf{u}).s)\right]_{\tau=0}.$$

Однако $\exp(\tau\mathbf{u}).s = \exp(\tau\mathbf{u}).(M.\sigma) = M.M^{-1}.\exp(\tau\mathbf{u}).(M.\sigma) = M.\exp(\tau\mathrm{Ad}\,M^{-1}.\mathbf{u}).\sigma$, так что

$$\langle \pounds(\Pi(t,s)), \mathbf{u}\rangle = \langle \pounds\Pi'(t,\sigma), \mathrm{Ad}\,M^{-1}.\mathbf{u}\rangle = \langle \mathrm{Ad}^*M.\pounds\Pi'(t,\sigma), \mathbf{u}\rangle,$$

где Π' определено соотношением $\Pi'(t,\sigma) = \Pi(t, M.\sigma)$ для $\sigma \in \mathbb{S}$. Так как $\mathbf{u}$ может быть любым из множества $\mathfrak{d}$, то

$$\pounds(\Pi(t,s)) = \mathrm{Ad}^*M.\pounds\Pi'(t,\sigma).$$

Если подставить только что полученные соотношения во второе уравнение (2.6), то получается уравнение (2.10), так как Ad^*M – автоморфизм пространства $\mathfrak{d}^*$. ∎

Пусть

$$\mathfrak{K}(s) = \{\boldsymbol{\Omega}(s)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mid \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_s\mathbb{S}\}.$$

Так как каждый горизонтальный вектор из $T_s\mathbb{S}$ имеет вид $\boldsymbol{v} = \Gamma(s,u)$, где $u \in T_x\mathbb{X}$, то

$$\{\boldsymbol{\Omega}_\Gamma(s,u,v) \mid u,v \in T_x\mathbb{X}\} = \{\boldsymbol{\Omega}(s)(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \mid \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in T_s\mathbb{S}\} = \mathfrak{K}(s).$$

Теорема 2.2 *Необходимое и достаточное условие того, чтобы уравнения движения (2.6) были одними и теми же во всех галилеевских системах отсчета, имеет вид*

$$\forall s \in \mathbb{S},\ \forall U \in \mathfrak{t}: \quad \begin{cases} a)\ \forall X \in \mathfrak{d}:\ \mathbf{C}(s)(U,X) = 0, \\ b)\ \forall X \in \mathfrak{d}:\ \nabla\mathbf{J}(s)(U,X) = 0, \\ c)\ \forall X \in \mathfrak{K}(s):\mathbf{J}(s)(U,X) = 0, \end{cases}$$

где ∇ – ковариантная производная в динамической связности, а $\mathbf{\Omega}$ (в определении $\mathfrak{K}(s)$) – форма кривизны динамической связности.

Примечательно, что свойство b) эквивалентно следующему

$$\forall s \in \mathbb{S}, \quad \forall U \in \mathfrak{t} \quad \nabla \mathbf{I}(s)(U) = 0$$

в $\mathcal{L}(T_s\mathbb{S}, \mathfrak{d}^*)$. Надо заметить, что $\mathbf{I}(s) \in \mathcal{L}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}^*)$ и $\mathbf{I}(s)(U) \in \mathfrak{d}^*$, поэтому $\nabla \mathbf{I}(s)(U) \in \mathcal{L}(T_s\mathbb{S}, \mathfrak{d}^*)$).

Свойство a) представляет собой условие объективности инерционных сил (торсоров), действующих на замороженную систему. Согласно результату, доказанному в работе [1, разд.7], если $\mathbb{D}$ – обычная группа движений, то это свойство определяет математическую форму оператора $\mathbf{I}(s)$ на каждом слое из расслоения.

Свойство c), вообще говоря, не надо проверять для любой инвариантной римановой структуры на $\mathbb{S}$. Однако это свойство должно быть обязательно проверено для обеспечения галилеевской инвариантности законов динамики.

Как будет показано в разд. 4, безотносительно к общей теории свойства a), b), и c) надо проверять для конкретных общих моделей систем твердых тел или аффинно-деформируемых тел.

□ Рассмотрим две галилеевских системы отсчета $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$, такие, что $M(t) = A.\exp(tU)$ при $U \in \mathfrak{t}$ и фиксированном $A \in \mathbb{D}$. Тогда величина $\mathbf{U}' = U$ также постоянна. Экспоненциальное отображение exp определено на группе Ли $\mathbb{D}$, и так как $\mathfrak{t}$ – алгебра Ли подгруппы поступательных движений, то $\exp(tU)$ – поступательное движение с постоянной скоростью. Для произвольного выбора $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ уравнения движения относительно $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ должны быть идентичны тем, что были выведены из теоремы 2.1. Однако, как было показано выше, уравнения, выведенные из этой теоремы для системы отсчета $\mathcal{R}$, *эквивалентны* уравнениям (2.9) и (2.10). Поэтому необходимое и достаточное условие того, что дополнительные слагаемые, появляющиеся в левых частях уравнений (2.9) и (2.10) (для постоянной скорости $\mathbf{U}'$) обращаются в нуль для всех динамических процессов и для всех выборов галилеевской системы отсчета $\mathcal{R}'$:

$$-\nabla_x\mathbf{K}(\sigma)(.)(\mathbf{U}') - \nabla_x\mathbf{J}(\sigma)(.)(\mathbf{U}',\mathbf{W}) + \mathbf{J}(\sigma)(\mathbf{U}',\mathbf{\Omega}_{\text{г}}(\dot{x},.)) = 0.$$

$$\mathbf{C}(\sigma)(\mathbf{U}',\mathbf{W}) + \operatorname{ad}^*\mathbf{U}'.\mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{U}') + \nabla_x\mathbf{I}(\sigma)(\dot{x})(\mathbf{U}') = 0,$$

Зафиксируем момент времени $t = t_o$. Прежде всего условие следует проверить, когда система отсчета $\mathcal{R}'$ выбрана таким образом, что $M(t_o) = e$ для данной скорости $U \in \mathfrak{t}$. Однако для всех конфигураций s системы в момент времени t_o и для всех заданных значений $X \in \mathfrak{d}$, $u \in T_x\mathbb{X}$ существует динамический процесс, такой что $\mathbf{W} = X$ и $\dot{x} = u$. Таким образом, для всех $U \in \mathfrak{t}$, всех $X \in \mathfrak{d}$ и всех $u \in T_x\mathbb{X}$ должны выполняться соотношения:

$$\begin{cases} -\nabla_x\mathbf{K}(\sigma)(.)(U) - \nabla_x\mathbf{J}(\sigma)(u)(U,X) + \mathbf{J}(\sigma)(U,\mathbf{\Omega}_{\text{г}}(u,.)) = 0, \\ \\ \mathbf{C}(\sigma)(U,X) + \operatorname{ad}^*U.\mathbf{I}(\sigma)(U) + \nabla_x\mathbf{I}(\sigma)(u)(U) = 0. \end{cases}$$

В этих уравнениях можно заменить U, X, u на αU, βX, γu и получить два полиномиальных условия, которые должны выполняться для всех $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$. Для того чтобы коэффициенты этих многочленов обращались в нуль, необходимо и достаточно, чтобы для любых $s \in \mathbb{S}$, $U \in \mathfrak{t}$ выполнялись условия

$$\begin{cases} \forall X \in \mathfrak{d}\colon \mathbf{C}(s)(U,X) = 0, \\ \operatorname{ad}^*U.\mathbf{I}(s)(U) = 0, \\ \nabla_x\mathbf{I}(s)(.)(U) = 0 \ \ (\text{в } T_x^*\mathbb{X}), \\ \nabla_x\mathbf{K}(s)(.)(U) = 0 \ (\text{в } T_x^*\mathbb{X}), \\ \forall X \in \mathfrak{d}\colon \nabla_x\mathbf{J}(s)(.)(U,X) = 0 \ (\text{в } T_x^*\mathbb{X}), \\ \ \forall u \in T_x\mathbb{X}\colon \mathbf{J}(s)(U,\mathbf{\Omega}_{\text{г}}(u,.)) = 0 \ (\text{в } T_x^*\mathbb{X}). \end{cases} \tag{2.16}$$

Наоборот, нетрудно видеть, что если условия (2.16) выполнены, то уравнения движения относительно $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ идентичны для любого выбора галилеевских систем отсчета $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$. Однако эти свойства не являются независимыми друг от друга. С одной стороны, если заметить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(s)(U,U) &= \operatorname{ad}^*U.\mathbf{I}(s)(U) + \operatorname{ad}^*U.\mathbf{I}(s)(U) + \mathbf{I}(s)([U,U]) = \\ &= 2\operatorname{ad}^*U.\mathbf{I}(s)(U), \end{aligned}$$

то второе свойство оказывается следствием первого и может быть удалено. С другой стороны, можно заметить, что

$$\mathbf{J}(s)(U,X) = \langle \mathbf{I}(s)(U), X\rangle \Longrightarrow$$

$$\nabla\mathbf{J}(\boldsymbol{v})(U,X) = \langle \nabla\mathbf{I}(\boldsymbol{v})(U), X\rangle, \quad \boldsymbol{v} \in T_s\mathbb{S},$$

так что поскольку вектор из $T_s\mathbb{S}$ имеет вид $\boldsymbol{v} = \Gamma(s,\delta x)$, где $\delta x \in T_x\mathbb{X}$, и поскольку $\mathbf{K}(s)$ – квадратичная форма, ассоциированная с $\mathbf{J}(s)$, то

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathfrak{d},\ \forall \boldsymbol{v} \in T_s\mathbb{S} : \nabla\mathbf{J}(\boldsymbol{v})(U,X) = 0 &\Longleftrightarrow \\ \forall X \in \mathfrak{d}, \forall\, \delta x \in T_x\mathbb{X} : \nabla_x\mathbf{J}(s)(\delta x)(U,X) = 0 &\Longleftrightarrow \\ \forall\, \delta x \in T_x\mathbb{X} : \nabla_x\mathbf{I}(s)(\delta x)(U) = 0 &\Longrightarrow \\ \forall\, \delta x \in T_x\mathbb{X} : \nabla_x\mathbf{K}(s)(\delta x)(U) = 0. & \end{aligned}$$

Можно сделать вывод, согласно которому третье и четвертое свойства являются следствием пятого и могут быть удалены. В конечном итоге условия (2.16) сводятся к свойствам a), b) и c). ∎

Здесь и далее относительно группы $\mathbb{D}$ будем считать, что она является группой перемещений трехмерного евклидова точечного пространства $\mathcal{E}$ и что $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{d}^*$ будут отождествлены с помощью формы Клейна $[\cdot \mid \cdot]$, так что можно считать, что соотношение $\mathbf{I}(s) \in \mathcal{L}(\mathfrak{d})$ и оно определено как $[\mathbf{I}(s)(X) \mid Y] = \mathbf{J}(s)(X,Y)$ – см. Приложение.

Лемма 1. *Пусть $\mathbb{D}$ – обыкновенная евклидова группа. Необходимое и достаточное условие выполнения свойства a)* *состоит в том, что существуют дифференцируемые эквивариантные отображения $s \mapsto m_s$ из $\mathbb{S}$ в $]0, +\infty[$, $s \mapsto c_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathcal{E}$ и $s \mapsto \mathsf{l}_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ такие, что для $s \in \mathbb{S}$, X и $Y \in \mathfrak{d}$:*

> *функция l_s симметрична и положительно определена для всех s,*
>
> $$\mathbf{J}(s)(X, Y) = m_s X(c_s) \cdot Y(c_s) + \mathsf{l}_s(\omega_X) \cdot \omega_Y.$$

Эквивариантность предусматривается по отношению *к действию группы* $\mathbb{D}$, т.е.

$$m_{g.s} = m_s, \quad c_{g.s} = g(c_s), \quad \mathsf{l}_{g.s} = \mathbf{g} \circ \mathsf{l}_s \circ \mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g}_* \mathsf{l}_s,$$

где $\mathbf{g}$ составляет линейную часть аффинного отображения g.

□ Каждый слой расслоения $(\mathbb{S}, \mathbb{X}, \pi, \mathbb{D})$ – это главное однородное пространство группы $\mathbb{D}$, поэтому результат, доказанный в [1, разд.7], применим к римановой структуре, индуцированной одним к одному из $\mathbb{S}$ и ведет к алгебраическим свойствам, эквивалентным свойству *a)*, именно: существует отображение $s \mapsto m_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathbb{R}$ (которое фактически постоянно на каждом слое расслоения) и существуют отображения $s \mapsto c_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathcal{E}$, $s \mapsto \mathsf{l}_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathcal{L}_{sim}(\mathfrak{d})$ с алгебраическими свойствами, упомянутыми в лемме 1 и ведущими к упомянутому выражению для $\mathbf{J}(s)(X, Y)$. Свойства инвариантности и эквивариантности выводятся из соотношения $\mathbf{J}(g.s)(\operatorname{Ad} g.X, \operatorname{Ad} g.Y) = \mathbf{J}(s)(X, Y)$, преобразующего X и Y в $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{c}_s$. ∎

Лемма 2. *Если однородное пространство $\mathbb{S}$ связно и выполняется свойство* a)*, то свойство* b) *эквивалентно высказыванию:*

$$m_s \text{ постоянно на пространстве } \mathbb{S} \text{ и } d\,c(\boldsymbol{v}) = 0, \text{ если вектор } \boldsymbol{v} \in T\mathbb{S} \text{ горизонтален.} \tag{2.17}$$

□ Из результата, доказанного в [1], следует, что если ε – дуальное число, такое что $\varepsilon^2 = 0$, рассмотренное как $\mathbb{R}$-линейный оператор в $\mathfrak{d}$, преобразующий каждое векторное поле в $\mathfrak{d}$ в постоянное векторное поле на $\mathfrak{t}$:

$$\varepsilon\mathbf{I}(s)(U) = m_s U \qquad \forall U \in \mathfrak{t}, \quad - \tag{2.18}$$

и в общем случае, если $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ – значение векторного поля U в произвольной точке $\mathcal{E}$:

$$\forall a \in \mathcal{E}: \quad \mathbf{I}(s)(U)(a) = m_s\,\mathbf{u} \times \overrightarrow{c_s a}. \tag{2.19}$$

Условие b) означает, что $\nabla\mathbf{I}(s)(U) = 0$. Это эквивалентно высказыванию о том, что для всех *горизонтальных* векторов $\boldsymbol{v} \in T\mathbb{S}$ величина $d\mathbf{I}(\boldsymbol{v})(U)$ обращается в нуль $\mathfrak{d}$, или что производные левых частей соотношений (2.18) и (2.19) обращаются в нуль.

Из соотношения (2.18) следует, что функция $s \mapsto m_s$ дифференцируема. Однако из свойства b) и из (2.18) следует, что $d\,m(\boldsymbol{v}) = 0$ для всех *горизонтальных* векторов $\boldsymbol{v}$. Так как величина m_s постоянна на слоях, то $d\,m(\boldsymbol{v}) = 0$ для всех *вертикальных* векторов $\boldsymbol{v}$. Поэтому $d\,m(\boldsymbol{v}) = 0$ для всех $\boldsymbol{v} \in T\mathbb{S}$. Следовательно, величина m постоянна на связном многообразии $\mathbb{S}$. Так как $\mathbf{J}(s)(U,U) = m\mathbf{u}^2$ и $\mathbf{J}(s)$ – положительно определенная квадратичная форма на $\mathfrak{d}$, то $m > 0$.

