УДК 531.36; 517.96

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕДЕЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

В.С. Сергеев

Указываются достаточные условия асимптотической устойчивости экспоненциально предельно периодического решения интегродифференциального уравнения, зависящего от малого периодического (предельно периодического) возмущения, в случае, когда решения линеаризованного уравнения асимптотически устойчивы.

Ключевые слова: интегродифференциальные уравнения типа Вольтерра, теория колебаний, асимптотическая устойчивость

1. Постановка задачи. Рассматривается интегродифференциальное уравнение типа Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \int\limits_0^t K(t-s)x(s)ds + \mu f(t) + F(x,t), \tag{1.1}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad f = \mathrm{col}(f_1, ..., f_n), \quad F = \mathrm{col}(F_1, ..., F_n),$$

в котором $0 \leq \mu << 1$, $A = (a_{ij})$ – $(n \times n)$-постоянная матрица, $K(t) = (K_{ij}(t)) \in \mathbf{C}$ и $f(t) \in \mathbf{C}$ при $t \in \mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$, $F(x,t)$ - непрерывная ограниченная по $t \in \mathbb{R}^+$ функция, класса $\mathbf{C^2}$ по x в некоторой окрестности нуля, причем $F(0,t) \equiv 0$, $F'_x(x,t)|_{x=0} \equiv 0$. Функцию $\mu f(t)$ будем рассматривать как возмущение.

Будем считать, что матрица $K(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|K(t)\| \leq C\exp(-\beta t), \qquad C, \beta = \mathrm{const} > 0. \tag{1.2}$$

Будем использовать следующие определения.

Определения

1.*Будем говорить, что непрерывная функция* $\varphi(t)$ *принадлежит классу* $e_1(\alpha)$, *т.е.* $\varphi(t) \in e_1(\alpha)$, *если при* $t \in \mathbb{R}^+$ *выполняется неравенство*

$$\|\varphi(t)\| \leq C\exp(\alpha t), \qquad C, \alpha = \text{const}, \quad C > 0.$$

2. *Будем говорить, что непрерывная на множестве* $0 \leq s \leq t < +\infty$ *функция* $\Phi(t,s)$ *принадлежит классу* $e_2(\alpha)$, *т.е.* $\Phi(t,s) \in e_2(\alpha)$, *если на этом множестве справедлива оценка*

$$\|\Phi(t,s)\| \leq C\exp[\alpha(t-s)].$$

3. *Непрерывную при* $t \in \mathbb{R}^+$ *функцию* $f(t)$ *будем называть экспоненциально предельно периодической, т.е. принадлежащей классу* $\text{lpe}(T,\alpha)$, *если*

$$f(t) = f_p(t) + f_e(t), \tag{1.3}$$

где $f_e(t) \in e_1(\alpha)$ $(\alpha < 0)$ *и непрерывная функция* $f_p(t)$ *является периодической с периодом* T.

4.*Движение, описываемое функцией вида* (1.3), *будем называть экспоненциально предельно периодическим.*

По предположению в уравнении (1.1) функция $f(t)$ и $F(x,t)$ как функция t при каждом фиксированном x представляют собой функции класса $\text{lpe}(T,\alpha)$ $(\alpha < 0)$.

Будем считать, что характеристическое уравнение

$$\det(\lambda E_n - A - K^*(\lambda)) = 0, \tag{1.4}$$

где $K^*(\lambda)$ – преобразование Лапласа для матрицы $K(t)$, определенное в комплексной полуплоскости $\text{Re}\,\lambda > -\beta$, имеет в этой полуплоскости конечное число корней λ'_j $(j = 1, ..., N;\ N \geq n)$.

Рассмотрим случай, когда корни уравнения (1.4) удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re} \lambda'_j < 0, \qquad j = 1, ..., N \tag{1.5}$$

и, следовательно, нулевое решение невозмущенного уравнения (т.е. при $\mu = 0$) экспоненциально устойчиво.

