

УДК 620.10

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ПАРАДОКСОВ ПЭНЛЕВЕ В СИСТЕМАХ С ОДНОЙ ФРИКЦИОННОЙ ПАРОЙ

А. С. Сумбатов

Уточнены технические детали условия Ле Суан Аня возникновения неопределённости и противоречия в некотором классе систем с кулоновым трением. Приведен пример.

Ключевые слова: трение Кулона, парадоксы Пэнлеве, контактная связь, освобождение от связи.

На рубеже 90-х прошедшего столетия появилось несколько работ Ле Суан Аня [1, 2], посвященных системам с конечным числом степеней свободы и единичной *фрикционной парой*. Впоследствии результаты этих работ были обобщены, значительно дополнены и вошли в его монографию [3].

Результаты, относящиеся к простейшему случаю наличия в системе с трением одной фрикционной пары, основываются на следующем наблюдении: при разрешении уравнений движения системы относительно обобщённых ускорений и нормальной реакции R связи с кулоновым трением *всегда* получается уравнение вида $\Lambda \cdot R = R_0$ (R_0 – нормальная реакция при отсутствии трения), в котором сомножитель

$$\Lambda = 1 + f \cdot L \cdot \text{sign } R$$

(вывод формулы и зависимость функции L от обобщенных координат см. дальше). Неравенство $f|L| > 1$ и является источником возникновения парадоксов Пэнлеве [4] в системе.

Поскольку в доступных нам публикациях Ле Суан Аня доказательства приведенного наблюдения не содержится, приведём

здесь его обоснование и уточнение. Пусть q_1, q_2, \dots, q_n – обобщённые координаты системы, подчинённой идеальным стационарным связям, кроме одного двустороннего контактного соединения с динамическим коэффициентом f кулонового трения. Не теряя общности, можно представить эту связь как возможность скольжения контактной точки C системы по неподвижной абсолютно твёрдой поверхности U с трением. Пусть

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_C(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

– радиус-вектор точки C , когда $C \in U$. Если контакт нарушен, то в системе появляется дополнительная степень свободы. За новую обобщённую координату примем смещение точки C по нормали \mathbf{m} к поверхности U :

$$h = (\mathbf{r}_C^* - \mathbf{r}_C) \cdot \mathbf{m}$$

(звёздочка указывает, что соответствующая величина вычислена, когда точка $C \notin U$). На поверхности U эта координата подчинена условию

$$h = \dot{h} = \ddot{h} = 0. \quad (1)$$

Полная реакция контактной связи с трением при скольжении со скоростью $\mathbf{v}_C \neq 0$ имеет вид

$$\mathbf{R}_s = (-\epsilon_1 f \mathbf{v}_C / |\mathbf{v}_C| + \mathbf{m}) R.$$

Здесь R – нормальная реакция (со знаком), $\epsilon_1 = \text{sign } R$. Обобщённые компоненты полной реакции имеют вид

$$S_j = \mathbf{R}_s \cdot \partial \mathbf{r}_C / \partial q_j, \quad S^* = \mathbf{R}_s \cdot (\partial \mathbf{r}_C^* / \partial h)_0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь и далее нулевой индекс вне скобок означает учёт условия (1) после дифференцирования.

Легко проверяется, что

$$\frac{\mathbf{v}_C}{|\mathbf{v}_C|} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial q_j} = \frac{\partial v_C}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\mathbf{v}_C}{|\mathbf{v}_C|} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_C^*}{\partial h} \right)_0 = \left(\frac{\partial v_C^*}{\partial \dot{h}} \right)_0, \quad (2)$$

поэтому

$$S_j = -\epsilon_1 f (\partial v_C / \partial \dot{q}_j) R, \quad S^* = \left(1 - \epsilon_1 f \partial v_C^* / \partial \dot{h}\right)_0 R.$$

Уравнения движения системы, записанные, например, в форме уравнений Лагранжа, имеют вид

$$\sum_{k=1}^n A_{ks} \ddot{q}_k + F_s(q, \dot{q}) = -\epsilon_1 f (\partial v_C / \partial \dot{q}_s) R, \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n (A_{k,n+1}^*)_0 \ddot{q}_k + (F_{n+1}^*(q, \dot{q}))_0 = \left(1 - \epsilon_1 f \partial v_C^* / \partial \dot{h}\right)_0 R. \quad (4)$$

Для упрощения обозначений коэффициенты при обобщенных ускорениях в последнем уравнении будем записывать далее как $A_{k,n+1}$.