Теперь из b) и соотношения (2.19) следует, что отображение $s \mapsto c_s$ дифференцируемо и что

$$d\big(\mathbf{I}(\boldsymbol{v})(U)(a)\big) = m\,d\big(\mathbf{u} \times \overrightarrow{c_s a}\big) = -m\mathbf{u} \times d\,c(\boldsymbol{v}) = 0$$

для всех *горизонтальных* векторов $\boldsymbol{v} \in T_s\mathbb{S}$ и для всех $\mathbf{u}$. Окончательно

$$d\,c(\boldsymbol{v}) = 0$$

для всех *горизонтальных* векторов $\boldsymbol{v} \in T_s\mathbb{S}$. И наоборот, если величина m_s постоянна на $\mathbb{S}$ и если предыдущее свойство выполнено, то условие b) также выполнено. ∎

Теорема 2.3 *Пусть пространство $\mathbb{S}$ связно и пусть $\mathbb{D}$ – обычная евклидова группа. Необходимые и достаточные условия того, что уравнения движения (2.6) остаются теми же самыми во всех галилеевских системах отсчета, таковы:*

1. *Существует число $m > 0$ и дифференцируемые эквивариантные отображения $s \mapsto c_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathcal{E}$ и $s \mapsto \mathsf{I}_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathcal{L}(\mathbb{E})$, такие что для $s \in \mathbb{S}$, X и $Y \in \mathfrak{d}$:*

   I_s *– симметрическая положительно определенная функция для всех s,*

$$\mathbf{J}(s)(X,Y) = mX(c_s)\cdot Y(c_s) + \mathsf{I}_s(\omega_X)\cdot\omega_Y.$$

2. *Для всех* горизонтальных *векторов $\boldsymbol{v} \in T\mathbb{S}$ имеет место соотношение $d\,c(\boldsymbol{v}) = 0$.*

3. *Для всех $s \in \mathbb{S}$ выполнено соотношение $\mathfrak{K}(s) \subset \mathfrak{c}_s$, где $\mathfrak{c}_s$ – подалгебра Ли векторных полей $X \in \mathfrak{d}$, таких что $X(c_s) = 0$.*

Свойство 1 означает, что для «замороженных систем» инертные свойства описываются как для твердого тела; свойство 2 означает, что когда играют роль деформации, центр масс системы остается фиксированным вдоль горизонтальных кривых динамической связности.

□ Свойства являются необходимыми: если выполнены условия a), b) и c), то свойства 1 и 2 представляют собой следствия леммы 1. Из свойства 1 следует, что подпространство пространства $\mathfrak{d}$, ортогональное $\mathfrak{t}$ относительно билинейной формы $\mathbf{J}(s)$, представляет собой подпространство $\mathfrak{c}_s$, так что свойство 3 эквивалентно условию c). Обратное очевидно. ■

3. Исключение гравитации в динамике. Классическая теория исключения гравитации в «свободно падающей» системе отсчета обычно излагается для частиц. В этом разделе эта теория объясняется для систем с помощью геометрии главных расслоений. Более того, во главу угла ставится примечательная связь – математические свойства, которые как это было доказано в разд. 2, необходимы и достаточны для галилеевской инвариантности законов динамики, оказываются достаточными для исключения гравитации в «свободно падающих» системах отсчета.

Замечание. Конечно, помимо упомянутых важнейших свойств, приходится сталкиваться с той ролью, которую играет равенство инертной и гравитационной масс, а также совпадение инертного и гравитационного центров масс.

Хорошо известно, что в случае, когда гравитационное поле может быть рассмотрено как постоянное по направлению и величине, оказывается справедливым «принцип эквивалентности», представляющий собой основу для эйнштейновской теории гравитации. Также хорошо известно, что в некоторых конкретных проблемах динамики спутников в центральном ньютоновском поле сил такое предположение не было бы корректным, а посему, чтобы определить достаточно аккуратно действие гравитации, было бы необходимо принять во внимание градиент гравитационного поля в правой части второго уравнения (3.1).

В этом разделе $\mathbb{D}$ по-прежнему будет евклидовой группой движений в размерности 3, $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{d}^*$ отождествлены с помощью формы Клейна. Рассмотрим систему, подверженную действию гравитации и внешних сил иного происхождения, описанных как $\mathbf{F}$. Предположим, что гравитация может быть описана (внешней) силой $mgG(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi}) \in \mathfrak{c}_s$, приложенной к *«центру тяжести»*, где m – *гравитационная масса*, g – ускорение силы тяжести, $\boldsymbol{\chi}$ – фиксированный и нормализованный элемент $\mathfrak{t}$, определяющий направление действия гравитации, $\mathfrak{c}_s$ – подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{d}$, связанная с поворотами вокруг центра тяжести. Используя обозначения из приложения, можно описать «торсор» $G(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi})$ как поле моментов, таких что $X(c_s) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}_X = \boldsymbol{\chi}$. Докажем следующую теорему.

Теорема 3.4 *Для механической системы такой, что пространство $\mathbb{S}$ связно, и удовлетворяющей условиям инвариантности теоремы 2.2 (или эквивалентным условиям теоремы 2.3) и пребывающей под действием гравитации, определенной, как и выше, с помощью $\boldsymbol{\chi}$ и g, в неинерциальной системе отсчета $\mathcal{R}'$, движущейся относительно галилеевской системы отсчета сообразно $t \mapsto M(t) = \exp(z(t)\,\boldsymbol{\chi})$ с $\ddot{z}(t) = g$, динамические уравнения оказываются прежними, если система отсчета $\mathcal{R}'$ была бы галилеевской и не было бы гравитации.*

□ По отношению к некоторой галилеевской системе отсчета $\mathcal{R}$ уравнения движения (2.6) записываются как

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{\mathrm{def}}\Big(\dfrac{\nabla^{\mathbb{X}}\dot{x}}{dt}, \cdot\Big) - \nabla_x \mathbf{K}(s)(.)(\mathbf{V}) + \mathbf{J}(s)\,(\mathbf{V}, \boldsymbol{\Omega}_{\Gamma}(\dot{x}, \cdot)) = Q, \\ \mathbf{I}(s)(\dot{\mathbf{V}}) + [\mathbf{V}, \mathbf{I}(s)(\mathbf{V})] + \nabla_x \mathbf{I}(s)(\dot{x})(\mathbf{V}) {=} \mathbf{F} + mgG(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi}), \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{d}^*$ отождествлены и $\mathrm{ad}^*\mathbf{V}$ становится $\mathrm{ad}\,\mathbf{V}$. Как и в начале разд. 2, рассмотрим иную систему отсчета $\mathcal{R}'$, движение которой в рассматриваемом случае будет зависящим от времени поступательным перемещением по отношению к $\mathcal{R}$, определяемым как $M(t) = \exp\big(z(t)\,\boldsymbol{\chi}\big)$, где $\boldsymbol{\chi} \in \mathfrak{t}$. Положения s и σ системы по отношению к системам отсчёта $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ вновь связаны соотношением $s = M.\sigma$, из которого следует, что $\pi(s) = \pi(\sigma) = x$. Тогда в (2.8) мы должны принять $\vartheta_r(\dot{M}) = \dot{z}\boldsymbol{\chi}$, а в (3.1) –

$$\mathbf{V} {=} \dot{z}\boldsymbol{\chi} + \mathrm{Ad}\,M.\mathbf{W},\ \dot{\mathbf{V}} {=} \ddot{z}\boldsymbol{\chi} + \dot{z}[\boldsymbol{\chi}, \mathrm{Ad}\,M.\mathbf{W}] + \mathrm{Ad}\,M.\dot{\mathbf{W}},\ \mathbf{W} {=} \boldsymbol{\omega}(\dot{\sigma}).$$

Прежде всего докажем, что из свойств теоремы 2.2 вытекает, что для $\delta x \in T_x\mathbb{X}$

$$\begin{cases} \nabla_x \mathbf{K}(s)(\delta x)(\mathbf{V}) & = & \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(\delta x)(\mathbf{W}), \\ \mathbf{J}(s)\Big(\mathbf{V}, \boldsymbol{\Omega}_{\text{г}}(\dot{x}, \delta x)\Big) & = & \mathbf{J}(\sigma)\Big(\mathbf{W}, \boldsymbol{\Omega}_{\text{г}}(\dot{x}, \delta x)\Big), \\ \nabla_x \mathbf{I}(s)(\delta x)(\mathbf{V}) & = & \operatorname{Ad} M. \nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\delta x)(\mathbf{W}). \end{cases} \tag{3.2}$$

Из формулы (2.11) и равенства $\operatorname{Ad} M^{-1}.\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}$ получается, что для фиксированных M и $\mathbf{W}$

$$\nabla_x \mathbf{K}(s)(\delta x)(\mathbf{V}) = \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(\delta x)(\operatorname{Ad} M^{-1}.\mathbf{V}) =$$

$$= \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(\delta x)(\mathbf{W} + \dot{z}\boldsymbol{\chi}) =$$

$$= \Big\langle \nabla_x \Big(\mathbf{K}(\sigma)(\mathbf{W}) + \dot{z}\mathbf{J}(\sigma)(\chi, \mathbf{W}) + \frac{1}{2}\dot{z}^2 \mathbf{J}(\sigma)(\chi, \chi)\Big), \delta x \Big\rangle.$$

Тогда первое свойство (3.2) следует из теоремы 2.2 b). Так как $\boldsymbol{\Omega}_{\text{г}}(s, \dot{x}, \delta x) = \operatorname{Ad} M.\boldsymbol{\Omega}_{\text{г}}(\sigma, \dot{x}, \delta x)$ и $\operatorname{Ad} M.\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}$, то

$$\mathbf{J}(s)\Big(\mathbf{V}, \boldsymbol{\Omega}_{\text{г}}(s, \dot{x}, \delta x)\Big) =$$

$$= \mathbf{J}(s)\Big(\operatorname{Ad} M.\mathbf{W}, \operatorname{Ad} M.\boldsymbol{\Omega}_{\text{г}}(\sigma, \dot{x}, \delta x))\Big) +$$

$$+ \mathbf{J}(s)\Big(\dot{z}\boldsymbol{\chi}, \operatorname{Ad} M.\boldsymbol{\Omega}_{\text{г}}(\sigma, \dot{x}, \delta x))\Big) =$$

$$= \mathbf{J}(\sigma)\Big(\mathbf{W}, \boldsymbol{\Omega}_{\text{г}}(\sigma, \dot{x}, \delta x)\Big) + \dot{z}\,\mathbf{J}(\sigma)\Big(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Omega}_{\text{г}}(\sigma, \dot{x}, \delta x))\Big).$$

Второе свойство (3.2) представляет собой следствие из $\boldsymbol{\chi} \in \mathfrak{t}$, $\boldsymbol{\Omega}_{\text{г}}(\sigma, \dot{x}, \delta x) \in \mathfrak{K}(\sigma)$ и с). Последнее из свойств (3.2) – следствие (2.12) и b) (см. замечание после теоремы 2.2). Так как $\mathcal{J}_{\text{def}}$ и Q зависят лишь от $(x, \dot{x})$, то для произвольного выбора функции $t \mapsto z(t)$ первое уравнение (3.1) эквивалентно уравнению

$$\mathcal{J}_{\text{def}}\Big(\frac{\nabla^{\mathbb{X}} \dot{x}}{dt}, \cdot\Big) - \nabla_x \mathbf{K}(\sigma)(\mathbf{W}) + \mathbf{J}(\sigma)\left(\mathbf{W}, \boldsymbol{\Omega}_{\text{г}}(\dot{x}, \cdot)\right) = Q. \tag{3.3}$$

Некоторые непосредственные вычисления или приложение (2.15) с постоянным $\mathbf{U}' = \boldsymbol{\chi}$ дают

$$\mathbf{I}(s)(\dot{\mathbf{V}}) + [\mathbf{V}, \mathbf{I}(s)(\mathbf{V})] + \nabla_x \mathbf{I}(s)(\dot{x})(\mathbf{V}) =$$

$$= \operatorname{Ad} M.\Big\{\mathbf{I}(\sigma)(\dot{\mathbf{W}}) + [\mathbf{W}, \mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W})] + \nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\dot{x})(\mathbf{W})\Big\} +$$

$$+ \operatorname{Ad} M.\Big\{\dot{z}\mathbf{C}(\sigma)(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{W}) + \dot{z}^2[\boldsymbol{\chi}, \mathbf{I}(\sigma)(\boldsymbol{\chi})]\Big\} + \ddot{z}\, mG(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi}) =$$

$$= \operatorname{Ad} M.\Big\{\mathbf{I}(\sigma)(\dot{\mathbf{W}}) + [\mathbf{W}, \mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W})] + \nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\dot{x})(\mathbf{W})\Big\} + \ddot{z}\, mG(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi}),$$

так как, согласно доказанному в [1, разд.7], из свойства a) теоремы 2.2 следует, что

$$\mathbf{C}(\sigma)(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{W}) = 0, \quad [\boldsymbol{\chi}, \mathbf{I}(\sigma)(\boldsymbol{\chi})] = 0, \quad \mathbf{I}(s)(\boldsymbol{\chi}) = mG(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi}).$$

(на этом шаге m, $\mathfrak{c}_s$ – *инертная масса* и *центр масс*, выведенные из свойства a), см. также лемму 1). Теперь, если предположить, что, с одной стороны, инертная и гравитационная массы, а с другой стороны – центр масс и центр тяжести совпадают, то второе уравнение (3.1) запишется как

$$\operatorname{Ad} M.\Big\{\mathbf{I}(\sigma)(\dot{\mathbf{W}}) + [\mathbf{W}, \mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W})] + \nabla_q \mathbf{I}(\sigma)(\dot{q})(\mathbf{W})\Big\} + \ddot{z}\, mG(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi}) =$$

$$= \mathbf{F} + mgG(\mathfrak{c}_s, \boldsymbol{\chi}).$$

Если мы зададим движение системы отсчета $\mathcal{R}'$ как $\ddot{z}(t) = g$, то второе уравнение (3.1) будет эквивалентным уравнению

$$\mathbf{I}(\sigma)(\dot{\mathbf{W}}) + [\mathbf{W}, \mathbf{I}(\sigma)(\mathbf{W})] + \nabla_x \mathbf{I}(\sigma)(\dot{x})(\mathbf{W}) = \boldsymbol{\Phi}, \tag{3.4}$$

где согласно объективности сил $\boldsymbol{\Phi} = \operatorname{Ad} M^{-1}.\mathbf{F}$ – внешняя сила, за исключением гравитации, как она наблюдаема в системе отсчета $\mathcal{R}'$. Теперь уравнения (3.3) и (3.4) – те самые уравнения, которые были бы получены из принципа Гамильтона с помощью системы отсчета $\mathcal{R}'$, если бы она была галилеевская. Теорема 3.4 доказана. ∎

4. Примеры. Покажем, что условия общих теорем 2.2 и 3.4 были выполнены в задачах о движении конкретных механических систем, рассмотренных в [2] и [3] (системы обычных твердых тел или аффинно-деформируемого тела). Чтобы облегчить чтение, выпишем в приложении к этой статье конкретные представления алгебр Ли, играющих роль в этих примерах.