Пусть $X(t-s)$ – фундаментальная матрица решений линеаризованного невозмущенного уравнения (1.1) с нижним пределом интегрирования s в интегральном члене [1], такая что $X(0) = E_n$. Тогда при выполнении условий (1.5) справедливо неравенство

$$\|X(t-s)\| \leq C' \exp[-\beta'(t-s)], \quad C', \beta' = \text{const} > 0, \quad C' \geq 1. \tag{1.6}$$

На основании теоремы о существовании предельно периодических решений [2] имеем применительно к рассматриваемому случаю следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть для уравнения* (1.1) *выполнены условия* (1.2), (1.6). *Тогда*

1) *общее решение уравнения* (1.1) *в некоторой окрестности нуля будет экспоненциально предельно периодическим*;

2) *если функция* $F(x,t)$ *аналитическая по* x, *то это решение будет представляться степенным рядом по* μ *и произвольным начальным значениям* x_0 *переменной* x *при* $0 \leq \mu \leq \mu_0$, $\|x_0\| \leq \delta_0$ *для некоторых* μ_0, $\delta_0 > 0$.

2. Устойчивость предельно периодического решения. Пусть $x^0(t)$ – некоторое решение уравнения (1.1) с начальным значением x_0. Для функции $F(x,t)$, обладающей производными по x в некоторой окрестности нуля, решение $x^0(t)$, обращающееся в ноль при $x_0 = 0$, может быть представлено в виде $x^0(t) = x_0 \tilde{x}^0(t, x_0)$, причем функция $\tilde{x}^0(t, x_0)$ непрерывна и ограничена по x_0 в некоторой окрестности $B(x_0)$ точки $x_0 = 0$ и принадлежит классу $\mathrm{lpe}(T, \alpha)$ $(\alpha < 0)$ при каждом фиксированном $x_0 = 0$ из этой окрестности.

Положим $x_0 = \mu x_0'$, где x_0' – фиксированный вектор. Тогда можно записать

$$x^0(t) = \mu\varphi(t, \mu),$$

где $\varphi(t, \mu)$ – непрерывная ограниченная по t и μ функция при $t \in \mathbb{R}^+$ и $0 \le \mu \le \mu_0$.

Введем переменную y заменой $x = \mu\varphi(t,\mu) + y$ и будем рассматривать уравнение

$$\frac{dy}{dt} = Ay + \int\limits_0^t K(t-s)y(s)ds + F(\mu\varphi(t,\mu) + y, t) - F(\mu\varphi(t,\mu), t). \tag{2.1}$$

Учитывая свойства функции $F(x,t)$, положим

$$\Phi(t,\mu) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\mu\varphi(t,\mu)}, \tag{2.2}$$

где $\Phi(t,\mu)$ – экспоненциально предельно периодическая по t функция, непрерывная ограниченная по μ в области изменения своих аргументов.

Рассмотрим линейную часть уравнения (2.1):

$$\frac{dy}{dt} = Ay + \int\limits_0^t K(t-s)y(s)ds + \Phi(t,\mu)y. \tag{2.3}$$

Отметим, что функция $\Phi(t,\mu)$ (2.1) такова, что найдется не зависящая от t и μ постоянная $\Phi_0 > 0$ такая, что при $t \in \mathbb{R}^+$, $0 \le \mu \le \mu_0$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(t,\mu)\| \le \Phi_0. \tag{2.4}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для уравнения* (1.1) *выполняются условия* (1.2), (1.6) *и пусть*

$$\Phi_0 < \frac{\beta'}{C'}. \tag{2.5}$$

Тогда

1) *по фиксированному числу* $\varepsilon > 0$ *найдется* $0 < \kappa < \beta'$ *такое, что всякое решение* $y(t)$ *уравнения* (2.3) *удовлетворяет при* $t \in \mathbb{R}^+$ *неравенству*

$$\|y(t)\| < \varepsilon \exp(-\kappa t), \tag{2.6}$$

когда его начальное значение $y(0) = y_0$ *подчинено ограничению*

$$\frac{\|y_0\|}{\varepsilon} + \frac{\Phi_0}{\beta' - \kappa} < \frac{1}{C'}. \tag{2.7}$$

2) *экспоненциально предельно периодическое решение уравнения* (1.1) *асимптотически (экспоненциально) устойчиво.*

Доказательство теоремы базируется на схеме, использованной в [1, с.127], [3] и на интегральной формуле

$$y(t) = X(t)y_0 + \int\limits_0^t X(t-s)\Phi(s,\mu)y(s)ds, \tag{2.8}$$

эквивалентной уравнению (2.3) вместе с начальным условием $y(0) = y_0$.

