УДК 512.742.72; 517.583; 519.6

Итерационный алгоритм вычисления эллиптического интеграла

С.Ф. Адлай*

Натолкнувшись на совпадение вплоть до 11-го знака величины, обратной арифметико-геометрическому среднему чисел 1 и $\sqrt{2}$, с деленной на π полудлиной лемнискаты Бернулли, фокусное расстояние которой $\sqrt{2}$, Гаусс записал в своем дневнике 30 мая 1799 г., что это "несомненно откроет совершенно новый раздел анализа" [1]. Впоследствии Гаусс выявил высокоэффективный метод вычисления полного эллиптического интеграла. В данной работе демонстрирется итерационный алгоритм вычисления эллиптического интеграла, не обязательно полного, основанный на обращении известной формулы удвоения точек эллиптической кривой. Формулы половинного угла для тригонометрических функций обобщаются на функции эллиптические. Если связать понятие элементарности интеграла с возможностью построения циркулем и линейкой половинного угла, то такое толкование элементарности распространяется и на интегралы эллиптические, что противоречит привычным представлениям об элементарности интегралов, исключающим из рассмотрения, в общем случае, такие интегралы, подынтегральное выражение которых содержит в знаменателе квадратный корень от многочлена степени, превышающей вторую. По-видимому, классический результат о невозможности удвоения куба с помощью циркуля и неградуированной линейки привел к привычному, но все же необоснованному причислению эллиптических интегралов к неэлементарным интегралам. В действительности, по аналогии с

* *e-mail: SemjonAdlaj@gmail.com*

составлением таблиц точных значений тригонометрических функций со сколь угодно малым шагом, мы располагаем возможностью составления таких же таблиц для эллиптических функций. И в том, и в другом случае точность каждого значения обеспечивается конкретным выражением в квадратных радикалах.

Ключевые слова: полный и неполный эллиптический интеграл, эллиптическая функция, формула удвоения точек эллиптической кривой, формула половинного угла, арифметико-геометрическое среднее, итерационный алгоритм.

1.Введение и обозначения. Введем параметр $\alpha > 1$, квадратичный многочлен $p_\alpha(x) = x^2 + 2\alpha x + 1$ и эллиптическую кривую

$$E_\alpha : y^2 = 4xp_\alpha(x)$$

над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Отметим, что x-координата каждой точки $P = (x, y)$ кривой E_α определяет ее y-координату, с точностью до знака. Две первые координаты u и v, каждая из которых соответствует паре точек E_α, определяют две первые координаты $s_\pm$, соответствующие четырем возможным суммам, первое слагаемое каждой из которых точка с первой координатой u, а второе – точка с первой координатой v:

$$s_\pm = s_\pm(u, v) = \left(\frac{\sqrt{p_\alpha(u)v} \pm \sqrt{up_\alpha(v)}}{u - v} \right)^2. \tag{1}$$

Первая координата s удвоенной точки $2P$ вычисляется по формуле

$$s = s(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{y} \right)^2, \tag{2}$$

соответствующей случаю, отвечающему совпадению u и v в формуле (1).

Введем две пары функций

$$g_{\pm}(x) = x \pm \sqrt{x^2 - 1},\ q_{\pm}(x) = x \pm \sqrt{p_{\alpha}(x)}$$

и четыре композиции одной из функций первой пары с функцией из второй

$$h_0 = g_- \circ q_-,\ h_1 = g_+ \circ q_-,\ h_2 = g_- \circ q_+,\ h_3 = g_+ \circ q_+. \qquad (3)$$

Если теперь задать первую координату s удвоенной точки $2P$, то обращением формулы (2) можно убедиться, что первая координата x первоначальной точки P совпадет с одним из четырех значений $h_0(s)$, $h_1(s)$, $h_2(s)$ или $h_3(s)$.

2.Измельчение прямоугольной сетки и вычисление значений эллиптической функции в ее узлах. Обозначим $\mathcal{R}_{\alpha}$ эллиптическую функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$x'^2 = 4x p_{\alpha}(x) \qquad (4)$$

с полюсом (второго порядка) в нуле, а (прямоугольную) решетку этой функции [2] обозначим Λ.