Соотношения (3) и (4) образуют линейную алгебраическую систему $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n$ и R . Её матрица представляет собой матрицу кинетической энергии механической системы, которая освобождена от фрикционной связи с заменой на воздействие этой связи силой полной реакции. Это квадратная положительная симметрическая матрица

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} & A_{1,n+1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & A_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & A_{n,n+1} \\ A_{n+1,1} & A_{n+1,2} & \dots & A_{n+1,n} & A_{n+1,n+1} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Определитель матрицы обозначим через A , а элементы обратной ей матрицы – через A^{rj} . Определитель подматрицы, образованной первыми n строками и n столбцами, обозначим через B , элементы обратной ей подматрицы – через B^{il} .

Уточним выражение для L . Пусть r – произвольное из чисел $1, 2, \dots, n$. Справедлива формула

$$\sum_{k=1}^n A_{n+1,k} B^{rk} = \frac{A^{r,n+1}}{A^{n+1,n+1}}. \quad (6)$$

Действительно,

$$\frac{A^{r,n+1}}{A^{n+1,n+1}} = (-1)^{n+r+1} \frac{B_r}{B}.$$

Здесь

$$B_r = \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r-1,1} & A_{r-1,2} & \dots & A_{r-1,n} \\ A_{r+1,1} & A_{r+1,2} & \dots & A_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n+1,1} & A_{n+1,2} & \dots & A_{n+1,n} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1+k} A_{n+1,k} \cdot B^{r,k} \cdot B (-1)^{r+k}.$$

Определитель B_r представлен разложением по последней строке, которое и доказывает формулу (6).

Функцию L окончательно запишем в виде ¹

$$L = \sum_{s=1}^n \frac{A^{s,n+1}}{A^{n+1,n+1}} \frac{\partial v_C}{\partial \dot{q}_s} - \left(\frac{\partial v_C^*}{\partial \dot{h}} \right)_0. \quad (7)$$

Соберём вместе результаты алгебраического разрешения линейной системы уравнений (3), (4):

$$\Lambda R = R_0, \quad \Lambda \ddot{q}_i = - \sum_{j=1}^n \left[\Lambda F_j(q, \dot{q}) + \epsilon_1 f \frac{\partial v_C}{\partial \dot{q}_s} R_0 \right] B^{ij}. \quad (8)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

¹В работах [1, 2] в соответствующей формуле для L перед знаком суммы ошибочно указан знак минус.

Обозначим $\epsilon_0 = \text{sign } R_0$. Теперь следующее утверждение становится практически очевидным.

Теорема [1, 2].

Если

$$f|L| < 1,$$

то

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 = \text{sign } R_0,$$

следовательно, решение задачи Коши для уравнений (8) существует и единственно. Если же

$$f|L| > 1, \tag{9}$$

то при $\epsilon_0 \text{sign } L = 1$ в качестве ϵ_1 подходят оба значения ± 1 , а при $\epsilon_0 \text{sign } L = -1$ для ϵ_1 не годится ни одно из значений ± 1 .

В качестве иллюстрации теоремы рассмотрим плоское движение палочки BC длины $2l$, опирающейся своим концом C на прямую с сухим трением (Рис.1).

Полагаем, что распределение массы в палочке симметричное относительно её середины G .

Живая сила бесконтактного движения палочки равна

$$2T = m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2ml\dot{x}\dot{\vartheta} \sin \vartheta + 2ml\dot{y}\dot{\vartheta} \cos \vartheta + (ml^2 + J) .$$

Здесь \dot{x}, \dot{y} – компоненты скорости точки C , m – масса, J – центральный момент инерции палочки.