Выберем согласно условию (2.5) число κ ($0 < \kappa < \beta'$), удовлетворяющее неравенству

$$\Phi_0 < \frac{\beta' - \kappa}{C'}. \qquad (2.9)$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что если величина $\|y_0\|$ достаточно мала, т.е. найдется $\delta > 0$ такое, что $\|y_0\| < \delta$, то решение $y(t)$ уравнения (2.3) удовлетворяет неравенству (2.6), если начальное значение y_0 подчинено условию (2.7).

Предположим, что неравенство (2.6) имеет место лишь при $0 \leq t < t_0$, а при $t = t_0$ выполняется равенство

$$\|y(t_0)\| = \varepsilon \exp(-\kappa t_0).$$

Тогда согласно соотношениям (1.6), (2.4) – (2.9) получаем оценки

$$\|y(t_0)\| = \varepsilon \exp(-\kappa t_0) \leq$$

$$\leq \|X(t_0)\| \|y_0\| + \int\limits_0^{t_0} \|X(t_0 - s)\| \Phi_0 \|y(s)\| ds \leq$$

$$\leq C' \exp(-\beta' t_0) \|y_0\| + C' \int\limits_0^{t_0} \exp[-\beta'(t_0 - s)] \Phi_0 \varepsilon \exp(-\kappa s) ds <$$

$$< C' \exp(-\kappa t_0) \Big(\|y_0\| + \frac{\varepsilon \Phi_0}{\beta' - \kappa} \Big) < \varepsilon \exp(-\kappa t_0),$$

т. е. получаем противоречие. Таким образом, неравенство (2.6) справедливо для всех $0 \leq t < +\infty$ и имеет место экспоненциальная устойчивость нулевого решения линеаризованной системы.

Если для уравнения (2.3) $Y^*(t)\,(Y^*(0) = E_n)$ – фундаментальная матрица решений, аналогичная $X(t)$, то согласно соотношению (2.6) справедливо неравенство

$$\|Y^*(t)\| \leq C^* \exp(-\kappa t), \quad C^* = \text{const} > 0; \tag{2.10}$$

причем постоянная κ подчинена условию (2.7).

Следовательно, для нелинейного уравнения (2.1) при выполнении условий (1.6), (2.4), (2.5), (2.7), являющихся достаточными для того, чтобы имела место оценка (2.10), справедлива теорема об устойчивости по первому приближению [4] и рассматриваемое экспоненциально предельно периодическое решение асимптотически (экспоненциально) устойчиво.

Указанные неравенства совместно с оценкой исследуемого решения, которая получается методом мажорантных функций [5] так же, как в [4], позволяют дать оценку области притяжения.

3. Оценка области притяжения. Рассмотрим в качестве примера вращательные колебания вала в вязкоупругих опорах под действием силы тяжести с моментом

$$M_g = -M \sin\vartheta, \quad M = \text{const} > 0$$

и вязкоупругих сил, действующих в опорах и заданных линейным интегральным оператором Вольтерра [6]

$$M_v = -k\vartheta + \int\limits_0^t K'(t-s)\vartheta(s)ds, \quad k = \text{const} > 0, \quad K'(t) \in \mathbf{C},$$

а также малых вибрационных сил с моментом $\mu f(t)$ – периодической функцией, $\mu << 1$.

Вал совершает вращательные движения вокруг горизонтальной оси OO_1 и моделируется вытянутым твердым телом, в концы которого жестко заделаны две вязкоупругие опоры, а вторые концы опор фиксированы в неподвижном пространстве. Массами опор пренебрегаем.