Система твердых тел. Рассмотрим систему твердых тел, стесненных лишь *внутренними* голономными связями – см. разд.2.2, пример 3 и приложение в работе [3]. Пусть $\mathbb{B}$ – конечное множество, «список» тел, образующих систему. Согласно свойствам i), ii), iii), разд. 1, конфигурационное пространство каждого тела $a \in \mathbb{B}$ – это главное однородное пространство $\mathbb{S}_a$ группы $\mathbb{D}$, и инертные свойства тела определены как $\mathcal{H}_a \colon T\mathbb{S}_a \to T\mathbb{S}_a$ или, что эквивалентно, операторами $H_a(s_a) \in \mathcal{L}(\mathfrak{d})$.

Конфигурационное пространство системы в целом представляет собой подмногообразие $\mathbb{S}$ произведения $\prod_{a\in\mathbb{B}} \mathbb{S}_a$, *инвариантного под действием* $\mathbb{D}$. Элемент s из $\mathbb{S}$ (соответственно $\boldsymbol{v}$ из $T_s\mathbb{S}$) – это семейство $s = (s_a \mid a \in \mathbb{B})$ (соответственно, $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_a \mid a \in \mathbb{B},\ \boldsymbol{v}_a \in T_{s_a}\mathbb{S}_a))$, удовлетворяющее условиям, наложенным внутренними связями. Заметим, что Θ_a – это $\mathfrak{d}$-значная 1-форма на $\mathbb{S}$, такая что $\Theta_a(\boldsymbol{v}) = \vartheta(\boldsymbol{v}_a)$, где ϑ – каноническая $\mathfrak{d}$-значная 1-форма на $\mathbb{S}_a$ (см. [1]). Вводя обобщенный смешанный тензор инерции $\overset{\circ}{H}(s) = \sum_{a\in\mathbb{B}} H_a(s_a)$ замороженной системы в положении s, имеем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= \sum_{a\in\mathbb{B}} [H_a(s_a)(\Theta_a(\boldsymbol{v})) \mid \Theta_a(\boldsymbol{w})], \\
\boldsymbol{\varpi}(\boldsymbol{v}) &= \overset{\circ}{H}(s)^{-1}\Big(\sum_{a\in\mathbb{B}} H_a(s_a)(\Theta_a(\boldsymbol{v}))\Big), \qquad (4.1)\\
\mathbf{J}(s)(X, Y) &= [\overset{\circ}{H}(s)(X) \mid Y],
\end{aligned}
$$

где

$$\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in T\mathbb{S}, \quad o(\boldsymbol{v}) = o(\boldsymbol{w}), \quad X,\, Y\ \in \mathfrak{d}.$$

Свойство a) теоремы 2.2 имеет вид

$$\forall\, s \in \mathbb{S},\, \forall\, U \in \mathfrak{t},\, \forall\, X \in \mathfrak{d}\colon [U, \mathring{H}_s(X)] + [X, \mathring{H}_s(U)] + \mathring{H}_s([U, X]) = 0.$$

Оно выполнено, так как для каждого оператора $H_a(s_a)$ выполнены условия (1.2), введенные в разд. 1.

Отождествим алгебру Ли $\mathfrak{d}$ с алгеброй Ли кососимметрических векторных полей на $\mathcal{E}$. Для $U \in \mathfrak{t}$ и $X \in \mathfrak{d}$, так как X – аффинное отображение, то

$$\mathbf{J}(s)(U, X) = \sum_{a \in \mathbb{B}} m_a \mathbf{u} \cdot X(c_{s_a}) = \mathbf{u} \cdot \sum_{a \in \mathbb{B}} m_a X(c_{s_a}) = m\mathbf{u} \cdot X(c_s), \tag{4.2}$$

где $\mathbf{u}$ – значение векторного поля U во всех точках из $\mathcal{E}$. c_{s_a} и $c_s \in \mathcal{E}$ – центры масс тела a и системы в конфигурации $s = (s_a) \in \mathbb{S}$. Нетрудно доказать, что для $\boldsymbol{v} \in T\mathbb{S}$:

$$m\, dc_s(\boldsymbol{v}) = \sum_{a \in \mathbb{B}} m_a \mathbf{V}_a(c_{s_a}) \qquad \mathbf{V}_a = \Theta_a(\boldsymbol{v}),\ \ m = \sum_{a \in \mathbb{B}} m_a,$$

где m_a – масса тела a. С учетом соотношения (4.1), условие, означающее, что вектор $\boldsymbol{v}$ горизонтален, принимает вид

$$\sum_{a \in \mathbb{B}} H_a(s_a)(\mathbf{V}_a) = \mathbf{0}.$$

Соотношение, включающее линейный и угловой моменты, в развернутом виде записывается как

$$\sum_{a \in \mathbb{B}} \begin{bmatrix} -m_a \tilde{\mathrm{c}}_{s_a} & m_a \mathbf{1} \\ \\ \mathbf{I}_{s_a}, & m_a \tilde{\mathrm{c}}_{s_a} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_a \\ \\ \mathbf{V}_a(o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

где $c_{s_a} = \overrightarrow{oc}_{s_a}$ и $\tilde{c}_{s_a}$ – оператор «векторного произведения с c_{s_a}». Выделяя часть, дающую линейный момент, выводим, что

$$\sum_{a\in\mathbb{B}} m_a \mathbf{V}_a(c_{s_a}) = \mathbf{0}.$$

Следовательно, для горизонтального $\boldsymbol{v}$ выполняется равенство $dc_s(\boldsymbol{v}) = 0$ и с учетом (4.2) выполняется свойство b).

Кривизна $\boldsymbol{\Xi}$ для $\boldsymbol{\varpi}$ вычислена в публикации [3]: для $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in T\mathbb{S}$, $o(\boldsymbol{v}) = o(\boldsymbol{w}) = s$

$$\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \overset{\circ}{H}(s)^{-1}\Big(\sum_{a\in\mathbb{B}} \delta H_a(s_a)\big(\Theta_a(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varpi}(\boldsymbol{v}), \Theta_a(\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{\varpi}(\boldsymbol{w})\big)\Big).$$

Выражение

$$\delta H_a(s_a)(X,Y) = [H_a(s_a)(X),Y] + [X, H_a(s_a)(Y)] - H_a(s_a)\big([X,Y]\big) -$$

это «дифференциал» $H_a(s_a) \in \mathcal{L}(\mathfrak{d})$ (ко-граница в когомологии алгебр Ли). Для классических твердых тел все отображения $\delta H_a(s_a)$ принимают свои значения в $\mathfrak{t}$, где $\overset{\circ}{H}(s)^{-1}$ – изоморфизм $\mathfrak{t}$ на $\mathfrak{z}_s^-$ (алгебра Ли группы поворотов вокруг центра масс системы), поэтому $\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in \mathfrak{z}_s^-$. Формула (4.2) показывает, что $\mathbf{J}(s)\big(U, \boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\big) = 0$ для $U \in \mathfrak{t}$ и условие c) выполнено.

Аффинно-деформируемые тела. Воспользуемся непосредственным подходом к динамике аффинно-деформируемого тела в евклидовом аффинном пространстве $\mathcal{E}$, представленным в публикации [2], в частности в разд.5.3. В обозначениях настоящей статьи формула (40) из [2] для X и $Y \in \mathfrak{d}$ примет вид

$$\mathbf{J}(s)(X,Y) = mX(c_s)\cdot Y(c_s) + \mathsf{J}_s(\Omega_X, \Omega_Y), \tag{4.3}$$

где c_s – центр масс тела в конфигурации s. Ω_X и Ω_Y кососимметричны и

$$\mathsf{J}_s(\Omega_X,\Omega_Y) = \int \Omega_X\big(\overrightarrow{c_s x}\big)\cdot\Omega_Y\big(\overrightarrow{c_s x}\big)\, d\mu_s(x).$$

Свойства a), b), c) теоремы 2.2 могут быть выведены непосредственно. На самом деле, свойство *a)* имеет вид

$$\forall\, s \in \mathbb{S},\ \forall\, U \in \mathfrak{t},\ \forall\, X \in \mathfrak{d}\colon [U, \overset{\circ}{H}_s(X)] + [X, \overset{\circ}{H}_s(U)] + \overset{\circ}{H}_s([U, X]) = 0,$$

где $\overset{\circ}{H}_s \in \mathcal{L}(\mathfrak{d})$ – оператор инерции, ассоциированный с замороженным телом. Иными словами, это твердое тело, конфигурации которого сосредоточены на слое из s. Поэтому условие a) выполнено, как и в динамике твердого тела.

В работе [9] доказано, что для дифференциала отображения $s \mapsto c_s$ из $\mathbb{S}$ в $\mathcal{E}$ имеет место равенство $dc_s(\boldsymbol{v}) = 0$ *для горизонтальных* векторов $\boldsymbol{v} \in T_s\mathbb{S}$. Согласно (4.3) для постоянного векторного поля $U \in \mathfrak{t}$, равного $\mathbf{u}$ в каждой точке пространства $\mathcal{E}$: $\mathbf{J}(s)(U, X) = m\mathbf{u} \cdot X(c_s)$. Тогда $\nabla\mathbf{J}(s)(X, U) = 0$ для $U \in \mathfrak{t}$. Поэтому свойство b) выполнено.

В работе [2] доказано Предложение 4-2, согласно которому форма кривизны Ξ удовлетворяет соотношению $\Xi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathfrak{z}_s^-$, алгебра Ли кососимметрических векторных полей на $\mathcal{E}$ обращается в нуль в центре масс c_s. Так как $\Omega_U = 0$ для $U \in \mathfrak{t}$ и $\Xi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})(c_s) = 0$, то из формулы (4.3) следует свойство c):

$$\mathbf{J}(s)\big(U, \Xi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\big) = 0 \quad \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in T_s\mathbb{S}.$$

5. Приложение. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathbb{E}$ – евклидово аффинное пространство и ассоциированное векторное пространство. Пусть $\mathrm{Ga}(\mathcal{E})$ и $\mathbb{D}$ – аффинная группа и группа движений пространства $\mathcal{E}$, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{d}$ – их алгебры Ли. Согласно общему результату (см. [11, глава I.4] или [12, глава V.2]) алгебра Ли $\mathfrak{g}$ (соответственно $\mathfrak{d}$) изоморфна и будет отождествлена с алгеброй Ли аффинных (соответственно кососимметричных) векторных полей на $\mathcal{E}$. Тогда, если X, Y, $Z\colon \mathcal{E} \to \mathbb{E}$ обозначают векторные поля на $\mathcal{E}$, то $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{d}$, а также некоторые примечательные подпространства определены как

- $X \in \mathfrak{g} \Longleftrightarrow$ существует $\Omega_{X} \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$, такая что$X(p) = X(q) + \Omega_{X}(\overrightarrow{pq}) \quad (p, q \in \mathcal{E})$.

- Скобка Ли $Z = [X, Y]$ определена как $Z(p) = \Omega_{X}(Y(p)) - \Omega_{Y}(X(p))$ для $p \in \mathcal{E}$.

- алгебра Ли $\mathfrak{d} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \Omega_{X}$ кососимметрична$\}$ (подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$).

- $\mathfrak{t} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \Omega_{X} = 0\}$, множество постоянных векторных полей на $\mathcal{E}$ (идеал $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{d}$).

- $\mathfrak{z}_a = \{X \in \mathfrak{g} \mid X(a) = \mathbf{0}\}$ (a фиксирован в $\mathcal{E}$).

$\mathfrak{t}$ ($\subset \mathfrak{d}$) – алгебра Ли группы параллельных переносов пространства $\mathcal{E}$ (нормальная подгруппа, включенная в $\mathbb{D}$), $\mathfrak{z}_a$ – алгебра Ли подгруппы в $\mathrm{Ga}(\mathcal{E})$ элементов, оставляющих точку a инвариантной, и $\mathfrak{z}_a^- = \mathfrak{z}_a \cap \mathfrak{d}$ – алгебра Ли группы поворотов вокруг a. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{z}_a$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{z}_a^-$.

Если размерность пространства $\mathcal{E}$ равна трем (и пространство $\mathcal{E}$ ориентируемо), то кососимметричные операторы описаны с помощью векторных произведений и $X \in \mathfrak{d}$ тогда и только тогда, когда существует $\boldsymbol{\omega}_{X} \in \mathbb{E}$, такая что

$$X(p) = X(q) + \boldsymbol{\omega}_{X} \times \overrightarrow{pq} \quad (p, q \in \mathcal{E}).$$

Тогда невырожденное внутреннее произведение, форма Клейна, определена на $\mathfrak{d}$ как

$[X \mid Y] = \boldsymbol{\omega}_{X} \cdot Y(a) + \boldsymbol{\omega}_{Y} \cdot X(a)$ (значение, не зависящее от $a \in \mathcal{E}$).

В общей механике элементы $\mathfrak{d}$ описывают поля скоростей в движениях как твердого целого («кинематические моторы» в теории винтов) и элементы $\mathfrak{d}^*$ описывают торсоры («динамические винты»). В размерности три $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{d}^*$ могут быть отождествлены с помощью формы Клейна, и тогда векторное поле $\mathcal{M}$, соответствующее динамическому винту $T \in \mathfrak{d}^*$ ($\langle T, V\rangle = [\mathcal{M} \mid V]$ для всех $V \in \mathfrak{d}$) – это поле моментов динамического винта T. Если $\mathcal{M} \in \mathfrak{t}$, то динамический винт сводится к моменту сил, а если $\mathcal{M} \in \mathfrak{z}_a$, то он равен силе, действующей вдоль прямой, задаваемой a.

Элемент $\mathrm{Ga}(\mathcal{E})$ (соответственно $\mathbb{D}$) – это отображение $g\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, такое что существует элемент g линейной группы $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ (соответственно специальной ортогональной группы $\mathrm{SO}(\mathbb{E})$), удовлетворяющий соотношению $g(p) = g(q) + \mathrm{g}(\overrightarrow{pq})$. Тогда $\mathrm{Ad}\, g.X$ – векторное поле $\mathrm{g} \circ X \circ g^{-1}\colon p \mapsto \mathrm{g}X\big(g^{-1}(p)\big)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chevallier D.P.* On the foundations of ordinary and generalized rigid body dynamics and the principle of objectivity // Arch. Mech. 2004. Vol.56. No.4. P. 313 – 353.