Матрица (5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} m & -ml \sin \vartheta & 0 \\ -ml \sin \vartheta & ml^2 + J & ml \cos \vartheta \\ 0 & ml \cos \vartheta & m \end{pmatrix} .$$

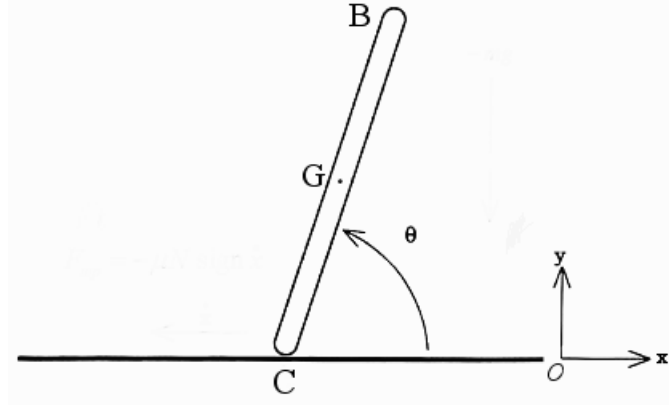


Рис. 1: Точка C скользит по прямой $y = 0$ с трением

Так как ²

$$\frac{\partial v_C}{\partial \dot{x}} = 1, \quad \frac{\partial v_C}{\partial \dot{\vartheta}} = 0, \quad \left(\frac{\partial v_C^*}{\partial \dot{y}} \right)_0 = 0, \quad (10)$$

по формуле (7) находим

$$L = \frac{A^{13}}{A^{33}} = \frac{ml^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{J + ml^2 \cos^2 \vartheta}.$$

По смыслу $0 < \vartheta < \pi$. Не нарушая общности, полагаем, что $\vartheta \neq \pi/2$. Обозначив $z = |\operatorname{tg} \vartheta|$, условие (9) запишем в виде

$$\frac{fz}{k(1+z^2)+1} > 1, \quad k = \frac{J}{ml^2}.$$

Неравенство

$$kz^2 - fz + 1 + k < 0 \quad (11)$$

²Относительно последнего равенства (10) см. формулу (2), в которой $h = y$, $\mathbf{r}_C^* = (x, y)^T$.

выполняется только, если

$$D = f^2 - 4k(1 + k) > 0,$$

т.е. парадоксы Пэнлеве возникают в типичном случае, когда коэффициент трения достаточно велик, а центральный радиус инерции тела достаточно мал. Для однородной палочки имеем $k = 1/3$, и условие (11) не выполняется, когда $f < 4/3$.

Решением неравенства (11) являются симметричные относительно $\pi/2$ промежутки изменения угла ϑ , заштрихованные на Рис.2:

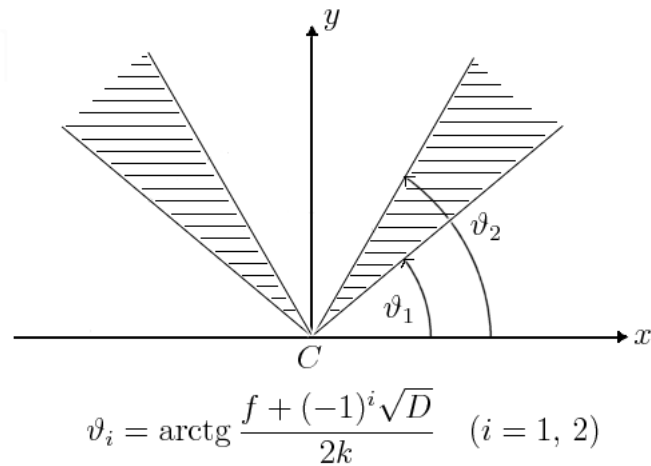


Рис. 2: Области парадоксов по углу ϑ заштрихованы

Очень подробное, но пока не исчерпывающее исследование всевозможных режимов движения палочки (скольжение, вращение, отскок, свободный полет, удары об ограничительную прямую) проведено в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ле Суан Ань*. О парадоксах Пэнлеве с кулоновым трением // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1988. № 425. С. 91-97.
2. *Ле Суан Ань*. Парадоксы Пэнлеве и закон движения механических систем с кулоновым трением // Прикл. матем. и механ. Т.54. Вып.4. 1990. С. 520-529.
3. *Le Xuan Ahn*. Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction. - Berlin and Heidelberg: Springer-Verlag. 2003 - 1st ed., 2011 - 2nd ed. 280 pp.
4. *Painlevé P.* Leçons sur le frottement. Paris: Hermann, 1895. P.111. = *Пенлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехтеоретиздат, 1954. – 316 с.
5. *Nordmark A., Dankowicz H. and Champneys A.* Friction-induced reverse chatter in rigid-body mechanisms with impacts // IMA Journal of Applied Mathematics. 2011. Vol.76. P. 85-119.