Угол ϑ поворота тела отсчитывается от вертикали. Рассматривается окрестность нижнего устойчивого положения равновесия (в отсутствие вибрационных сил).

Продемонстрируем на данном примере возможный способ оценки области притяжения экспоненциально предельно периодического движения, отвечающего соответствующему решению уравнения движения вала

$$J\ddot{\vartheta} + k\vartheta - \int\limits_0^t K'(t-s)\vartheta(s)ds + M\sin\vartheta - \mu f(t) = 0, \qquad (3.1)$$

где J – момент инерции тела относительно оси OO_1.

Будем считать, что все корни λ_i характеристического уравнения

$$J\lambda^2 + (k+M)\lambda - K^*(\lambda) = 0,$$

где $K^*(\lambda)$ – преобразование Лапласа для функции $K'(t)$, имеют отрицательные вещественные части.

Положим $x_1 = \dot{\vartheta}$, $x_2 = \vartheta$ и представим уравнение (3.1) в виде системы, для которой матрицу фундаментальной системы решений однородного линейного приближения с нижним пределом s интегрирования обозначим, как и ранее, через $X(t-s)$.

Для матрицы $X(t)$ справедливо неравенство

$$\|X(t)\| \leq C' \exp(-\beta' t), \quad C', \beta' = \mathrm{const} > 0. \qquad (3.2)$$

Пусть $x^0(t) = \mathrm{col}(x_1^0(t), x_2^0(t))$ – экспоненциально предельно периодическое решение, существующее согласно [2] и удовлетворяющее уравнению (3.1), записанному в интегральной форме:

$$x(t) = X(t)x_0 + \int\limits_0^t X(t-s)(F(x(s)) + \mu f'(s))ds, \tag{3.3}$$

где

$$F(x) = \mathrm{col}(F_1, 0), \quad F_1 = -M_1(\sin x_2 - x_2),$$

$$M_1 = M/J, \quad f'(x) = \mathrm{col}(f(t)/J, 0)$$

и $x_0 = \mathrm{col}(\dot{\vartheta}_0, \vartheta)_0$ – начальное значение.

Обозначим через $u = \mathrm{col}(u_1, u_2)$ мажоранту функции x, построенную в виде степенного ряда по x_0, μ, и через $F_1^*(x_2)$ – мажоранту Ляпунова [5, 4] функции $F_1(x_2)$, в качестве которой возьмем $F_1^*(x_2) = M_1 x_2^3/6$.

Составим на основании (3.3) таким же способом, как в [4], мажорирующие уравнения, принимая во внимание неравенство (3.2) и ограниченность функции $f(t)$,

$$\|f(t)\| \leq f_0, \quad f_0 = \mathrm{const} > 0, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Имеем уравнения

$$u_2 = C'(|\dot{\vartheta}_0| + |\vartheta_0|) + C'M_1 \frac{u_2^3}{6\beta'} + \mu\varphi^*, \quad u_1 = u_2, \tag{3.4}$$

где $\varphi^* = f_0 C'/(\beta' J)$. Уравнения (3.4) определяют u_1, u_2 в виде сходящихся степенных рядов по малым величинам $|\dot{\vartheta}_0|, |\vartheta_0|, \mu$.

Введем в рассмотрение постоянные u_1^0, u_2^0, v_0 и мажоранту v, полагая

$$\begin{gathered} \dot{\vartheta}_0 = \mu u_1^0, \qquad \vartheta_0 = \mu u_2^0, \\ v_0 = C'(|u_1^0| + |u_2^0|) + \varphi^*, \quad u_2 = \mu(v_0 + v). \end{gathered} \tag{3.5}$$

Тогда на основании (3.4) получаем мажорирующее уравнение

$$v = \mu^2 \frac{C' M_1}{6\beta'} (v_0 + v)^3, \tag{3.6}$$

из которого v определяется в форме степенного ряда по μ. Радиус сходимости μ_0 этого ряда находится как решение уравнения (3.6) и соотношения [5], получаемого дифференцированием по v уравнения (3.6),

$$1 = \mu^2 \frac{C' M_1}{2\beta'} (v_0 + v)^2. \tag{3.7}$$

Соотношение (3.7) дает значение

$$v = \frac{\alpha_0}{\mu} - v_0, \quad \alpha_0 = \left(\frac{2\beta'}{C' M_1}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.8}$$