2. *Bourov A.A., Chevallier D.P.* Dynamics of affinely deformable bodies from the standpoint of theoretical mechanics and differential geometry // Reports on Mathematical Physics. 2008. Vol.62. No.3. P. 283 – 321.

3. *Шевалльe Д.П.* Динамика с лагранжевой и эйлеровой точек зрения. Продолжение: нетранзитивные действия групп. М.: ВЦ РАН, 2007. С. 19 – 71.

4. *Noll W.* The Foundations of Classical Mechanics in the Light of Recent Advances in Continuum Mechanics // In: The Axiomatic Method with Special References to Geometry and Physics. Symposium at Berkeley, 1957. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1959. P. 266 – 281.

5. *Noll W.* La Mécanique Classique Basée sur un Axiome d'Objectivité // In: La Méthode axiomatique dans les

mécaniques Classiques et Nouvelles. Colloque International, Paris 1959. Paris: Gauthier-Villars. 1963.

6. *Arnold V.I.* Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 1966. No 1. P.319 – 361.

7. *Chevallier D.P.* Lie Groups and the Mathematical Structure of the Mechanics of Multibody Systems // In: Proc. Third Internat. Workshop on Advances in Robot Kinematics. Ferrara: Editor Felloni. 1992. P. 194 – 201.

8. *Chevallier D.P.* Curvature and Dynamics of an Affinely Deformable Body. Proceedings Third International Symposium on Classical and Celestial Mechanics, 23-28 août 1998, Velikie Luki, Russia.

9. *Шевалльe Д.* Уравнения Пуанкаре-Четаева. Динамика аффинного тела и группа голономий // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости: сборник научных статей, посвященный памяти акад. Валентина Витальевича Румянцева. М.: Физматлит, 2009. С. 190-207.

10. *Румянцев В.В.* Об уравнениях Пуанкаре-Четаева // ПММ. Т. 58. Вып. 3. С. 3-16 = *Rumjantsev V.V.* On the Poincaré-Chetayev equations // J. Appl. Math. Mech. (PMM) 1994. Vol. 58. No 3. P. 373 – 386.

11. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т.1. М.: Наука. 1981. 344 с.; Т.2. М.: Наука. 1981. 415 с. = Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. Interscience Pub. (1963).

12. *Chevallier D.P.* Introduction à la théorie des groupes de Lie réels. Paris: Ellipses, 2006. 360 p.

УДК 531.36; 517.96

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕДЕЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

В.С. Сергеев

Указываются достаточные условия асимптотической устойчивости экспоненциально предельно периодического решения интегродифференциального уравнения, зависящего от малого периодического (предельно периодического) возмущения, в случае, когда решения линеаризованного уравнения асимптотически устойчивы.

Ключевые слова: интегродифференциальные уравнения типа Вольтерра, теория колебаний, асимптотическая устойчивость

1. Постановка задачи. Рассматривается интегродифференциальное уравнение типа Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \int_0^t K(t-s)x(s)ds + \mu f(t) + F(x,t), \tag{1.1}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad f = \mathrm{col}(f_1, ..., f_n), \quad F = \mathrm{col}(F_1, ..., F_n),$$

в котором $0 \leq \mu << 1$, $A = (a_{ij})$ – $(n \times n)$-постоянная матрица, $K(t) = (K_{ij}(t)) \in \mathbf{C}$ и $f(t) \in \mathbf{C}$ при $t \in \mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$, $F(x,t)$ - непрерывная ограниченная по $t \in \mathbb{R}^+$ функция, класса $\mathbf{C^2}$ по x в некоторой окрестности нуля, причем $F(0,t) \equiv 0$, $F'_x(x,t)|_{x=0} \equiv 0$. Функцию $\mu f(t)$ будем рассматривать как возмущение.

Будем считать, что матрица $K(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|K(t)\| \leq C\exp(-\beta t), \qquad C, \beta = \mathrm{const} > 0. \tag{1.2}$$

Будем использовать следующие определения.

Определения

1.*Будем говорить, что непрерывная функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $e_1(\alpha)$, т.е. $\varphi(t) \in e_1(\alpha)$, если при $t \in \mathbb{R}^+$ выполняется неравенство*

$$\|\varphi(t)\| \le C\exp(\alpha t), \qquad C, \alpha = \mathrm{const}, \quad C > 0.$$

2. *Будем говорить, что непрерывная на множестве $0 \le s \le t < +\infty$ функция $\Phi(t,s)$ принадлежит классу $e_2(\alpha)$, т.е. $\Phi(t,s) \in e_2(\alpha)$, если на этом множестве справедлива оценка*

$$\|\Phi(t,s)\| \le C\exp[\alpha(t-s)].$$

3. *Непрерывную при $t \in \mathbb{R}^+$ функцию $f(t)$ будем называть экспоненциально предельно периодической, т.е. принадлежащей классу $\mathrm{lpe}(T,\alpha)$, если*

$$f(t) = f_p(t) + f_e(t), \tag{1.3}$$

где $f_e(t) \in e_1(\alpha)$ $(\alpha < 0)$ и непрерывная функция $f_p(t)$ является периодической с периодом T.

4.*Движение, описываемое функцией вида* (1.3), *будем называть экспоненциально предельно периодическим.*

По предположению в уравнении (1.1) функция $f(t)$ и $F(x,t)$ как функция t при каждом фиксированном x представляют собой функции класса $\mathrm{lpe}(T,\alpha)$ $(\alpha < 0)$.

Будем считать, что характеристическое уравнение

$$\det(\lambda E_n - A - K^*(\lambda)) = 0, \tag{1.4}$$

где $K^*(\lambda)$ – преобразование Лапласа для матрицы $K(t)$, определенное в комплексной полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > -\beta$, имеет в этой полуплоскости конечное число корней λ'_j $(j = 1, ..., N;\ N \ge n)$.

Рассмотрим случай, когда корни уравнения (1.4) удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re}\lambda_j' < 0, \qquad j = 1, ..., N \tag{1.5}$$

и, следовательно, нулевое решение невозмущенного уравнения (т.е. при $\mu = 0$) экспоненциально устойчиво.

Пусть $X(t-s)$ – фундаментальная матрица решений линеаризованного невозмущенного уравнения (1.1) с нижним пределом интегрирования s в интегральном члене [1], такая что $X(0) = E_n$. Тогда при выполнении условий (1.5) справедливо неравенство

$$\|X(t-s)\| \le C' \exp[-\beta'(t-s)], \quad C', \beta' = \mathrm{const} > 0, \quad C' \ge 1. \tag{1.6}$$

На основании теоремы о существовании предельно периодических решений [2] имеем применительно к рассматриваемому случаю следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть для уравнения* (1.1) *выполнены условия* (1.2), (1.6). *Тогда*

1) *общее решение уравнения* (1.1) *в некоторой окрестности нуля будет экспоненциально предельно периодическим*;

2) *если функция* $F(x,t)$ *аналитическая по* x, *то это решение будет представляться степенным рядом по* μ *и произвольным начальным значениям* x_0 *переменной* x *при* $0 \le \mu \le \mu_0$, $\|x_0\| \le \delta_0$ *для некоторых* μ_0, $\delta_0 > 0$.

2. Устойчивость предельно периодического решения. Пусть $x^0(t)$ – некоторое решение уравнения (1.1) с начальным значением x_0. Для функции $F(x,t)$, обладающей производными по x в некоторой окрестности нуля, решение $x^0(t)$, обращающееся в ноль при $x_0 = 0$, может быть представлено в виде $x^0(t) = x_0\tilde{x}^0(t, x_0)$, причем функция $\tilde{x}^0(t, x_0)$ непрерывна и ограничена по x_0 в некоторой окрестности $B(x_0)$ точки $x_0 = 0$ и принадлежит классу $\mathrm{lpe}(T, \alpha)$ $(\alpha < 0)$ при каждом фиксированном $x_0 = 0$ из этой окрестности.

Положим $x_0 = \mu x_0'$, где x_0' – фиксированный вектор. Тогда можно записать

$$x^0(t) = \mu\varphi(t, \mu),$$

где $\varphi(t, \mu)$ – непрерывная ограниченная по t и μ функция при $t \in \mathbb{R}^+$ и $0 \le \mu \le \mu_0$.

Введем переменную y заменой $x = \mu\varphi(t, \mu) + y$ и будем рассматривать уравнение

$$\frac{dy}{dt} = Ay + \int\limits_0^t K(t-s)y(s)ds + F(\mu\varphi(t,\mu) + y, t) - F(\mu\varphi(t,\mu), t). \tag{2.1}$$

Учитывая свойства функции $F(x,t)$, положим

$$\Phi(t, \mu) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\mu\varphi(t,\mu)}, \tag{2.2}$$

где $\Phi(t, \mu)$ – экспоненциально предельно периодическая по t функция, непрерывная ограниченная по μ в области изменения своих аргументов.

Рассмотрим линейную часть уравнения (2.1):

$$\frac{dy}{dt} = Ay + \int\limits_0^t K(t-s)y(s)ds + \Phi(t,\mu)y. \tag{2.3}$$

Отметим, что функция $\Phi(t,\mu)$ (2.1) такова, что найдется не зависящая от t и μ постоянная $\Phi_0 > 0$ такая, что при $t \in \mathbb{R}^+$, $0 \le \mu \le \mu_0$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(t,\mu)\| \le \Phi_0. \tag{2.4}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для уравнения* (1.1) *выполняются условия* (1.2), (1.6) *и пусть*

$$\Phi_0 < \frac{\beta'}{C'}. \tag{2.5}$$

Тогда

1) *по фиксированному числу $\varepsilon > 0$ найдется $0 < \kappa < \beta'$ такое, что всякое решение $y(t)$ уравнения* (2.3) *удовлетворяет при $t \in \mathbb{R}^+$ неравенству*

$$\|y(t)\| < \varepsilon \exp(-\kappa t), \tag{2.6}$$

когда его начальное значение $y(0) = y_0$ подчинено ограничению

$$\frac{\|y_0\|}{\varepsilon} + \frac{\Phi_0}{\beta' - \kappa} < \frac{1}{C'}. \tag{2.7}$$

2) *экспоненциально предельно периодическое решение уравнения* (1.1) *асимптотически (экспоненциально) устойчиво.*

Доказательство теоремы базируется на схеме, использованной в [1, с.127], [3] и на интегральной формуле

$$y(t) = X(t)y_0 + \int\limits_0^t X(t-s)\Phi(s,\mu)y(s)ds, \tag{2.8}$$

эквивалентной уравнению (2.3) вместе с начальным условием $y(0) = y_0$.

Выберем согласно условию (2.5) число κ ($0 < \kappa < \beta'$), удовлетворяющее неравенству

$$\Phi_0 < \frac{\beta' - \kappa}{C'}. \tag{2.9}$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что если величина $\|y_0\|$ достаточно мала, т.е. найдется $\delta > 0$ такое, что $\|y_0\| < \delta$, то решение $y(t)$ уравнения (2.3) удовлетворяет неравенству (2.6), если начальное значение y_0 подчинено условию (2.7).

Предположим, что неравенство (2.6) имеет место лишь при $0 \leq t < t_0$, а при $t = t_0$ выполняется равенство

$$\|y(t_0)\| = \varepsilon \exp(-\kappa t_0).$$

Тогда согласно соотношениям (1.6), (2.4) – (2.9) получаем оценки

$$\|y(t_0)\| = \varepsilon \exp(-\kappa t_0) \leq$$

$$\leq \|X(t_0)\|\|y_0\| + \int\limits_0^{t_0} \|X(t_0 - s)\|\Phi_0\|y(s)\|ds \leq$$

$$\leq C' \exp(-\beta' t_0)\|y_0\| + C' \int\limits_0^{t_0} \exp[-\beta'(t_0 - s)]\Phi_0 \varepsilon \exp(-\kappa s)ds <$$

$$< C' \exp(-\kappa t_0)\Big(\|y_0\| + \frac{\varepsilon \Phi_0}{\beta' - \kappa}\Big) < \varepsilon \exp(-\kappa t_0),$$

т. е. получаем противоречие. Таким образом, неравенство (2.6) справедливо для всех $0 \leq t < +\infty$ и имеет место экспоненциальная устойчивость нулевого решения линеаризованной системы.

Если для уравнения (2.3) $Y^*(t)\,(Y^*(0) = E_n)$ – фундаментальная матрица решений, аналогичная $X(t)$, то согласно соотношению (2.6) справедливо неравенство

$$\|Y^*(t)\| \le C^* \exp(-\kappa t), \quad C^* = \text{const} > 0; \tag{2.10}$$

причем постоянная κ подчинена условию (2.7).

Следовательно, для нелинейного уравнения (2.1) при выполнении условий (1.6), (2.4), (2.5), (2.7), являющихся достаточными для того, чтобы имела место оценка (2.10), справедлива теорема об устойчивости по первому приближению [4] и рассматриваемое экспоненциально предельно периодическое решение асимптотически (экспоненциально) устойчиво.

Указанные неравенства совместно с оценкой исследуемого решения, которая получается методом мажорантных функций [5] так же, как в [4], позволяют дать оценку области притяжения.

3. Оценка области притяжения. Рассмотрим в качестве примера вращательные колебания вала в вязкоупругих опорах под действием силы тяжести с моментом

$$M_g = -M \sin\vartheta, \quad M = \text{const} > 0$$

и вязкоупругих сил, действующих в опорах и заданных линейным интегральным оператором Вольтерра [6]

$$M_v = -k\vartheta + \int\limits_0^t K'(t-s)\vartheta(s)ds, \quad k = \text{const} > 0, \quad K'(t) \in \mathbf{C},$$

а также малых вибрационных сил с моментом $\mu f(t)$ – периодической функцией, $\mu << 1$.

Вал совершает вращательные движения вокруг горизонтальной оси OO_1 и моделируется вытянутым твердым телом, в концы которого жестко заделаны две вязкоупругие опоры, а вторые концы опор фиксированы в неподвижном пространстве. Массами опор пренебрегаем.

Угол ϑ поворота тела отсчитывается от вертикали. Рассматривается окрестность нижнего устойчивого положения равновесия (в отсутствие вибрационных сил).

Продемонстрируем на данном примере возможный способ оценки области притяжения экспоненциально предельно периодического движения, отвечающего соответствующему решению уравнения движения вала

$$J\ddot{\vartheta} + k\vartheta - \int\limits_0^t K'(t-s)\vartheta(s)ds + M\sin\vartheta - \mu f(t) = 0, \qquad (3.1)$$

где J – момент инерции тела относительно оси OO_1.

Будем считать, что все корни λ_i характеристического уравнения

$$J\lambda^2 + (k+M)\lambda - K^*(\lambda) = 0,$$

где $K^*(\lambda)$ – преобразование Лапласа для функции $K'(t)$, имеют отрицательные вещественные части.

Положим $x_1 = \dot{\vartheta}$, $x_2 = \vartheta$ и представим уравнение (3.1) в виде системы, для которой матрицу фундаментальной системы решений однородного линейного приближения с нижним пределом s интегрирования обозначим, как и ранее, через $X(t-s)$.