Введем обозначения

$$\beta = g_-(\alpha),\ \delta = \sqrt{1-\beta^2},\ \Lambda_n = 2^{-n}\Lambda,\ K = \mathbb{C}\,/\Lambda_1,\ V_n = K \cap \Lambda_n.$$

и отметим, что в вершине V_0 прямоугольника полупериодов K расположился полюс функции $\mathcal{R}_{\alpha}$. В трех оставшихся вершинах $V_1 \backslash V_0$ этого прямоугольника значениями $\mathcal{R}_{\alpha}$ являются три корня 0, $-\beta$ и $-1/\beta$ кубического многочлена правой части уравнения (4). Значения $\mathcal{R}_{\alpha}$ в пяти узлах $V_2 \backslash V_1$ являются функциями, заданными в (3) от этих трех корней. В свою очередь, значения в 16 узлах $V_3 \backslash V_2$ являются такими же функциями, но уже от пяти последних значений. Такие вычисления могут быть продолжены и в 56 узлах $V_4 \backslash V_3$, и сколь угодно далее. На каждом уровне значения в узлах $V_{n+1} \backslash V_n$ вычисляются как функции от значений в узлах $V_n \backslash V_{n-1}$. Здесь отметим, что прямоугольник полупериодов K не был выбран однозначно, так как четыре таких прямоугольника содержатся в прямоугольнике периодов $\mathbb{C}/\Lambda$ (Рис. 1), но независимо от выбора, полюс и значение $-\beta$ располагаются на одной диагонали, а значения 0 и $-1/\beta$ – на другой.

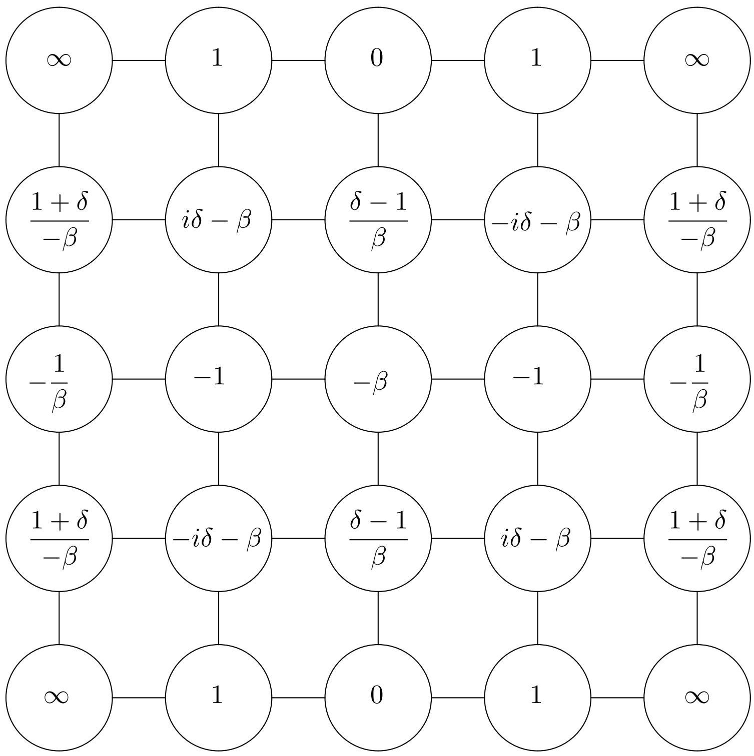

Рис. 1: Значения функции $\mathcal{R}_\alpha$ в узлах решетки Λ_2

3.Вычисление полного эллиптического интеграла методом Гаусса. Установленное Гауссом равенство

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\pi}{2G(\sqrt{1-k^2})},\ 0<k<1, \qquad (5)$$

где $G(x)$ – арифметико-геометрическое среднее чисел 1 и x, позволяет высокоэффективно вычислять полные эллиптические интегралы [1].

Равенство (5) остается верным и при расположении эллиптического модуля Якоби k на единичной полуокружности, с центром в нуле, в комплексной полуплоскости, при условии $k \neq \pm 1$. В частности, интеграл лемнискаты, с точностью до четвертого (десятого) знака включительно, уже вычисляется после двух (трех) итераций по вычислению величины $G(\sqrt{2})$, обратная которой именуется постоянной Гаусса, а значение самого интеграла именуется постоянной лемнискаты:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2G(\sqrt{2})} \approx 1.311028777.$$