подставив которое в уравнение (3.6), получаем

$$v = \frac{1}{2} v_0. \tag{3.9}$$

Следовательно, на основании (3.6), (3.8) находим

$$\mu_0 = \frac{2\alpha_0}{3v_0}, \quad \text{т. е.} \quad \mu_0 = \frac{2\alpha_0}{3[C'(|u_1^0| + |u_2^0|) + \varphi^*]}, \tag{3.10}$$

и степенной ряд по μ для $v(\mu)$ сходится при $0 \leq \mu \leq \mu_0$.

Итак, учитывая (3.5), (3.9), (3.10), для u_2 получаем оценку

$$u_2 \leq \frac{3}{2} \mu_0 v_0 = \alpha_0. \tag{3.11}$$

В качестве постоянной Φ_0 ввиду соотношения (2.2) возьмем величину

$$\Phi_0 = M_1.$$

Вычислим оценку области притяжения для предельно периодического решения $x^0(t) = \mathrm{col}(x_1^0(t), x_2^0(t))$.

Положим $x_1 = x_1^0(t) + y_1$ $x_2 = x_2^0(t) + y_2$. Для возмущения $y = \mathrm{col}(y_1, y_2)$ имеем уравнение в форме (2.1)

$$\frac{dy}{dt} = Ay + \int\limits_0^t K(t-s)y(s)ds + \Phi(t,\mu)y + F'(x^0(t) + y),$$

где $F' = \mathrm{col}(F_1'(x_2^0(t)+y_2), 0)$ и $F_1'(x_2^0(t)+y_2)$ – степенной ряд по y_2 функции $F_1(x_2^0(t) + y_2)$, начинающийся с квадратичного члена, A и $\Phi(t,\mu)$ – известные матрицы согласно уравнению (3.1).

Пусть $w = \mathrm{col}(w_1, w_2)$ – мажоранта функции y, где $w_1 >> y_1$, $w_2 >> y_2$.

Мажоранту V функции $F_1(x_2^0(t) + y_2)$, используя ранее введенную мажоранту для функции $\sin x$, возьмем в виде

$$V = \frac{M_1}{6}(w_2^3 + 3w_2^2 u_2),$$

где мажоранта u_2 функции $x_2^0(t)$ подчинена неравенству (3.11).

Для мажоранты w_2 ввиду неравенства (2.6) имеем уравнение

$$w_2 = \varepsilon(|y_1^0| + |y_2^0|) + \frac{M_1}{6\kappa}(w_2^3 + 3w_2^2 u_2), \tag{3.12}$$

где y_1^0, y_2^0 – начальные значения функций y_1, y_2.

Граница области изменения малой величины y^*

$$y^* = \varepsilon(|y_1^0| + |y_2^0|)$$

(поскольку $|y_1^0|$, $|y_2^0|$ малы) определяется [5] соотношением

$$1 = \frac{M_1}{2\kappa}(w_2^2 + 2w_2 u_2) \tag{3.13}$$

совместно с уравнением (3.12). Вычитая из (3.12) соотношение (3.13), умноженное на $\frac{1}{3}w_2$, получаем равенство

$$\frac{2}{3}w_2 = \varepsilon(|y_1^0| + |y_2^0|) + \frac{M_1}{6\kappa}w_2^2 u_2. \tag{3.14}$$

Исключив w_2^2 из (3.13) и (3.14), получаем линейное соотношение, из которого находим w_2:

$$w_2 = \frac{\kappa(u_2 + 3y^*)}{2\kappa + M_1 u_2^2}. \tag{3.15}$$

Подставляя значение w_2 (3.15) в (3.14) и полагая

$$\tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{2\kappa + M_1 u_2^2}, \tag{3.16}$$