Для матрицы $X(t)$ справедливо неравенство

$$\|X(t)\| \leq C' \exp(-\beta' t), \quad C', \beta' = \mathrm{const} > 0. \qquad (3.2)$$

Пусть $x^0(t) = \mathrm{col}(x_1^0(t), x_2^0(t))$ – экспоненциально предельно периодическое решение, существующее согласно [2] и удовлетворяющее уравнению (3.1), записанному в интегральной форме:

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t-s)(F(x(s)) + \mu f'(s))ds, \tag{3.3}$$

где

$$F(x) = \mathrm{col}(F_1, 0), \quad F_1 = -M_1(\sin x_2 - x_2),$$

$$M_1 = M/J, \quad f'(x) = \mathrm{col}(f(t)/J, 0)$$

и $x_0 = \mathrm{col}(\dot{\vartheta}_0, \vartheta)_0$ – начальное значение.

Обозначим через $u = \mathrm{col}(u_1, u_2)$ мажоранту функции x, построенную в виде степенного ряда по x_0, μ, и через $F_1^*(x_2)$ – мажоранту Ляпунова [5, 4] функции $F_1(x_2)$, в качестве которой возьмем $F_1^*(x_2) = M_1 x_2^3/6$.

Составим на основании (3.3) таким же способом, как в [4], мажорирующие уравнения, принимая во внимание неравенство (3.2) и ограниченность функции $f(t)$,

$$\|f(t)\| \leq f_0, \quad f_0 = \mathrm{const} > 0, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Имеем уравнения

$$u_2 = C'(|\dot{\vartheta}_0| + |\vartheta_0|) + C'M_1\frac{u_2^3}{6\beta'} + \mu\varphi^*, \quad u_1 = u_2, \tag{3.4}$$

где $\varphi^* = f_0 C'/(\beta' J)$. Уравнения (3.4) определяют u_1, u_2 в виде сходящихся степенных рядов по малым величинам $|\dot{\vartheta}_0|, |\vartheta_0|, \mu$.

Введем в рассмотрение постоянные u_1^0, u_2^0, v_0 и мажоранту v, полагая

$$\begin{aligned} &\dot{\vartheta}_0 = \mu u_1^0, \qquad \vartheta_0 = \mu u_2^0, \\ &v_0 = C'(|u_1^0| + |u_2^0|) + \varphi^*, \quad u_2 = \mu(v_0 + v). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Тогда на основании (3.4) получаем мажорирующее уравнение

$$v = \mu^2 \frac{C' M_1}{6\beta'} (v_0 + v)^3, \tag{3.6}$$

из которого v определяется в форме степенного ряда по μ. Радиус сходимости μ_0 этого ряда находится как решение уравнения (3.6) и соотношения [5], получаемого дифференцированием по v уравнения (3.6),

$$1 = \mu^2 \frac{C' M_1}{2\beta'} (v_0 + v)^2. \tag{3.7}$$

Соотношение (3.7) дает значение

$$v = \frac{\alpha_0}{\mu} - v_0, \quad \alpha_0 = \Big(\frac{2\beta'}{C' M_1}\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.8}$$

подставив которое в уравнение (3.6), получаем

$$v = \frac{1}{2} v_0. \tag{3.9}$$

Следовательно, на основании (3.6), (3.8) находим

$$\mu_0 = \frac{2\alpha_0}{3v_0}, \quad \text{т. е.} \quad \mu_0 = \frac{2\alpha_0}{3[C'(|u_1^0| + |u_2^0|) + \varphi^*]}, \tag{3.10}$$

и степенной ряд по μ для $v(\mu)$ сходится при $0 \leq \mu \leq \mu_0$.

Итак, учитывая (3.5), (3.9), (3.10), для u_2 получаем оценку

$$u_2 \leq \frac{3}{2} \mu_0 v_0 = \alpha_0. \tag{3.11}$$

В качестве постоянной Φ_0 ввиду соотношения (2.2) возьмем величину

$$\Phi_0 = M_1.$$

Вычислим оценку области притяжения для предельно периодического решения $x^0(t) = \mathrm{col}(x_1^0(t), x_2^0(t))$.

Положим $x_1 = x_1^0(t) + y_1$ $x_2 = x_2^0(t) + y_2$. Для возмущения $y = \mathrm{col}(y_1, y_2)$ имеем уравнение в форме (2.1)

$$\frac{dy}{dt} = Ay + \int\limits_0^t K(t-s)y(s)ds + \Phi(t,\mu)y + F'(x^0(t) + y),$$

где $F' = \mathrm{col}(F_1'(x_2^0(t)+y_2), 0)$ и $F_1'(x_2^0(t)+y_2)$ – степенной ряд по y_2 функции $F_1(x_2^0(t) + y_2)$, начинающийся с квадратичного члена, A и $\Phi(t,\mu)$ – известные матрицы согласно уравнению (3.1).

Пусть $w = \mathrm{col}(w_1, w_2)$ – мажоранта функции y, где $w_1 >> y_1$, $w_2 >> y_2$.

Мажоранту V функции $F_1(x_2^0(t) + y_2)$, используя ранее введенную мажоранту для функции $\sin x$, возьмем в виде

$$V = \frac{M_1}{6}(w_2^3 + 3w_2^2 u_2),$$

где мажоранта u_2 функции $x_2^0(t)$ подчинена неравенству (3.11).

Для мажоранты w_2 ввиду неравенства (2.6) имеем уравнение

$$w_2 = \varepsilon(|y_1^0| + |y_2^0|) + \frac{M_1}{6\kappa}(w_2^3 + 3w_2^2 u_2), \tag{3.12}$$

где y_1^0, y_2^0 – начальные значения функций y_1, y_2.

Граница области изменения малой величины y^*

$$y^* = \varepsilon(|y_1^0| + |y_2^0|)$$

(поскольку $|y_1^0|$, $|y_2^0|$ малы) определяется [5] соотношением

$$1 = \frac{M_1}{2\kappa}(w_2^2 + 2w_2 u_2) \tag{3.13}$$

совместно с уравнением (3.12). Вычитая из (3.12) соотношение (3.13), умноженное на $\frac{1}{3}w_2$, получаем равенство

$$\frac{2}{3}w_2 = \varepsilon(|y_1^0| + |y_2^0|) + \frac{M_1}{6\kappa}w_2^2 u_2. \tag{3.14}$$

Исключив w_2^2 из (3.13) и (3.14), получаем линейное соотношение, из которого находим w_2:

$$w_2 = \frac{\kappa(u_2 + 3y^*)}{2\kappa + M_1 u_2^2}. \tag{3.15}$$

Подставляя значение w_2 (3.15) в (3.14) и полагая

$$\tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{2\kappa + M_1 u_2^2}, \tag{3.16}$$

приходим к уравнению относительно y^* :

$$9\tilde{\kappa}^2 u_2 M_1 y^{*2} + (6\kappa - 12\kappa\tilde{\kappa} + 6M_1\tilde{\kappa}^2 u_2^2)y^* + \tilde{\kappa}^2 M_1 u_2^3 - 4\kappa\tilde{\kappa}u_2 = 0. \tag{3.17}$$

Положительное решение y_+^* уравнения (3.17), учитывая (3.16), можно представить после преобразований таким образом:

$$y_+^* = -\frac{u_2}{3\kappa}(3\kappa + M_1 u_2^2) + \frac{(2\kappa + u_2^2 M_1)^{\frac{3}{2}}}{3\kappa M_1^{\frac{1}{2}}}$$

или в другой форме:

$$y_+^* = \frac{\kappa}{3B}(8\kappa + M_1 u_2^2),$$
$$B = M_1 u_2(3\kappa + M_1 u_2^2) + (2\kappa + M_1 u_2^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{M_1}. \tag{3.18}$$

Таким образом, имеем оценку для изменения начальных значений

$$|y_1^0| + |y_2^0| < \frac{y_+^*}{\varepsilon}, \tag{3.19}$$

и, кроме того, одновременно должно выполняться неравенство, вытекающее из условия (2.7):

$$|y_1^0| + |y_2^0| < \frac{\varepsilon}{C'} - \frac{\varepsilon\Phi_0}{\beta' - \kappa}. \tag{3.20}$$

Неравенство (3.20) может быть удовлетворено, например, выбором малой величины M в выражении $\Phi_0 = M/J$, т.е. при условии, что центр масс вала расположен вблизи от оси вращения.

Подставив в формулу (3.18) максимальное значение $u_2 = \alpha_0$ согласно (3.11), (3.8) и обозначениям в формуле (3.3), получим для максимального значения y_* величины y_+^* выражение

$$\begin{gathered} y_* = \frac{\kappa}{3B^*}\Big(8\kappa + \frac{2\beta'}{C'}\Big), \\ B^* = \Big(\frac{M}{J}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big[\Big(\frac{2\beta'}{C'}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(3\kappa + \frac{2\beta'}{C'}\Big) + \Big(2\kappa + \frac{2\beta'}{C'}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big]. \end{gathered} \tag{3.21}$$

Постоянная C', входящая в соотношения (3.19) – (3.21), требует отдельного определения либо численно, либо аналитически. Например, для малых интегральных ядер $K(t)$ это может быть осуществлено путем построения общего решения линейного уравнения методом последовательных приближений (или в виде ряда по малому параметру) и последующего мажорирования этого решения, как это было проделано выше.

Оценка (3.19) должна выполняться наряду с условием (3.20), наложенным на линеаризованное уравнение. При этом остаются свободными параметры ε, κ, μ, выбором которых (при заданной C') можно распорядиться для расширения оценки.

Для изменения параметра μ ввиду (3.8), (3.10) имеем следующий интервал:

$$0 \le \mu < \mu_0 = \frac{1}{3\sqrt{M}}\Big(\frac{2\beta' J}{C'}\Big)^{\frac{3}{2}}[(|u_1^0| + |u_2^0|)\beta' + f_0]^{-1}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00536 и 12-08-00637).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во Киргиз. гос. ун-та, 1957. 327 с.

2. *Сергеев В.С.* О предельно периодических движениях в некоторых системах с последействием // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 857-869.

3. *Астапов И.С.* Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений аэроупругости // Вестник МГУ. Сер. матем., механ. 1981. № 6. С. 89-95.

4. *Сергеев В.С.* Об асимптотической устойчивости и оценке области притяжения в некоторых системах с последействием. // ПММ. 1996. Т.60. Вып.5. С.744-751.

5. *Лика Д.К., Рябов Ю.А.* Методы итераций и мажорирующее уравнение Ляпунова в теории нелинейных колебаний. Кишинев: Штиинца, 1974. 291 с.

6. *Volterra V.* Theory of Functionals and Integrals and Integro-Differential Equations. N.Y.: Dover, 1959. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.

УДК 531

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ ЗАТОЧКИ ИНСТРУМЕНТА НА ТОЧИЛЬНОМ КРУГЕ

А. С. Сумбатов

Решена элементарная задача о нахождении точки соприкосновения и угла наклона инструмента, затачиваемого на точильном круге, при которых давление круга на инструмент оказывается минимальным по величине.

Ключевые слова: сухое трение, коэффициент трения скольжения, угол трения, равновесие, минимум функции.

Всем, кому приходилось точить инструмент, например зубило на абразивном круге, хорошо известно, что если неправильно рассчитать силу, точку соприкосновения и наклон инструмента, то можно не удержать инструмент в руках. Последствия бывают серьезные.

На рис. декартовы оси координат имеют своим началом точку касания O однородного стержня (зубила) и точильного круга. Ось Ox составляет угол α с горизонтом, а стержень – угол β с осью Ox. Сила тяжести P приложена в середине G стержня, $OG = a$. Предположим, что для удержания стержня в равновесии требуется приложить к нему сосредоточенную силу (F_x, F_y) в точке стержня, отстоящей от его конца O на расстоянии λa $(0 < \lambda \leq 2)$, а также момент M. Со стороны круга на стержень действуют сила нормального давления $R_x = N > 0$ и сила трения скольжения $R_y = -Nf < 0$ (f – коэффициент трения скольжения [1]).

[1] *Самсонов В.А.* Очерки о механике: Некоторые задачи, явления и парадоксы. Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“. 2001. 80 с.

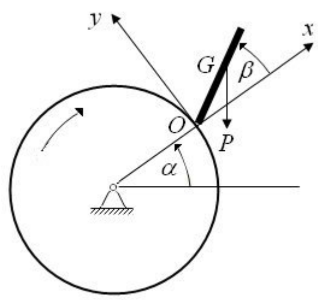

Рис.1. Точильный круг

Из уравнений равновесия стержня (момент сил подсчитан относительно точки O)

$$N - P\sin\alpha + F_x = 0, \qquad -Nf - P\cos\alpha + F_y = 0,$$
$$M - Pa\cos(\alpha+\beta) + \lambda a\,(F_y\cos\beta - F_x\sin\beta) = 0.$$

находим силу

$$N = \frac{\cos\gamma}{\lambda\sin(\gamma+\beta)}\left[-\frac{M}{a} + (1-\lambda)P\cos(\alpha+\beta)\right], \qquad (1)$$

где $\gamma = \operatorname{arctg} f$ – угол трения.

Из полученной формулы следует, что с помощью подходящего силового момента M (и соответствующей сосредоточенной силы) стержень может быть уравновешен, поскольку условие $N > 0$ всегда может быть удовлетворено. Но из этой же формулы следует, что при *дополнительном* условии (полагаем, что $-\pi/2 < \alpha + \beta < \pi/2$, $-\pi/2 < \beta < \pi/2$)

$$\frac{1-\lambda}{\sin(\gamma+\beta)} > 0$$

стержень можно уравновесить только тремя сосредоточенными силами: реакцией со стороны точильного круга, весом стержня и приложенной к стержню силой точильщика. Именно: в случае $\lambda < 1$ (пальцы точильщика расположены близко к точильному кругу) сумма угла β и угла трения должна быть положительной, а в случае $\lambda > 1$ – отрицательной.

Ещё замечаем, что, когда $\beta \to -\gamma$, сила N неограниченно возрастает (впрочем, никогда опытный точильщик не держит инструмент навстречу набегающему точильному кругу).

Пусть к стержню приложен уравновешивающий силовой момент M и выполняется условие

$$-\frac{M}{a} + (1-\lambda)P > 0. \tag{2}$$

Фиксируем значения параметров M и λ и зададимся вопросом: имеет ли сила давления N как функция переменных α и β экстремальные значения?

Первый дифференциал функции $q = \lambda N(\alpha,\beta)/\cos\gamma$ равен

$$\begin{aligned}
&dq = q'_\alpha\, d\alpha + q'_\beta\, d\beta\,,\\
&q'_\alpha = \frac{(\lambda-1)P\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\gamma+\beta)}\,,\\
&q'_\beta = \frac{\dfrac{M}{a}\cos(\gamma+\beta) + (\lambda-1)P\cos(\gamma-\alpha)}{\sin^2(\gamma+\beta)}\,.
\end{aligned}$$

Критические точки функции определяются системой уравнений

$$q'_\alpha = 0, \qquad q'_\beta = 0.$$

Из первого уравнения находим, что $\alpha = -\beta$. Тогда второе уравнение $\cos(\gamma+\beta) = 0$ позволяет найти критическую точку (она оказывается единственной при тех ограничениях, которые были наложены выше на промежутки изменения углов):

$$\alpha = \gamma - \pi/2, \quad \beta = \pi/2 - \gamma\,, \tag{3}$$

т.е. β – угол, дополнительный к углу трения, α по знаку противоположен углу β.