Вычисление полного эллиптического интеграла методом Гаусса распространяется и на случаи, когда квартический многочлен в подынтегральном выражении заменяется на кубический:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,p_\alpha(x)}} = \frac{\sqrt{\beta}\,\pi}{2G(\beta)},\ \int_{-\beta}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x\,p_\alpha(x)}} = \frac{\sqrt{\beta}\,\pi}{G(\delta)}.$$

4.Алгоритм вычисления неполного эллиптического интеграла. Для ясного изложения алгоритма вычислений неполных эллиптических интегралов

$$\begin{cases} I_+ = \displaystyle\int_u^v \frac{dx}{\sqrt{x\,p_\alpha(x)}},\ 0<u<v<\infty \\ \\ I_- = \displaystyle\int_u^v \frac{dx}{\sqrt{-x\,p_\alpha(x)}},\ -\infty<u<v<-1/\beta \end{cases}$$

будем полагать, без утраты общности, что пределы интегрирования u и v не содержатся в счетном объединении $\cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{R}_\alpha(\Lambda_n)$.

Ключевая процедура алгоритма вычисляет значение функции $\mathcal{R}_\alpha$ в узле Λ_{i+1}, посередине пары соседних узлов Λ_i, между значениями которых располагается заданное значение x, и определяет местоположение этого узла. Обозначим эту процедуру $P(x, w_0, t_0)$ и отдельно опишем ее. Процедура возвращает два значения w и t, в вычислении которых используются значения двух глобальных переменных алгоритма c и d, наряду со значениями трех аргументов x, w_0 и t_0. Ее формальная запись выглядит так:

$$\texttt{если } |x| < |w_0|, \texttt{ то } w \leftarrow s_-(w_0, c) \texttt{ и } t \leftarrow t_0 - d,$$

$$\texttt{иначе } w \leftarrow s_+(w_0, c) \texttt{ и } t \leftarrow t_0 + d.$$

Далее приведем формальную запись полагающегося на указанную процедуру алгоритма вычисления интеграла I_+. В скобках укажем нужные модификации алгоритма для вычисления интеграла I_-.

Вход. Нижний u и верхний v пределы интегрирования, число итераций m.

Выход. I_+ (или I_-) – значение неполного эллиптического интеграла.

1. `Положить` $i \leftarrow 0$, $d \leftarrow p \leftarrow q \leftarrow 1$, $a \leftarrow b \leftarrow c \leftarrow 1$ (или $g_-(-1/\beta)$, для вычисления I_-).

2. `Пока` $i < m$

    - $i \leftarrow i + 1$, $d \leftarrow d/2$, $c \leftarrow h_3(c)$ (или $h_0(c)$, для вычисления I_-),
    - $(a_0, p_0) \leftarrow (a, p)$, $(b_0, q_0) \leftarrow (b, q)$, $(a, p) \leftarrow P(u, a, p)$, $(b, q) \leftarrow P(v, b, q)$.

3. $H \leftarrow \dfrac{\sqrt{\beta}\pi}{2}\left(q-p+d\left(\dfrac{|v|-|b|}{|b_0-b|}-\dfrac{|u|-|a|}{|a_0-a|}\right)\right)$,

$I_+ \leftarrow H/G(\beta)$ (или $I_- \leftarrow H/G(\delta)$).

Никакие дополнительные модификации алгоритма не потребуются для вычислений неполных эллиптических интегралов вида $I_\pm$ и в тех случаях, когда пределы интегрирования оказываются на интервалах $(-1/\beta, -\beta)$ или $(-\beta, 0)$. Дробно-линейными преобразованиями пределов интегрирования первый случай сводится к вычислению интеграла $-I_+$, а второй – к вычислению интеграла $-I_-$. Соответствующими преобразованиями являются:

$$x \mapsto -\frac{x+\beta}{\beta x+1},\ x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Подчеркнем, что оба преобразования меняют ориентацию соответствующего интеграла на противоположную.

Примечание. 30 мая 2011 г. исполнилось 212 лет замечательному разделу математики изучающему эллиптические функции и эллиптические кривые, и 70 лет замечательному ученому механику Сергею Яковлевичу Степанову.

ЛИТЕРАТУРА

1. *McKean H. Moll V.* Elliptic Curves: Function Theory, Geometry, Arithmetic. Cambridge: Univ. Press, 1999. 294 p.

2. *Whittaker E. T. Watson G. N.* A Course of Modern Analysis. Cambridge Univ. Press; 4th edition (January 2, 1927). 620 p.