приходим к уравнению относительно y^* :

$$9\tilde{\kappa}^2 u_2 M_1 y^{*2} + (6\kappa - 12\kappa\tilde{\kappa} + 6M_1\tilde{\kappa}^2 u_2^2)y^* + \tilde{\kappa}^2 M_1 u_2^3 - 4\kappa\tilde{\kappa}u_2 = 0. \tag{3.17}$$

Положительное решение y_+^* уравнения (3.17), учитывая (3.16), можно представить после преобразований таким образом:

$$y_+^* = -\frac{u_2}{3\kappa}(3\kappa + M_1 u_2^2) + \frac{(2\kappa + u_2^2 M_1)^{\frac{3}{2}}}{3\kappa M_1^{\frac{1}{2}}}$$

или в другой форме:

$$\begin{gathered} y_+^* = \frac{\kappa}{3B}(8\kappa + M_1 u_2^2), \\ B = M_1 u_2(3\kappa + M_1 u_2^2) + (2\kappa + M_1 u_2^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{M_1}. \end{gathered} \tag{3.18}$$

Таким образом, имеем оценку для изменения начальных значений

$$|y_1^0| + |y_2^0| < \frac{y_+^*}{\varepsilon}, \tag{3.19}$$

и, кроме того, одновременно должно выполняться неравенство, вытекающее из условия (2.7):

$$|y_1^0| + |y_2^0| < \frac{\varepsilon}{C'} - \frac{\varepsilon\Phi_0}{\beta' - \kappa}. \tag{3.20}$$

Неравенство (3.20) может быть удовлетворено, например, выбором малой величины M в выражении $\Phi_0 = M/J$, т.е. при условии, что центр масс вала расположен вблизи от оси вращения.

Подставив в формулу (3.18) максимальное значение $u_2 = \alpha_0$ согласно (3.11), (3.8) и обозначениям в формуле (3.3), получим для максимального значения y_* величины y_+^* выражение

$$\begin{aligned} y_* &= \frac{\kappa}{3B^*}\Big(8\kappa + \frac{2\beta'}{C'}\Big), \\ B^* &= \Big(\frac{M}{J}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big[\Big(\frac{2\beta'}{C'}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(3\kappa + \frac{2\beta'}{C'}\Big) + \Big(2\kappa + \frac{2\beta'}{C'}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big]. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Постоянная C', входящая в соотношения (3.19) – (3.21), требует отдельного определения либо численно, либо аналитически. Например, для малых интегральных ядер $K(t)$ это может быть осуществлено путем построения общего решения линейного уравнения методом последовательных приближений (или в виде ряда по малому параметру) и последующего мажорирования этого решения, как это было проделано выше.

Оценка (3.19) должна выполняться наряду с условием (3.20), наложенным на линеаризованное уравнение. При этом остаются свободными параметры ε, κ, μ, выбором которых (при заданной C') можно распорядиться для расширения оценки.

Для изменения параметра μ ввиду (3.8), (3.10) имеем следующий интервал:

$$0 \le \mu < \mu_0 = \frac{1}{3\sqrt{M}}\Big(\frac{2\beta' J}{C'}\Big)^{\frac{3}{2}}[(|u_1^0| + |u_2^0|)\beta' + f_0]^{-1}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00536 и 12-08-00637).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во Киргиз. гос. ун-та, 1957. 327 с.

2. *Сергеев В.С.* О предельно периодических движениях в некоторых системах с последействием // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 857-869.

3. *Астапов И.С.* Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений аэроупругости // Вестник МГУ. Сер. матем., механ. 1981. № 6. С. 89-95.

4. *Сергеев В.С.* Об асимптотической устойчивости и оценке области притяжения в некоторых системах с последействием. // ПММ. 1996. Т.60. Вып.5. С.744-751.

5. *Лика Д.К., Рябов Ю.А.* Методы итераций и мажорирующее уравнение Ляпунова в теории нелинейных колебаний. Кишинев: Штиинца, 1974. 291 с.

6. *Volterra V.* Theory of Functionals and Integrals and Integro-Differential Equations. N.Y.: Dover, 1959. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.