В точке (3) в силу условия (2) правая часть (1) положительна, как и должно быть.

Второй дифференциал равен

$$d^2q = A(d\alpha)^2 + 2C\,d\alpha\,d\beta + B(d\beta)^2.$$

Здесь

$$A = \frac{(\lambda-1)P\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\gamma+\beta)}\,, \quad C = \frac{(\lambda-1)P\sin(\gamma-\alpha)}{\sin^2(\gamma+\beta)}\,,$$

$$B = \frac{\dfrac{M}{a}\left[\sin^2(\gamma+\beta)-2\right] + 2(1-\lambda)P\cos(\gamma-\alpha)\cos(\gamma+\beta)}{\sin^3(\gamma+\beta)}\,.$$

В точке (3)

$$A = (\lambda-1)P\,, \quad B = -\frac{M}{a}\,, \quad C = (\lambda-1)P\,,$$

$$AB - C^2 = (\lambda-1)P\left[-\frac{M}{a} + (1-\lambda)P\right].$$

В силу условия (2) знаки выражений A и $AB-C^2$ совпадают. Они имеют знак плюс только при условии, что $\lambda > 1$. Таким образом, если

$$\lambda > 1,$$

то локальный минимум функции $N(\alpha,\beta)$ достигается в точке (3), причем согласно выражению (1)

$$N_{min} = \frac{1}{\lambda\sqrt{1+f^2}}\left[-\frac{M}{a} + (1-\lambda)P\right]\,. \tag{4}$$

В противном случае, если $\lambda \le 1$, в найденной критической точке экстремума нет.

Заметим, что из (2) вытекает, что $P > M/a$, поэтому выражение (4) как функция параметра λ монотонно убывает. Если для всех значений $1 < \lambda \leq 2$ неравенство (2) выполняется, то $-0,5(M/a + P)\cos\gamma > 0$ – минимально возможное значение давления точильного круга на стержень. Если при некотором $1 < \lambda^* \leq 2$ выражение в левой части (2) обращается в нуль, то в случае $\lambda = \lambda^*$ точильщик удерживает в равновесии инструмент, не испытывая силового воздействия со стороны точильного круга (идеальный случай, потому что в силу знания лишь приближённо значения коэффициента f, следовательно, и угла трения γ „поймать“ точно это положение инструмента на практике невозможно).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00536 и 12-08-00637).

УДК 531.36, 334.01

О РАЧИТЕЛЬНОМ ЭКОНОМИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

А.А.Буров

Вопрос о рачительном и нерачительном хозяйствовании рассматривается с точки зрения классической механики. Предлагается подход к его описанию с помощью аналога уравнений Ньютона и уравнений Лагранжа второго рода, дается экономическая трактовка фундаментальных понятий механики таких, например, как кинетическая и потенциальная энергия.

В 2009 году исполнилось сто лет с выхода знаменитой публикации Леона Вальраса "Экономика и механика" [1]. В этой своей последней работе Л.Вальрас еще раз сделал попытку найти аналоги между законами поведения хозяйствующих субъектов и законами механики. Такая естественная идея, прежде всего, попытка построения той или иной аксиоматики, позволяющей так или иначе описывать производство и потребление, восходящая, вероятно, к работам Адама Смита, достаточно широко представлена в исследованиях современных экономистов [2–9]. В частности, большое внимание уделяется уравнениям, возникающим как уравнения экстремалей дисконтированного функционала полезности. Такие уравнения хорошо известны в механике – они представляют собой уравнения Гамильтона с диссипативными силами специального вида, определенными способом введения дисконтирования. При их исследовании, в частности, ставится вопрос изучения регулярного и хаотического поведения, установившихся "движений" и их устойчивости. При этом, задача производства, как правило, формулируется так ([10]): "выбрать норму накопления s так, чтобы максимизировать приведенное потребление[1] *на плановом периоде".*

В то же время, скорее всего именно "рыночная" ориентированность предлагаемых моделей не дала возможности вычленить простую и понятную аксиоматику, аналогичную ньютоновской, известной из механики – во главу исследований ставится наличие товарного обмена, максимизация прибыли и прочие факторы, затеняющие смысл производства и потребления, как элементов человеческого бытия. Более того, как на то указывают, например, результаты [9,11], правильное описание больших экономических систем, в которых существенна роль игрового элемента, еще более усугубляемая наличием денег в их современном смысле, требует принципиально иного подхода к попыткам статистического описания материальной составляющей современного бытия.

При наличии "диссипации" - будь она фискального происхождения или порождена устареванием, "утруской и усушкой" – предлагаемая аксиоматика никак не может покинуть рамок "аристотелевой аксиоматики механики", согласно которой для поддержания движения требуется постоянное приложение силы к движущемуся объекту. Попытке преодолеть имеющееся положение вещей посвящена настоящая работа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 12-01-00536-а, 12-08-00637-а.

Ключевые слова: рачительный хозяин, кинетическая энергия, потенциальная энергия, уравнения Ньютона, уравнения Лагранжа, положение равновесия, периодическое движение, многочастотные колебания.

1. Постановка задачи. Пространство конфигураций. Рассмотрим хозяйственную деятельность рачительного хозяина (РХ) с точки зрения классической механики. Под рачительностью будем понимать такое поведение хозяина, при котором

[1]выделено нами

вся его хозяйственная деятельность ориентирована на то, чтобы гарантировать свои производство и потребление, не выходя за рамки замкнутой системы домашнего хозяйства. Иными словами, в идеале РХ организует свою жизнь и свою хозяйственную деятельность вне зависимости от какого бы то ни было товарообмена, т.е. ведет натуральное хозяйство. В то же время, если хозяину не удается организовать свои дела так, чтобы его хозяйствование можно было назвать рачительным, то будем называть такого хозяина нерачительным (НРХ).

Конфигурационное пространство. Пусть события развиваются в *пространстве запасов* $\mathcal{X}$ размерности n и состоят в потреблении и производстве продуктов, количество которых в кладовой определяется векторной величиной $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Быстрота изменения компонент вектора $\mathbf{x}$, т.е. разница между быстротой производства и быстротой потребления продуктов x_i, $i = 1, \ldots, n$, определяется вектором $\mathbf{v} = (v_1, \ldots v_n)$, таким что $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$. Таким образом если $v_i < 0$, то потребление происходит быстрее чем производство, и количество i-го продукта в кладовой убывает, в то время как при $v_i > 0$ i-ый продукт производится быстрее, чем потребляется, и кладовая наполняется этим продуктом.

Примечание 1. Пространство $\mathcal{X}$ аналогично конфигурационному пространству в механике. Заметим, что в рамках данного рассмотрения нет и речи о том, что имеется некоторое количество хозяев, осуществляющих деятельность в одном и том же, общем для всех них конфигурационном пространстве. Грубо говоря, хотя картошка в моей кладовой идентична по потребительским свойствам картошке в кладовой соседа, у меня нет никаких оснований и никакой возможности распоряжаться соседской картошкой. Этим отличается представление о конфигурационном пространстве от того, что принято в классической механике, когда предполагается, что движение осуществляется в общем для всех точек однородном трехмерном евклидовом пространстве.

“Первый закон Ньютона”. При отсутствии внешних воздействий натуральное хозяйство пребывает в состоянии равновесия. В таком состоянии количество производимого и количество потребляемого равны между собой в любой момент времени.

“Второй закон Ньютона”. “Уравнения Ньютона”. Будем считать, что свои привычку работать и привычку потреблять всякий хозяин описывает функцией $T = T(\mathbf{v}, \mathbf{q})$, аналогичной кинетической энергии в классической механике. Как и в механике, можно считать, что

$$T(0, \mathbf{q}) = 0, \quad T = T(\mathbf{v}, \mathbf{q}) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} \neq 0, \tag{1.1}$$

хотя это совершенно необязательно. Так, для систем, которые по аналогии с механикой будут называться *натуральными,*

$$T(q) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{m}(\mathbf{q})\mathbf{v}, \mathbf{v}\right), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{m}(\mathbf{q})$ – “тензор инерции” хозяина, т.е. величина, описывающая его привычки в отношении производства и потребления. Тензор инерции в общем случае будем считать зависящим от состояния запасов $\mathbf{q}$ и, быть может, от времени. В простейшем случае для натуральных систем

$$T(q) = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2. \tag{1.3}$$

Можно ввести аналог понятия количества движения

$$\mathbf{p} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}}, \tag{1.4}$$

экономическая интерпретация которого требует отдельного обсуждения. Так, в случае натуральной системы

$$\mathbf{p} = \mathbf{m}(\mathbf{q})\mathbf{v}. \tag{1.5}$$

П р и м е ч а н и е. Из специальной теории относительности можно заимствовать функцию T в виде

$$T(\mathbf{q}) = -E\sqrt{1 - \frac{(\mathbf{m}(\mathbf{q})\mathbf{v}, \mathbf{v})}{E}}, \tag{1.6}$$

где E - постоянная, имеющая ту же размерность, что и T. При этом импульс примет вид

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{m}(\mathbf{q})\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{(\mathbf{m}(\mathbf{q})\mathbf{v}, \mathbf{v})}{E}}} \tag{1.7}$$

Будем считать, что состояние кладовой любого хозяина описывается функцией $U = U(\mathbf{q})$, определенной в пространстве запасов и аналогичной потенциальной энергии в классической механике. Такая функция, например, может иметь вид

$$U(q) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}\left(\mathbf{q} - \mathbf{q}^o\right), \left(\mathbf{q} - \mathbf{q}^o\right)\right), \tag{1.8}$$

где $\mathbf{q}^o$ – то самое равновесие, которое возникает в формулировке "первого закона Ньютона".

Динамика производства и потребления описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \quad L = T - U. \tag{1.9}$$

Так как функция Лагранжа L предполагается не зависящей явно от времени, то уравнение (1.9) допускает первый интегралБ известный как интеграл Пенлеве – Якоби – обобщённый интеграл энергии

$$\mathcal{J}_0 = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \mathbf{v}\right) - L = h. \tag{1.10}$$

В простейшем случае, когда "кинетическая энергия" определена соотношением (1.2), этот интеграл представим в виде

$$\mathcal{J}_0 = T + U = h. \tag{1.11}$$

В силу соотношения (1.10) и положительной определенности "кинетической энергии" (1.1) имеет место неравенство

$$U(\mathbf{q}) = h - T \leq h, \tag{1.12}$$

определяющее ограничение на положение системы при заданном уровне интеграла энергии. Область

$$\Sigma_h = \{\mathbf{q} : \quad U(\mathbf{q}) \leq h\},$$

как и в механике, будем называть *областью возможных движений.* При фиксированном значении постоянной энергии эту область можно рассматривать как *производственный потенциал:* какими бы ни были действия хозяина при данном уровне интеграла энергии, его запасы не смогут покинуть области возможного движения. Область возможного движения также позволяет оценивать запасы тех или иных продуктов по отдельности или в совокупности в рамках предположения о том, что запасы всех прочих продуктов фиксированы.

В одномерном случае уровни этого интеграла, изображенные на фазовой плоскости, позволяют делать суждения о состоянии дел данного хозяина.

2. Один продукт. Линейные модели. Пусть для начала хозяйственная деятельность задается функциями (1.8), (1.1) в пространстве запасов размерности единица, т.е производится и потребляется ровно один продукт. Тогда фазовый портрет уравнения движения, которые оказываются линейными, представлен на рис. 1 в случае, когда $c > 0$, и на рис. 2, когда $c < 0$, где c – единственная компонента матрицы $\mathbf{C}$.

Эллиптический случай. Обратим внимание на основные свойства фазового портрета в случае $c > 0$, т.е. в случае, когда потенциал $U(q)$ – выпуклая вниз функция, достигающая своего минимума в точке q^o. Пусть для начала $q^o > 0$ (рис. 1,a). Тогда

1. Уравнения (1.9) обладают равновесным решением $(0, q^o)$. Для такого решения все, что производится, тут же потребляется и запасы остаются неизменными.

2. Равновесное решение $(0, q^o)$ устойчиво – оно окружено семейством периодических решений одного и того же периода [2]. Этот период можно разбить на четыре равные части, которые можно назвать так же, как и сезоны:

   2.1. *Весна,* когда запасы находятся вблизи своего минимума, но происходит замена преобладания скорости потребления над скоростью производства на противоположное состояние;

   2.2. *Лето,* когда запасы близки к равновесным и превышение скорости производства над скоростью потребления близко к максимальному;

   2.3. *Осень,* когда запасы близки к максимальным, но происходит замена преобладания скорости производства над скоростью потребления на противоположное состояние;

---

[2]свойство изохронности, т.е. независимости периода от амплитуды выглядит несколько нереальным, но, как известно, такова особенность линейных систем.

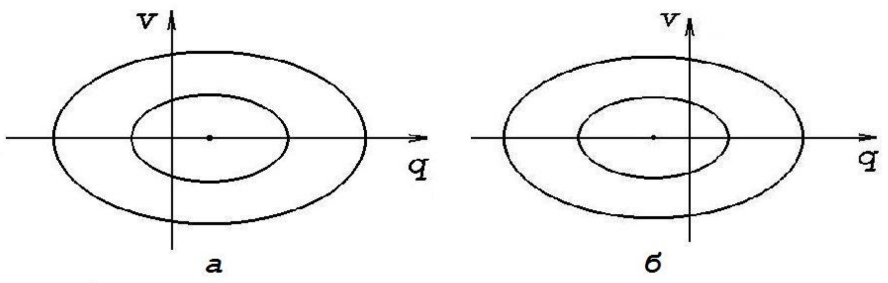

Рис.1

2.4. *Зима,* когда запасы близки к равновесным и превышение скорости потребления над скоростью производства максимально.

3. Среди периодических решений имеются те, что пересекают ось $q = 0$, и те, что ее не пересекают.

   3.1. Пусть периодическое решение не пересекает ось $q = 0$, разве что касается ее. В этом случае за весь жизненный цикл хозяину не приходится залезать в долги. Такое хозяйствование можно признать рачительным.

   3.2. Пусть теперь периодическое решение пересекает ось $q = 0$. Это означает, что жизненный цикл хозяина пресекается, или, если будет такая возможность, ему придется залезать в долги. Такое хозяйствование трудно признать рачительным.

Пусть теперь $q^o < 0$ (рис.1,б). В этом случае пояснения надо несколько переменить. Ограничимся рассмотрением того случая, когда у хозяина имеется возможность жить в долг. Противоположный случай представляется слишком печальным.

1. Уравнения (1.9) обладают равновесным решением $(0, q^o)$.

Для такого решения все, что производится, тут же потребляется, и долги остаются неизменными.

2. Равновесное решение $(0, q^o)$ устойчиво – оно окружено семейством периодических решений одного и того же периода. Этот период также можно разбить на четыре равные части, которые можно назвать так же, как и сезоны:

   2.1. *Весна,* когда долги находятся вблизи своего максимума, но происходит замена преобладания скорости потребления над скоростью производства на противоположное состояние;

   2.2. *Лето,* когда долги близки к равновесным и превышение скорости производства над скоростью потребления близко к максимальному;

   2.3. *Осень,* когда долги близки к минимальным, а то и вовсе отсутствуют (см. п.3), но происходит замена преобладания скорости производства над скоростью потребления на противоположное состояние;

   2.4. *Зима,* когда долги близки к равновесным и превышение скорости потребления над скоростью производства максимально.

3. Среди периодических решений имеются те, что пересекают ось $q = 0$, и те, что ее не пересекают.

   3.1. Пусть периодическое решение не пересекает ось $q = 0$ или, в крайнем случае, касается ее. В этом случае за весь жизненный цикл хозяин не вылезает из долгов и в случае касания лишь обнуляет их.

   3.2. Пусть теперь периодическое решение пересекает ось $q = 0$ или касается ее. Это означает, что хозяин периодически вылезает из долгов, но потом вновь оказывается должен.

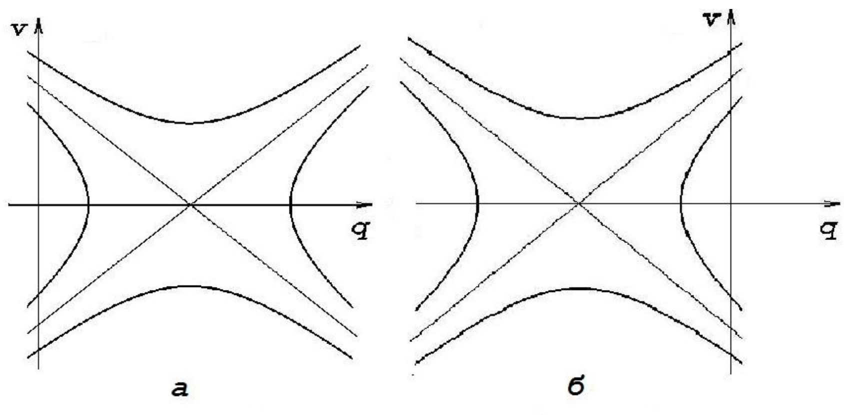

Рис.2

Таким образом, хозяйствование при $q^o < 0$ нельзя признать рачительным.

Гиперболический случай. Поясним теперь основные свойства фазового портрета в случае $c < 0$, т.е. в случае, когда потенциал $U(q)$ – выпуклая функция, достигающая своего максимума в точке q^o. Пусть для начала $q^o > 0$ (рис.2,а). Тогда

1. Уравнения (1.9) обладают равновесным решением $(0, q^o)$. Для такого решения все, что производится, тут же потребляется, и запасы остаются неизменными.

2. Равновесное решение $(0, q^o)$ – неустойчивое решение гиперболического типа. В него "впадают" две устойчивые сепаратрисы, из него "вытекают" две неустойчивые сепаратрисы. Эти сепаратрисы разделяют фазовую плоскость на четыре области, в каждой из которых фазовые траектории – ветви гиперболы.

3. Свойства сепаратрис можно пояснить так:

   3.1. На *устойчивой сепаратрисе* W_s^+ происходит экспоненциально затухающее пополнение запасов, величина которых стремится к равновесному значению q^o;

3.2. На *неустойчивой сепаратрисе* W_u^+ происходит экспоненциально нарастающее пополнение запасов, величина которых изначально близка к равновесному значению q^o;

3.3. На *устойчивой сепаратрисе* W_s^- происходит экспоненциально затухающее оскудение запасов, величина которых стремится к равновесному значению q^o;

3.4. На *неустойчивой сепаратрисе* W_u^+ происходит экспоненциально нарастающее оскудение запасов, величина которых изначально близка к равновесному значению q^o.

4. Свойства гиперболических решений можно описать так:

4.1. Решениям из области I отвечает “раскрутка” из состояния нулевых запасов до некоторой максимальной величины, сопровождающаяся экспоненциально нарастающим убыванием запасов и последующим разорением.

4.2. Решениям из области II отвечает “раскрутка” из состояния нулевых запасов, сопровождающаяся замедлением темпов накопления при величине запасов, близкой q^o, и дальнейшим экспоненциальным нарастанием как самих запасов, так и темпов их прироста.

4.3. Решениям из области III отвечает экспоненциально быстрое сокращение запасов до некоторой минимальной величины и дальнейшим экспоненциальным нарастанием как самих запасов, так и темпов их прироста.

4.4. Решениям из области IV отвечает экспоненциально быстрое сокращение запасов, сопровождающаяся замедлением темпов сокращения при величине запасов, близкой q^o, и дальнейшим экспоненциально нарастающим убыванием запасов вплоть до разорения.

Естественно, что в случаях, ведущих к разорению, речь идет о НРХ. Но и случаи, когда запасы нарастают до сколь угодно больших величин, вряд ли можно отнести к деятельности РХ – такое поведение противоречит твёрдо установленному факту конечности земной жизни. С определенными оговорками речь идёт о РХ в случаях устойчивых сепаратрис – эти правила хозяйствования несут в себе большой риск сорваться либо в режим разорения, либо в режим нарастающей жадности.

Пусть теперь $q^o < 0$ (рис.2,б). Тогда

1. Уравнения (1.9) обладают равновесным решением $(0, q^o)$. Для такого решения все, что производится, тут же потребляется, и долги остаются неизменными.

2. Равновесное решение $(0, q^o)$ – неустойчивое решение гиперболического типа. В него “впадают” две устойчивые сепаратрисы, из него “вытекают” две неустойчивые сепаратрисы. Эти сепаратрисы разделяют фазовую плоскость на четыре области, в каждой из которых фазовые траектории – ветви гиперболы.

3. Свойства сепаратрис можно пояснить так:

   3.1. На *устойчивой сепаратрисе* W_s^+ происходит экспоненциально затухающее погашение долгов, величина которых стремится к равновесному значению q^o;

   3.2. На *неустойчивой сепаратрисе* W_u^+ происходит экспоненциально нарастающее погашение долгов, величина которых изначально близка к равновесному значению q^o;

3.3. На *устойчивой сепаратрисе* W_s^- происходит экспоненциально затухающее нарастание долгов, величина которых стремится к равновесному значению q^o;

3.4. На *неустойчивой сепаратрисе* W_u^+ происходит экспоненциальное нарастание долгов, величина которых изначально близка к равновесному значению q^o.

4. Свойства гиперболических решений можно описать так:

4.1. Решениям из области I отвечает погашение долгов до некоторой минимальной величины, сопровождающееся дальнейшим экспоненциально нарастанием долгов и последующим разорением.

4.2. Решениям из области II отвечает "раскрутка" из состояния нулевых запасов, сопровождающаяся замедлением темпов накопления при величине запасов, близкой q^o, и дальнейшим экспоненциальным нарастанием как самих запасов, так и темпов их прироста.

4.3. Решениям из области III отвечает экспоненциально быстрое сокращение запасов до некоторой минимальной величины и дальнейшим экспоненциальным нарастанием как самих запасов, так и темпов их прироста.

4.4. Решениям из области IV отвечает экспоненциально быстрое сокращение запасов, сопровождающееся замедлением темпов сокращения при величине запасов, близкой q^o, и дальнейшим экспоненциально нарастающим убыванием запасов вплоть до разорения.

Естественно, что в случаях, ведущих к разорению, речь идет о НРХ. Но и случаи, когда запасы нарастают до сколь угод-

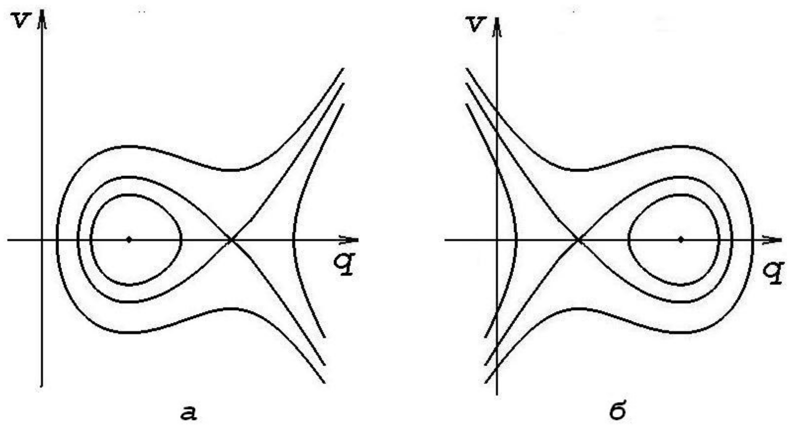

Рис.3

но больших величин, вряд ли можно отнести к деятельности РХ – такое поведение противоречит твердо установленному факту конечности земной жизни. С определенными оговорками речь идет о РХ в случаях устойчивых сепаратрис – эти правила хозяйствования несут в себе большой риск сорваться либо в режим разорения, либо в режим нарастающей жадности.

3. Один продукт. Нелинейные модели. Обратимся теперь к случаю, когда функция T по-прежнему имеет вид (1.1), но функция U – не квадратична. В этом случае разнообразие фазовых портретов столь велико, что "экономическую интерпретацию" надо давать в каждом отдельном случае.

Пусть, например, потенциал U кубичен по координате q. В этом случае в задаче имеется одно устойчивое равновесие эллиптического типа E^1 и одно неустойчивое равновесие гиперболического типа H^1. При этом, одна входящая и одна выходящая сепаратрисы гиперболического равновесия H^1 совпадают и охватывают устойчивое равновесие E^1, а две другие входящая и выходящая сепаратрисы простираются до безконечности. Типичные фазовые портреты изображены на рис.3.

Заметим, что с точки зрения экономической интерпретации наблюдаемых типов движения уже простейшие нелинейные модели одновременно вбирают в себя многие особенности линейного колебательного и гиперболического поведения. В частности, в кубической модели можно наблюдать

1) периодические движения, охватывающие устойчивое равновесие и присущие колебательному движению линейной системы,

2) экспоненциально быстрые приход с бесконечности и уход на бесконечность, присущие гиперболическому поведению линейной системы,

3) присущие сепаратрисам линейной системы асимптотическое стремление к неустойчивому равновесию и асимптотический исход из него.

В то же время, несомненно, для кубического потенциала имеются и некоторые качественные различия. Среди них укажем прежде всего:

1) неизохронность периодических движений, охватывающих устойчивое положение равновесия E^1 – их период существенно зависит от их амплитуды;

2) наличие петли сепаратрисы, не наблюдаемое ни в одной из линейных моделей. Эта петля соседствует, с одной стороны, с находящимися внутри нее долгопериодическими движениями, и, с другой стороны, с движениями, приходящими с бесконечности и вновь уходящими на нее, однако пребывающими предельно долгое время в окрестности этой петли,

3) наличие ровно одной пары сепаратрис, простирающихся на бесконечность,

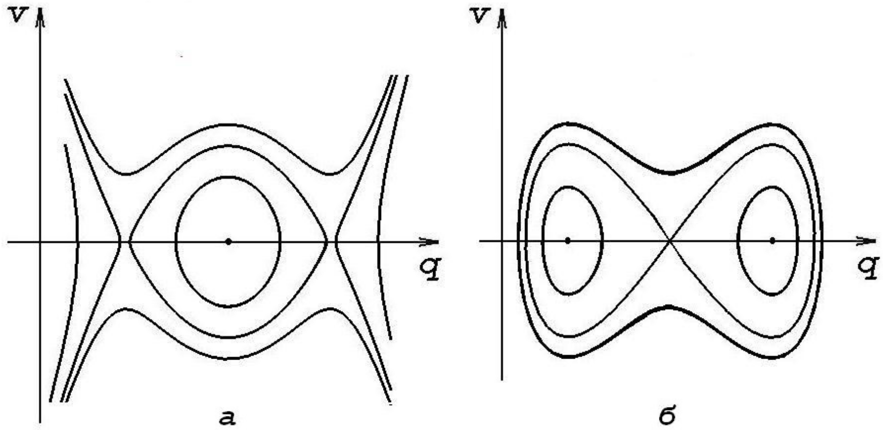

Рис.4

4) в противоположность линейной гиперболической модели, для всех неограниченных движений имеет место

   4.1) либо гарантированное разорение – в случае, когда количество запасов на эллиптическом равновесии превосходит количество запасов на гиперболическом равновесии,

   4.2) либо гарантированный экспоненциальный рост – в противоположном случае, когда количество запасов на гиперболическом равновесии превосходит количество запасов на эллиптическом равновесии.

Для потенциала четвертой степени существенным оказывается ограниченность его сверху или снизу. Так, если потенциал ограничен сверху, то имеются как ограниченные, периодические решения, так и решения, уходящие на бесконечность и приходящие с нее (рис.4,а). В то же время для потенциала, ограниченного снизу, решений, уходящих на бесконечность, нет ни при одном значении постоянной интеграла энергии (рис.4,б).

4. Многопродуктовая линейная модель. Предположим теперь, что производство и потребление осуществляется в пространстве из n продуктов, но модель по-прежнему остается линейной и описывается уравнениями (1.9) с функцией Лагранжа, определяемой соотношениями (1.8), (1.2). Если матрица $\mathbf{A}$ зависит только от координат, то по теореме об одновременном приведении к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых положительно определена, существует линейная замена переменных

$$\mathbf{q} = \mathbf{RQ}, \tag{4.1}$$

позволяющая представить функции T и U как

$$T = \frac{1}{2}\mathbf{V}^2,\ U = \frac{1}{2}\left(c_1(Q_1 - Q_1^o)^2 + \cdots + c_n(Q_n - Q_n^o)^2\right),\ \mathbf{V} = \dot{\mathbf{Q}}.$$

Эта замена позволяет осуществить разделение переменных и представить уравнения движения в виде

$$\ddot{\mathbf{Q}}_i + c_i\left(\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_i^o\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Компоненты вектора $\mathbf{Q}$ с экономической точки зрения можно рассматривать как результат *агрегирования,* определяемого отображением, обратным отображению (4.1). Динамике по каждой из компонент этого вектора можно дать в точности ту же интерпретацию, как и для однопродуктовых моделей, описанных в разд. 2. Для положительных коэффициентов c_i соответствующие *агрегаты* будут демонстрировать динамику по колебательному, эллиптическому типу, в то время как для отрицательных c_i динамика соответствующих агрегатов будет гиперболична.

Полезно заметить, что в случае, когда $\mathbf{q}^o$ – устойчивое равновесие и имеют место периодические, с частотами $\omega_i = \sqrt{c_i}$, колебания по каждому из агрегатов, *наблюдаемые величины* –

компоненты вектора продуктов $\mathbf{q}_i$ – в общем случае из-за несоизмеримости частот будут меняются со временем квазипериодически. Вероятно поэтому изучение графиков зависимости состояния запасов от времени обычно оказывается затруднительным.

"Гироскопические силы". В ряде практически важных задач механики функция T – линейно - квадратична по скоростям, т.е. соотношение (1.1) имеет вид

$$T(q) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) + \left(\mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{v}, \mathbf{q}\right). \tag{4.3}$$

Линейная составляющая этой функции, как известно, определяет действующие в системе *гироскопические силы.* Пусть, как и всюду в этом разделе, матрица $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{B}$ постоянны. Тогда при квадратичном потенциале

$$U(q) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}\left(\mathbf{q}-\mathbf{q}^o\right), \left(\mathbf{q}-\mathbf{q}^o\right)\right), \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^T = const \tag{4.4}$$

уравнения движения примут вид

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\left(\mathbf{q}-\mathbf{q}^o\right) = 0, \tag{4.5}$$

где

$$\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T = \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \qquad -$$

постоянная кососимметрическая матрица гироскопических сил.

Гироскопические силы с точки зрения экономического поведения можно интерпретировать как источник не сопровождающейся энергетическими потерями перемены рода деятельности – перехода с производства и потребления одних продуктов на производство и потребление других. При этом уравнения движения при добавлении гироскопических сил по-прежнему допускают интеграл энергии (1.10). Иными словами, в зависимости от предпочтений гироскопические силы в экономике могут быть интерпретированы либо как “дань моде”, либо как источник консервативного “поведенческого разнообразия”.

В этой связи становится ясной и стабилизирующая роль “поведенческого разнообразия”: если $\mathbf{q}^o$ – неустойчивое равновесие четной степени неустойчивости, то правильная организация такого разнообразия позволяет его стабилизировать. В то же время, нечетность степени неустойчивости такого равновесия указывает на то, что оно не может быть стабилизировано посредством “модных нововведений”.

5. Многопродуктовая нелинейная модель. Общее исследование многопродуктовой нелинейной модели оказывается столь же затруднительным, сколь затруднительно исследование задач классической механики в случае, когда число степеней свободы превосходит единицу. Основная причина тому – отсутствие в общем случае дополнительных законов сохранения, не позволяющее осуществить эффективное агрегирование, которое в механике именуется *разделением переменных.*

В случае, когда экономическое поведение описывается натуральной консервативной системой, среди наиболее общих результатов помимо теоремы о существовании либрационных периодических решений (см., например, [12]), можно выделить и теоремы о существовании конечного числа импульсных управлений, позволяющих перевести систему из одного положения в пространстве запасов в любое другое без потери энергии посредством конечного числа переключений скорости изменения запасов [13].

О реальности и о торговле. Обратим внимание на то обстоятельство, что торговля в рассмотренных описаниях поведения, в целом, не предусмотрена – способ рачительного, “периодического” хозяйствования оказывается самодостаточным. Спрашивается, возможен ли такой механизм в реальности, в условиях, когда производство *товаров* для отдачи вовне, а не *запасов* для внутреннего потребления ставится во главу угла. Вероятно, ответ на этот вопрос положителен, пример чему дают правильно поставленные монастырские хозяйства, в которых трудники, мастера разных специальностей, работают, так сказать, “на один котел”, да и потребляют из того котла сообща, по тем или иным установленным правилам.

Что касается торговли, то в случае рачительного ведения хозяйствования поводом для отдачи вовне одних запасов в обмен на получение извне других может оказаться необходимость или желание “отодвинуть” область возможного движения системы в пространстве запасов от границ первого координатного угла, на которых тот или иной запас обращается в нуль. При нерачительном ведении хозяйствования поводов для торговли больше – отдача вовне одних запасов в обмен на получение извне других может перевести нерачительный способ хозяйствования в рачительный и тем самым устранить саморазрушение системы.

6. Приложение. Письмо г-на Анри Пуанкаре г-ну Леону Вальрасу[3]. Мой дорогой коллега, Вы не обратили внимания на мою мысль. Я отнюдь не хотел бы сказать, что Вы превысили "точные границы". Ваше определение предельной полезности кажется законным. Я мог бы его оправдать следующим образом. Можно ли измерить удовлетворенность? Я могу сказать, что вот это удовлетворенность больше вот того, потому что я предпочитаю одно другому. Но я не могу сказать, что вот эта удовлетворенность в два раза или в три раза больше, чем вон та. Такое высказывание само по себе не имеет смысла, и говорить можно не иначе как по произвольному соглашению.

Удовлетворенность - это величина, но величина неизмеримая. Теперь: неизмеримая величина - оказывается ли она полно-

[3]На: Les éléments d’économie politique pure, 4 e ed. Recue le 1-er octobre 1901. (Примечание Леона Вальраса)

стью исключенной из математических рассуждений? Вовсе нет. Температура, например (по крайней мере, до появления термодинамики, которая дала смысл понятию абсолютной температуры), представляет собой величину, не поддающуюся измерению. И это произвол, что ее измеряют по расширению ртути. Ее можно было бы определить на столь же законном основании как некоторую функцию от расширения чего-либо другого и измерять любой функцией этого расширения, при условии, что эта функция окажется монотонно возрастающей. Также и здесь – Вы можете определить удовлетворенность как произвольную функцию при условии, что эта функция всегда растет в то время, когда растет удовлетворенность, которую она представляет. В вашем распоряжении, таким образом, будут несколько произвольных функций, но после того, как будет сделан выбор, у Вас будет право делать выводы на основании расчетов. Если в этих выводах, по-прежнему будут оставаться произвольные функции, эти выводы не будут неверными, но будут лишены какого-либо интереса, поскольку они будут подчиняться произвольным соглашениям, принятым вначале. Вы должны стремиться к устранению этих произвольных функций, и это то, что Вы и делаете.

Другое замечание: я могу сказать, большую ли удовлетворенность испытывает одно и то же лицо в тех условиях по сравнению с этими; но у меня нет никакой возможности сравнить удовлетворение, испытываемое двумя разными лицами. Это увеличивает количество произвольных функций, которые должны быть устранены.

Таким образом, когда я говорил о “точных границах” – это совсем не то, что я имел в виду. Я считал, что прежде любого математического рассуждения имеются какие-то математические гипотезы, и для того, чтобы эти рассуждения оказались плодотворными (как и в приложениях, прежде всего, в физике), нужно, чтобы эти гипотезы были приняты во внимание.

Иными словами, если об этом условии забывают, то тем самым пересекают точные границы.

Например, в механике часто пренебрегают трением и рассматривают тела как предельно отполированные. А Вы рассматриваете людей как крайних эгоистов и как крайних ясновидящих. Первое предположение может быть принято в первом приближении, но второе может потребовать некоторых оговорок [4].

Искренне преданный Вам коллега Пуанкаре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Walras L.* Économique et mécanique // Bulletin de la Societe vaudoise de sciences naturelles. 1909.

2. *Cass D., Shell K.* Introduction to Hamiltonian Dynamics in Economics // Journal of Economic Theory. 1976. Vol. 12(1). P.1 – 10.

3. *Cass D., Shell K.* The Structure and Stability of Competitive Dynamical Systems // Journal of Economic Theory. 1976. Vol. 12(1). P. 31-70.

4. *Lucas, Robert Jr.* On the mechanics of economic development // Journal of Monetary Economics. 1988. Vol.22. No.1. P.3-42.

5. *Bonneuil, Noël* Capital accumulation, inertia of consumption and norms of reproduction // Journal of Population Economics. 1994. Vol. 7. No. 1. P.49-62.

6. *Ларуш Л.* Физическая экономика как платоновская эпистемологическая основа всех отраслей человеческого знания. Москва: Шиллеровский институт науки и культуры. 1997. =

[4] Мне кажется, что последний абзац моего § 1 отвечает на это замечание (Примечание Леона Вальраса)

La Rouche L. The Science of Physical Economy as the Platonic Epistemological Basis for All Branches of Human Knowledge // Executive Intelligence Review, Vol. 21, №9-11 (1994).

7. *Marino D.* Policies and Complex Dynamics: an Hamiltonian Approach // Economics and Complexity. 1998. Vol.1. No.2. P.3 – 14.

8. *Strulik H.* On the Mechanics of Economic Development and Non-Development // Quantitative Macroeconomics Working Papers 19911, Hamburg University, Department of Economics. 1999.

9. *McCauley J. L.* The Futility of Utility: how market dynamics marginalize Adam Smith // `http://arxiv.org/abs/cond-mat/9911291v2`

10. *Абрамов А.П., Иванилов Ю.П.* Физика и математическая экономика. М.: Знание. 1991. 32 с.

11. *Маслов В.П.* Капиталистическая математика // `http://viktor-maslov.narod.ru/article.pdf`

12. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. - Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 1995. 429 с.

13. *Козлов В.В., Хмелевская А.Ю.* Об импульсном изоэнергетическом управлении // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 1992. No.5. С. 69-71.

14. *Doyle Jon* Matter, Mind and Mechanics. New model of dynamogenesis and rationality. Synopsis of the Mechanical Foundations of Psycology and Economics // In: `http://www.csc.ncsu.edu/faculty/doyle/publications/tns00.pdf`

15. *Doyle Jon* A Rational Mechanics of Reasoning // In: `http://www.csc.ncsu.edu/faculty/doyle/publications/armor02.pdf`

16. *Doyle Jon* Extending Mechanics to Minds: The Mechanical Foundations of Psychology and Economics. London, UK: Cambridge University Press, May 2006.

17. *Saslow Wayne M.* An economic analogy to thermodynamics // Am. J. Phys. 1999. Vol.67. No.12. P.1239 – 1247.

18. *Joling Albert, van Daal Jan* Leon Walras's mathematical economy and the mechanical analogies // History of Economics Society Bulletin. 1989. No.11. P. 25-32.

19. *Shell K.* The theory of Hamiltonian Dynamical Systems, and an application to economics // The Theory and Application of Differential Games. Proc. of the NATO Advanced Study Institute at the University of Warwick, Coventry, England, 27 August - 6 September, 1974. P. 189-199.

20. *Kondratenko A.* Physical Modeling of economic systems: Classical and Quantum Economies // MPRA Paper No. 10452, posted 25. December 2007 at `http://mpra.ub.uni-muenchen.de/10452/`

УДК 531.332.1

О НЕВОЗМОЖНОСТИ ЧИСТОГО СКАТЫВАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНО ВНИЗ ТЯЖЕЛОГО ДИСКА ПО КРИВОЙ С КУЛОНОВЫМ ТРЕНИЕМ

А. С. Сумбатов

Доказано, что известное решение [1, 2] задачи о брахистохроне для тяжелого однородного круглого диска, который катится по опорной кривой без скольжения, несовместимо с законом трения Кулона, если именно сила сухого трения обеспечивает отсутствие скольжения диска в точке касания его с опорной кривой – эквидистантой циклоиды.

Ключевые слова: сухое трение, коэффициент трения покоя, уравнения качения диска, сила реакции.

В решении [1, 2] задачи о наибыстрейшем скатывании тяжелого диска по плоской кривой из положения A центра диска в положение B в начальный момент времени диск покоится и начинает катиться без скольжения по кривой с вертикальной касательной. Кинематическое условие отсутствия скольжения и уравнения динамики однозначно определяют действующую на диск силу со стороны опорной кривой. Оказывается, в окрестности старта тангенциальная и нормальная компоненты этой силы не подчиняются закону сухого трения Кулона. Следовательно, когда в точке контакта диска с опорой развивается только сила сухого трения, то обязательно начнется скольжение, и потому найденная в указанном решении опорная кривая, эквидистанта циклоиды, решением поставленной вариационной задачи не является.

Согласно [1, 2], брахистохрона представляет собой эквидистантную кривую, отстоящую от траектории центра O диска, на расстоянии, равном радиусу диска, а траекторией центра диска является дуга циклоиды. Указанная дуга имеет в стартовой точке вертикальную касательную, и диск начинает скатываться из состояния равновесия. На рис. дуга циклоиды обозначена Γ_1, а ее эквидистанта – Γ_2.

Введем в стартовом положении, в точке опоры O, систему координат с вертикальной осью Ox. Пусть $\mathbf{P}(mg, 0)$ – вес диска массы m, единичные векторы касательной к опорной кривой $\tau(\tau_x, \tau_y)$ и нормали $\mathbf{n}(n_x, n_y)$ в текущей точке опоры диска заданы своими координатами в осях Oxy.

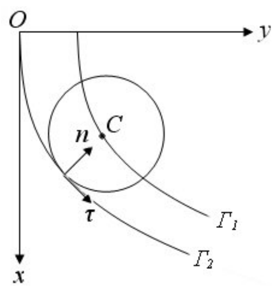

Рис.1. Скатывание диска из состояния равновесия

Уравнения качения диска без скольжения имеют вид

$$m\frac{dv}{dt} = R_\tau + mg\tau_x\,, \quad \frac{mv^2}{\rho} = R_n + mgn_x\,, \quad \frac{1}{2}\,mr^2\dot{\omega} = rR_\tau\,, \quad (1)$$

$$v + \omega r = 0\,, \quad (2)$$

где v - модуль скорости центра диска, r - радиус диска, ω - угловая скорость, $\rho^{-1} > 0$ - кривизна кривой Γ_1 в точке C, $\mathbf{R}(R_\tau, R_n)$ - реакция опоры Γ_2, приложенная к диску.

Продифференцировав по времени кинематическое уравнение (2), которое выражает постоянное отсутствие скольжения диска в точке контакта, исключим в нем ускорения $\dot{v}, \dot{\omega}$ при помощи динамических уравнений (1). Тогда получим

$$\frac{3}{m} R_\tau + g\tau_x = 0, \qquad R_\tau = -\frac{1}{3} mg\tau_x.$$

Из второго уравнения (1) следует, что

$$R_n = \frac{mv^2}{\rho} - mgn_x.$$

Согласно закону Кулона силы трения и нормального давления связаны неравенством

$$\left| \frac{-\frac{1}{3} mg\tau_x}{\frac{mv^2}{\rho} - mgn_x} \right| \leq f_0 \tag{3}$$

($f_0 < 1$ - коэффициент трения покоя). Вблизи точки O скорость $v \ll 1$, и, следовательно, наряду с неравенством (3) обязательно должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{3} \left| \frac{\tau_x}{n_x} \right| < 1$$

Но оно противоречиво, так как $1 - \tau_x \ll 1$ и $|n_x| \ll 1$.

ВЫВОД. Сила кулонова трения не может обеспечить отсутствия скольжения в самом начале скатывания тяжелого однородного круглого диска из состояния равновесия по любой регулярной кривой, имеющей в начальной точке вертикальную касательную и конечную кривизну.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00536 и 12-08-00637).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акуленко Л.Д.* Аналог классической брахистохроны для диска // Докл. РАН. 2008. Т.419. №2. С.193-196.

2. *Легеза В.П.* Брахистохрона для катящегося цилиндра // Механика твердого тела. Киев. 2010. №1. С.34-41.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS