

УДК 531/534; 534.1; 519.642.5; 519.688; 629.015

НОВЫЕ АЛГОРИТМЫ В ЗАДАЧЕ О ВДАВЛИВАНИИ
АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОГО ШТАМПА ПРОИЗВОЛЬНОЙ
ФОРМЫ В ВЯЗКОУПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

И.Ф. Кожевников, Д. Дюгамель, Х.П. Ин

Предложена новая модель вязкоупругого контакта между шиной и дорогой, а именно, изучена проблема вдавливания абсолютно жесткого тела произвольной формы, моделирующего неровность, в вязкоупругое полупространство, моделирующее шину, при отсутствии трения. В случае односвязной области контакта проблема решена численно с использованием Метода Обращения Матрицы¹ (МОМ), разработанного Калкером для упругого случая и адаптированного авторами для вязкоупругого случая. Метод проверен путем сравнения численных результатов с аналитическими для сферического (нагрузка-разгрузка) и конического штампов (нагрузка). В качестве примера, алгоритм был применен для одиночных штампов: сферического, конического и цилиндрического, опирающегося на плоскость своей образующей.

В случае возникновения нескольких зон контакта, время счета с использованием МОМ резко возрастает. Поэтому был предложен новый численный алгоритм: Двухмасштабный Итерационный Метод² (ДИМ). В данном алгоритме при подсчете распределения давления (микроуровень) под каждым штампом с учетом контактных сил под другими штампами (макроуровень) используется Локальный Метод Обращения Матрицы³ (ЛМОМ). ДИМ был проверен путем сравнения результатов, полученных с помощью МОМ. В качестве примера

¹Matrix Inversion Method

²Two-scale Iterative Method

³Local Matrix Inversion Method

алгоритм применен как для простых конфигураций, состоящих из семи сферических или семи цилиндрических штампов, так и для более сложной конфигурации, состоящей из двенадцати произвольно расположенных штампов и включающей сферические, цилиндрические, конические и цилиндрические штампы, опирающиеся на плоскость своими образующими. Последняя конфигурация моделирует произвольные микронеровности дороги. Для всех перечисленных конфигураций найдены контактные силы и распределения давлений в зависимости от проникновения штампа. Результаты данного исследования могут быть использованы при изучении шумов, возникающих при качении колеса по неровной дороге.

Ключевые слова: контактная механика, вязкоупругий контакт, численные методы, штамп, шина, микронеровности дороги.

1. Введение. Во многих практических контактных задачах имеет место вязкоупругое поведение материалов, хотя до настоящего времени контакт между шиной автомобиля и дорогой зачастую моделируется в рамках теории упругости. Например, начиная с некоторой скорости качения, результаты, полученные на основании упругой модели, расходятся с экспериментальными данными: зона контакта оказывается в действительности меньших размеров, так как материал «не успевает» реагировать на возмущение. Данное обстоятельство связано со сложным химическим составом резиновой смеси протектора современной автомобильной шины, в производстве которого используется около двадцати материалов. Таким образом, цель данной работы – предложить новую контактную модель с учетом вязкоупругости материала шины.

Изучение контактных задач восходит к работам Ж.В. Буассинеска (J.V. Boussinesq) [1], использовавшего теорию потенциалов, и Г. Герца (H. Hertz) [2, 3], рассмотревшего проблему контакта двух упругих тел. Проблема вдавливания жесткого

штампа в вязкоупругое основание исследовалось многими авторами. Наиболее простой и эффективный подход предложил Дж.Р.М. Радок (J.R.M. Radok) [4]. Согласно его технике, решение для вязкоупругого случая получается из решения для упругой задачи заменой упругих констант на интегральные операторы. Техника Радока работает в случае монотонно увеличивающейся зоны контакта, что не выполняется при контакте колеса с дорогой. Это затруднение было изучено Т.К.Т. Тингом (T.C.T. Ting) [5] для жесткого осесимметричного штампа. Многие контактные задачи теории упругости и вязкоупругости [6, 7] были поставлены и решены Л.А. Галиным. В частности, им был решен ряд задач о контактных напряжениях для движущихся по упругому полупространству штампов произвольной формы с учетом сил трения. В дальнейшем [8] им была рассмотрена задача о движении жесткого штампа по границе вязкоупругой полуплоскости с учетом сил инерции. Существенный вклад в развитие теории взаимодействия упругих и вязкоупругих тел с учетом адгезионных сил различной природы, в рамках которой изучается совместное влияние физических, механических и геометрических свойств поверхности и тонких поверхностных слоев на процессы трения и изнашивания в сопряжениях микро- и наноразмеров, внесла И.Г. Горячева [9]. В работе В.Г. Вильке [10] предложена инвариантная форма силовой функции, зависящая от геометрических характеристик пересечения двух недеформированных тел. Полученное выражение силовой функции предлагается использовать в случаях, когда гипотезы классической теории контакта не выполняются.

Проблема многоточечного контакта также исследовалась многими авторами. Дж.А. Гринвуд и Дж.Б.П. Вильямсон (J.A. Greenwood, J.B.P. Williamson) [11] предложили статистический метод в задаче о контакте шероховатых поверхностей. Неровности аппроксимировались независимыми сферами, исходя из статистических свойств поверхностей, и использовалась теория

Герца. Подобные методы, однако, не учитывают взаимовлияния неровности на неровность. Дж. МакКул (J. McCool) [12] провел численное сравнение упругой модели Гринвуда и Вильямсона с двумя более общими моделями (изотропной и анизотропной). В работе Дж. Карбоне и Ф. Боттильоне (G. Carbone, F. Bottiglione) [13] проведен критический анализ основных контактных теорий шероховатых поверхностей, базирующихся на идее Гринвуда и Вильямсона. В исследованиях С. Кухарского, Т. Климчака, А. Полиянюка, Дж. Качмарека (S. Kucharski, T. Klimczak, A. Polijaniuk, J. Kaczmarek) [14] предложена модель упругопластического контакта шероховатых поверхностей, адаптирующая большинство предположений и вводящая более реалистичный упругопластический закон деформаций. В работе Г.Г. Адамса и М. Носоновского (G.G. Adams, M. Nosonovsky) [15] имеется обзор задач, посвященных моделированию контакта. В нем особое внимание уделяется взаимосвязям контактных сил с геометрическими, механическими свойствами, а также свойствами материалов контактирующих тел. В работе Ж. Сесбронна, Ф. Анфоссо-Ледэ, Д. Дюгамеля, Х.П. Ина, Д. Ле Уэдэка (J. Cesbron, F. Anfosso-Lédée, D. Duhamel, H.P. Yin, D. Le Houédec) [16] представлено экспериментальное исследование динамического контакта между шиной и дорогой для предсказания шума при качении колеса. Измерения контактных сил были проведены для слика (покрышка без протектора), катящегося по шести различным дорожным покрытиям со скоростями от 30 до 50 км/ч. Экспериментальные зоны контакта, измеренные во время качения, оказались меньше по сравнению со статическим случаем, что объясняется главным образом динамическими свойствами поведения резиновой смеси, например, вязкоупругим поведением резины. Также можно отметить работы И.В. Крагельского и Н.Б. Демкина [17], М. О'Каллагана и М.А. Кэмерона (M. O'Callaghan, M.A. Cameron) [18], А.В. Буша, Р.Д. Гибсона, Т.Р. Томаса (A.W. Bush, R.D. Gibson, T.R.

Thomas) [19]. Для изучения контакта между шероховатыми поверхностями в литературе также применялись итерационные подходы – см. К.П. Сингх и Б. Пауль (K.P. Singh, B. Paul) [20], М.Н. Вебстер и Р.С. Сэйлс (M.N. Webster, R.S. Sayles) [21], И. Ю и Л. Чжэн (Y. Ju, L. Zheng) [22], Л. Чанг и И. Гао (L. Chang, Y. Gao) [23]. Время счета с использованием подобных методов резко возрастает с увеличением числа неизвестных. Для подсчета распределения давления и формы зоны контакта между двумя упругими телами произвольной формы использовался численный подход, описанный в работе Л. Наяка и К.Л. Джонсона (L. Nayak, K.L. Johnson) [24]. Д. Ноуэлл и Д.А. Хиллс (D. Nowell, D.A. Hills) [25] предложили другой подход для решения задачи многоточечного нормального контакта, который был позже обобщен на контакт с касательными силами М. Чиавареллой, Д.А. Хиллсом, Р. Муболой (M. Ciavarella, D.A. Hills, R. Moobola) [26]. В указанном подходе каждая неровность создает постоянное нормальное перемещение под другими неровностями. Указанная гипотеза достаточно корректна, если неровности не располагаются слишком близко друг к другу. В работе Ю.А. Карпенко и А. Акая (Yu.A. Karpenko, A. Akay) [27] описывается численный метод для определения силы трения между двумя шероховатыми поверхностями. Показывается, как меняется трение с изменением шероховатости поверхности. Анализ распределения давления при износе от трения скольжения проводился в работе З. Лю, А. Невилля, Р.Л. Рюбена (Z. Liu, A. Neville, R.L. Reuben) [28]. В исследованиях Х.М. Стэнли и Т. Като (H.M. Stanley, T. Kato) [29] использовался еще один численный метод, базирующийся на быстром преобразовании Фурье (Fast Fourier Transform). Подобная процедура может применяться в контактных проблемах с большим числом неровностей.

МОМ, разработанный Дж.Дж. Калкером (J.J. Kalker) [30] для упругого случая и описанный в книжке К.Л. Джонсо-

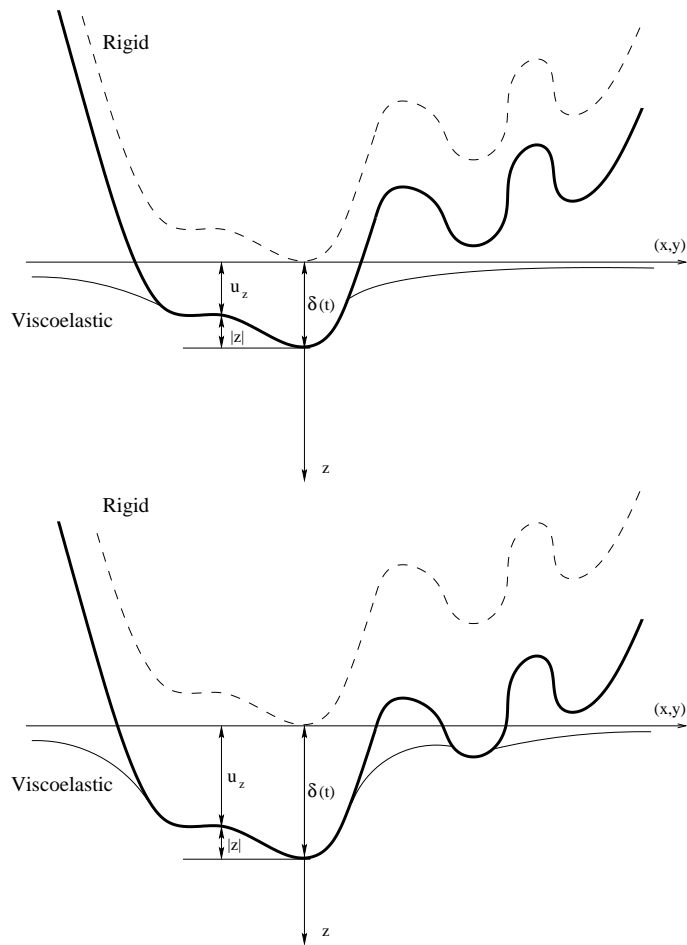


Рис. 1: Контакт между жестким штампом произвольной формы и вязкоупругим полупространством

на (К.Л. Johnson) [31], использовался в работе Ж. Сесбрана, Ф. Анфоссо-Ледэ, Х.П. Ина, Д. Дюгамеля, Д. Ле Уэдэка (J. Cesbron, F. Anfosso-Lédée, H.P. Yin, D. Duhamel, D. Le Houédec) [32] для анализа упругого многоточечного контакта между ши-

ной и дорогой. В указанной работе предложен ДИМ. При подсчете распределения давления (микроуровень) под каждым штампом с учетом контактных сил под другими штампами (макроуровень) использовался ЛМОМ.

В данной работе предлагается новая модель вязкоупругого контакта между шиной и дорогой. С ее помощью изучается проблема вдавливания абсолютно жесткого тела произвольной формы, моделирующего неровность, в вязкоупругое полупространство, моделирующее шину, при отсутствии трения. Оба итерационных метода (МОМ, ДИМ) были адаптированы для вязкоупругого случая.

2. Алгоритм для вязкоупругого контакта. Рассматривается абсолютно жесткий штамп произвольной формы $z(x, y)$, вдавливаемый в вязкоупругое полупространство. Под действием нормальной силы происходит проникновение штампа $\delta(t)$, сопровождающееся изменением зоны контакта и распределения давления $p(x, y, t)$. Взаимосвязи между распределением давления, контактной силой $F(t)$ и проникновением штампа ищутся в предположении отсутствия трения в зоне контакта. В декартовой системе координат поверхность вязкоупругого полупространства до нагружения (Рис. 1) соответствует плоскости (x, y) . Граничные условия ($z = 0$) задаются следующими соотношениями

$$\begin{aligned} u_z(x, y, t) &= \delta(t) - |z(x, y)|, & (x, y) \in \Omega(t), \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = \sigma_{zx} &= 0, & (x, y) \notin \Omega(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $u_z(x, y, t)$ - нормальная компонента перемещения точки поверхности полупространства, σ_{ij} - тензор напряжений, $\Omega(t) = \bigcup_{r=1}^M \Omega_r(t)$ - текущая зона контакта, M - максимальное число зон контакта (некоторые $\Omega_r(t)$ могут быть пустыми).

Решение задачи Буссинеска [1], связывающее нормальное перемещение точки (x, y) , принадлежащей поверхности упругого

полупространства, с нормальной силой, приложенной в точке с координатами (ξ, η) , может быть представлено в следующем виде

$$u_z(x, y) = \frac{(1 - \nu)}{\pi} \frac{1}{2\mu_e} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad (2.2)$$

где μ_e - упругий модуль сдвига, ν - коэффициент Пуассона, который предполагается постоянным. Решение аналогичной задачи для вязкоупругого случая может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} u_z(x, y, t) &= \frac{(1 - \nu)}{\pi} \int_0^t J(t - \tau) \left[\iint_{\Omega^m} \frac{1}{\rho} \frac{dp(\xi, \eta, \tau)}{d\tau} d\xi d\eta \right] d\tau = \\ &= \delta(t) - |z(x, y)|, \quad (x, y) \in \Omega(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\Omega^m = \bigcup_{r=1}^M \Omega_r^m$ - максимально возможная зона контакта. В области Ω^m давление либо положительно, либо равно нулю в зависимости от того, находится ли точка в контакте или нет в рассматриваемый момент времени.

МЕТОД ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦ.

Данная контактная задача может быть решена численно с использованием МОМ, адаптированного для вязкоупругого случая. Прямоугольная область поверхности полупространства размера $L_x \times L_y$ была разбита на $N = n_x n_y$ прямоугольных элементов размерами $dx = \frac{L_x}{n_x}$ и $dy = \frac{L_y}{n_y}$ с центрами в точках (x_i, y_i) такими, что на каждом из этих элементов давление предполагалось постоянным (Рис. 2). С учетом дискретизации времени $\tau = n_\tau d\tau$ уравнение (2.3) представляется в форме

$$\sum_{k=1}^l J((l - k)d\tau) \sum_{j=1}^n T_{ij} \frac{p_j^k - p_j^{k-1}}{d\tau} d\tau = \delta^l - z_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.4)$$

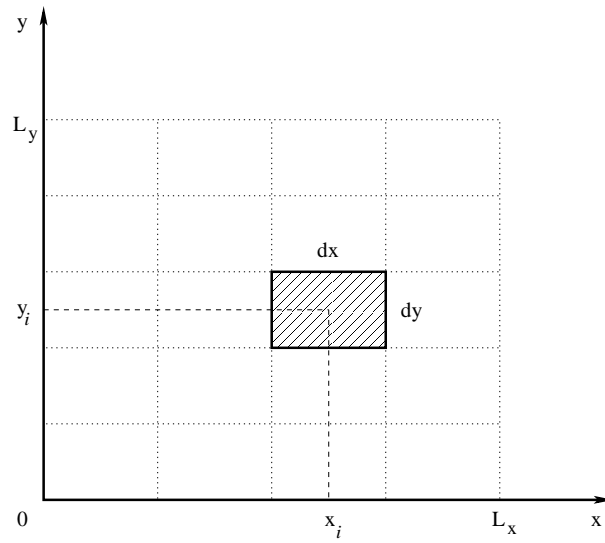


Рис. 2: Дискретизация с помощью прямоугольных элементов

где $p_j^k = p(x_j, y_j, kd\tau)$, $\delta^l = \delta(ld\tau)$, $z_i = z(x_i, y_i)$ и $n = n(t)$ - число контактных элементов в момент времени t . Коэффициенты T_{ij} , выражающие зависимость перемещения точки i от удельного давления контактного элемента с центром в точке j , подсчитаны с помощью соотношений Лява (А.Е.Н. Love) [33] для поверхности упругого полупространства

$$T_{ij} = \frac{(1 - \nu)}{\pi} \int_{y_j - \frac{dy}{2}}^{y_j + \frac{dy}{2}} \int_{x_j - \frac{dx}{2}}^{x_j + \frac{dx}{2}} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2}}. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.4) представляется в следующей форме

$$\begin{aligned}
 J(0) \sum_{j=1}^n T_{ij} p_j^l &= \delta^l - z_i - v_i^{l-1}, \quad i = \overline{1, n}, \\
 v_i^{l-1} &= \sum_{k=1}^{l-1} J \left((l-k) d\tau \right) \sum_{j=1}^n T_{ij} \frac{p_j^k - p_j^{k-1}}{d\tau} d\tau - J(0) \sum_{j=1}^n T_{ij} p_j^{l-1}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Теперь для определения p_j^l для заданной истории нагружений v_i^{l-1} можно воспользоваться МОМ, который был запрограммирован, следуя алгоритму, описанному в [31]. Согласно этому алгоритму, после разрешения уравнения (2.6), некоторые величины p_j^l могут стать отрицательными. В этом случае давление в этих точках полагается равным нулю, а данные точки не рассматриваются на следующей итерации. Здесь предполагается, что проникновение δ^l задано. Воспользовавшись уравнением

$$\sum_{j=1}^n p_j^l dx dy = F^l, \tag{2.7}$$

можно найти p_j^l и δ^l для заданной результирующей нормальной силы F^l .

ДВУХМАСШТАБНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД.

В случае возникновения нескольких зон контакта, время счета с использованием МОМ резко возрастает. В этом случае можно воспользоваться ДИМ, также адаптированным для вязкоупругого случая. Нормальная компонента перемещения $u_z(x, y, t)|_{(x,y) \in \Omega_r(t)}$ имеет две составляющие: составляющую v_r , соответствующую нормальному перемещению точки поверхности полупространства с координатами (x, y) под r -й неровностью из-за давления, возникающего под r -й неровностью, и составляющую w_r , соответствующую нормальному перемещению точки поверхности полупространства с координатами (x, y) под

r -й неровностью из-за давления, возникающего под другими неровностями

$$\begin{aligned}
u_z(x, y, t)|_{(x, y) \in \Omega_r(t)} &= v_r(x, y, t) + w_r(x, y, t) = \delta(t) - |z(x, y)|, \\
v_r(x, y, t) &= \int_0^t J(t - \tau) I[\Omega_r^m] d\tau, \\
w_r(x, y, t) &= \int_0^t J(t - \tau) I[\Omega^m \setminus \Omega_r^m] d\tau, \\
I[\Omega] &= \frac{(1 - \nu)}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{1}{\rho} \frac{dp(\xi, \eta, \tau)}{d\tau} d\xi d\eta, \quad (x, y) \in \Omega_r(t), \quad r = \overline{1, M}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Теперь контактная задача может быть представлена в следующем виде

$$\begin{aligned}
&\int_0^t J(t - \tau) I[\Omega_r^m] d\tau = v_r(x, y, t) = \delta(t) - |z(x, y)| - w_r(x, y, t) = \\
&= \delta(t) - |z(x, y)| - \int_0^t J(t - \tau) I[\Omega^m \setminus \Omega_r^m] d\tau, \quad \begin{matrix} (x, y) \in \Omega_r(t), \\ r = \overline{1, M}. \end{matrix}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Контактная сила под r -й неровностью задается формулой

$$F_r(t) = \iint_{\Omega_r(t)} p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta, \quad (x, y) \in \Omega_r(t), \quad r = \overline{1, M}. \tag{2.10}$$

Далее, пусть для всех неровностей, кроме r -й, распределения давлений заменятся нормальными контактными силами. Данная аппроксимация позволяет ускорить вычисления.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
w_r(X_r, Y_r, t) &= \int_0^t J(t-\tau) I[\Omega^m \setminus \Omega_r^m] d\tau \approx \\
&\approx \frac{(1-\nu)}{\pi} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^M \frac{1}{\rho_{rs}} \int_0^t J(t-\tau) \frac{dF_s(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad r = \overline{1, M}, \\
\rho_{rs} &= \sqrt{(X_r - X_s)^2 + (Y_r - Y_s)^2},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где (X_r, Y_r) - координаты вершины r -й неровности. В этом случае контактная задача может быть представлена в следующем виде

$$\begin{aligned}
&\int_0^t J(t-\tau) I[\Omega_r^m] d\tau = \delta(t) - |z(x, y)| - \\
&- \frac{(1-\nu)}{\pi} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^M \frac{1}{\rho_{rs}} \int_0^t J(t-\tau) \frac{dF_s(\tau)}{d\tau} d\tau, \\
F_r(t) &= \iint_{\Omega_r(t)} p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta, \quad (x, y) \in \Omega_r(t), \quad r = \overline{1, M}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Алгоритм 1 (A1). Если провести дискретизацию уравнений (2.9) и (2.10), то получится следующая система

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^l J((l-k)d\tau) \sum_{j=1}^{n_r} T_{ij} \frac{p_j^k - p_j^{k-1}}{d\tau} d\tau = \delta^l - z_i - \\
&- \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^M \sum_{k=1}^l J((l-k)d\tau) \sum_{j=1}^{n_s} T_{ij} \frac{p_j^k - p_j^{k-1}}{d\tau} d\tau, \\
F_r^l &= \sum_{j=1}^{n_r} p_j^l dx dy, \quad i = \overline{1, n_r}, \quad r = \overline{1, M},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

где $F_r^l = F_r(l d\tau)$, $n_r = n_r(t)$ - число контактных элементов в момент времени t для r -ой неровности.

Первое уравнение системы (2.13) записывается как

$$J(0) \sum_{j=1}^{n_r} T_{ij} p_j^l = \delta^l - z_i - v_i^{l-1} - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^M \left[\sum_{k=1}^{l-1} J((l-k)d\tau) \sum_{j=1}^{n_s} T_{ij} \frac{p_j^k - p_j^{k-1}}{d\tau} d\tau + J(0) \sum_{j=1}^{n_s} T_{ij} \frac{p_j^l - p_j^{l-1}}{d\tau} d\tau \right],$$

$$v_i^{l-1} = \sum_{k=1}^{l-1} J((l-k)d\tau) \sum_{j=1}^{n_r} T_{ij} \frac{p_j^k - p_j^{k-1}}{d\tau} d\tau - J(0) \sum_{j=1}^{n_r} T_{ij} p_j^{l-1}, \quad r = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, n_r}.$$

Далее для подсчета распределения давления под каждой неровностью используется итерационная процедура для каждого момента времени l . Первая итерация

$$J(0) \sum_{j=1}^{n_r} T_{ij} p_{\mathbf{I}j}^l = \delta^l - z_i - v_i^{l-1} - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^M \sum_{k=1}^{l-1} J((l-k)d\tau) \sum_{j=1}^{n_s} T_{ij} \frac{p_j^k - p_j^{k-1}}{d\tau} d\tau, \quad i = \overline{1, n_r}, \quad r = \overline{1, M}$$

состоит в определении $p_{\mathbf{I}j}^l$, $j = \overline{1, n_r}$, $r = \overline{1, M}$ для заданной истории нагружений, используя МОМ. Вторая итерация имеет следующий вид

$$J(0) \sum_{j=1}^{n_r} T_{ij} p_{\mathbf{II}j}^l = \delta^l - z_i - v_i^{l-1} - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^M \left[\sum_{k=1}^{l-1} J((l-k)d\tau) \sum_{j=1}^{n_s} T_{ij} \frac{p_j^k - p_j^{k-1}}{d\tau} d\tau + J(0) \sum_{j=1}^{n_s} T_{ij} \frac{p_{\mathbf{I}j}^l - p_j^{l-1}}{d\tau} d\tau \right],$$

$$i = \overline{1, n_r}, \quad r = \overline{1, M}$$

и позволяет определить $p_{\mathbf{II}j}^l$, $j = \overline{1, n_r}$, $r = \overline{1, M}$. Итерационная процедура останавливается, когда выполняется критерий сходимости

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_r} (p_{\mathbf{N}+1j}^l - p_{\mathbf{N}j}^l)^2}{\sum_{j=1}^{n_r} (p_{\mathbf{N}j}^l)^2} < \varepsilon, \quad r = \overline{1, M}, \quad (2.17)$$

где наперед заданный параметр ε определяет точность метода. Далее, второе уравнение системы (2.13) позволяет определить F_r^l .

Алгоритм 2 (A2). Если провести дискретизацию уравнений (2.12), то получится следующая система

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^l J \left((l-k)d\tau \right) \sum_{j=1}^{n_r} T_{ij} \frac{p_j^k - p_j^{k-1}}{d\tau} d\tau = \delta^l - z_i - \\ & - \frac{(1-\nu)}{\pi} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^M \frac{1}{\rho_{rs}} \sum_{k=1}^l J \left((l-k)d\tau \right) \frac{F_s^k - F_s^{k-1}}{d\tau} d\tau, \quad (2.18) \\ & F_r^l = \sum_{j=1}^{n_r} p_j^l dx dy, \quad i = \overline{1, n_r}, \quad r = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

Систему (2.18) можно представить как

$$\begin{aligned} & J(0) \sum_{j=1}^{n_r} T_{ij} p_j^l = \delta^l - z_i - v_i^{l-1} - \\ & - \frac{(1-\nu)}{\pi} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^M \frac{1}{\rho_{rs}} \left[\sum_{k=1}^{l-1} J \left((l-k)d\tau \right) \frac{F_s^k - F_s^{k-1}}{d\tau} d\tau + J(0) \frac{F_s^l - F_s^{l-1}}{d\tau} d\tau \right], \\ & v_i^{l-1} = \sum_{k=1}^{l-1} J \left((l-k)d\tau \right) \sum_{j=1}^{n_r} T_{ij} \frac{p_j^k - p_j^{k-1}}{d\tau} d\tau - J(0) \sum_{j=1}^{n_r} T_{ij} p_j^{l-1}, \quad (2.19) \\ & F_r^l = \sum_{j=1}^{n_r} p_j^l dx dy, \quad i = \overline{1, n_r}, \quad r = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

Для подсчета распределения давления под каждой неровностью используется итерационная процедура для каждого момента времени l . Первая итерация

$$\begin{aligned}
J(0) \sum_{j=1}^{n_r} T_{ij} p_{\mathbf{I}j}^l &= \delta^l - z_i - v_i^{l-1} - \\
&- \frac{(1-\nu)}{\pi} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^M \frac{1}{\rho_{rs}} \sum_{k=1}^{l-1} J\left((l-k)d\tau\right) \frac{F_s^k - F_s^{k-1}}{d\tau} d\tau, \quad (2.20) \\
F_{\mathbf{I}r}^l &= \sum_{j=1}^{n_r} p_{\mathbf{I}j}^l dx dy, \quad i = \overline{1, n_r}, \quad r = \overline{1, M}
\end{aligned}$$

состоит в определении $p_{\mathbf{I}j}^l$, $j = \overline{1, n_r}$, $r = \overline{1, M}$ для заданной истории нагружений. Далее, второе уравнение системы (2.20) позволяет определить $F_{\mathbf{I}r}^l$. Вторая итерация имеет вид

$$\begin{aligned}
J(0) \sum_{j=1}^{n_r} T_{ij} p_{\mathbf{II}j}^l &= \delta^l - z_i - v_i^{l-1} - \quad (2.21) \\
&- \frac{(1-\nu)}{\pi} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^M \frac{1}{\rho_{rs}} \left[\sum_{k=1}^{l-1} J\left((l-k)d\tau\right) \frac{F_s^k - F_s^{k-1}}{d\tau} d\tau + J(0) \frac{F_{\mathbf{I}s}^l - F_{\mathbf{I}s}^{l-1}}{d\tau} d\tau \right], \\
F_{\mathbf{II}r}^l &= \sum_{j=1}^{n_r} p_{\mathbf{II}j}^l dx dy, \quad i = \overline{1, n_r}, \quad r = \overline{1, M}.
\end{aligned}$$

Она позволяет определить величины $p_{\mathbf{II}j}^l$, $F_{\mathbf{II}r}^l$, $j = \overline{1, n_r}$, $r = \overline{1, M}$. Итерационная процедура останавливается, когда выполняется критерий сходимости (2.17).

3. Численные примеры. Сначала будут рассмотрены одиночные штампы: сферический штамп (Рис. 3а) радиуса R , конический штамп (Рис. 3d) с углом полураствора θ и цилиндрический штамп (Рис. 3е) с радиусом основания R и высотой

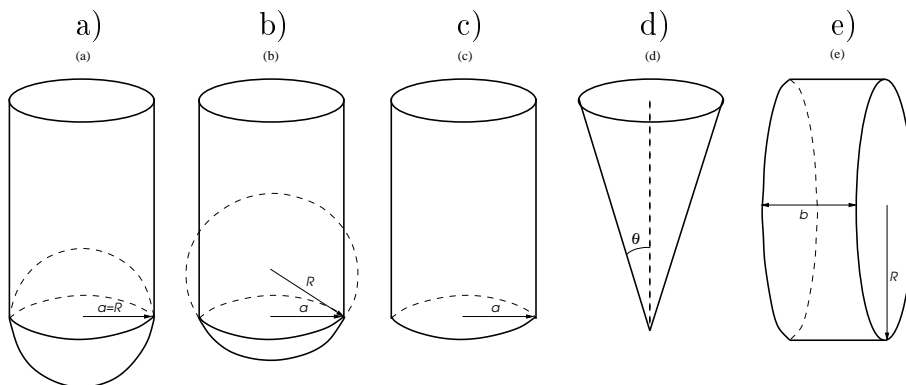


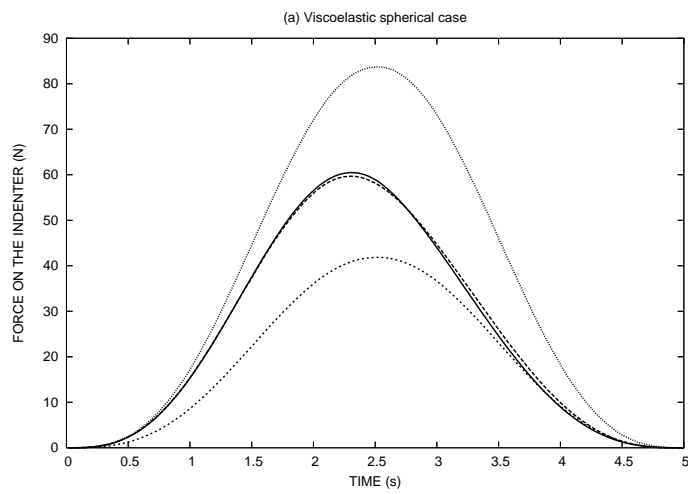
Рис. 3: Типы штампов: *a*) сферический, *b*) цилиндрический со сферическим окончанием, *c*) цилиндрический, *d*) конический, *e*) цилиндрический, опирающийся на плоскость своей образующей

b, опирающийся на плоскость своей образующей. Далее, будут изучены более сложные конфигурации, состоящие из семи сферических штампов, семи цилиндрических штампов с радиусом основания a со сферическими окончаниями радиуса $R > a$ (Рис. 3*b*), семи цилиндрических штампов (Рис. 3*c*) с радиусом основания a и, наконец, более общая конфигурация, состоящая из двенадцати штампов произвольной формы. Здесь необходимо отметить, что в случае сложных конфигураций речь идет о едином жестком штампе, имеющем такую геометрию, а не о нескольких штампах, независимо друг от друга воздействующих на вязкоупругое полупространство.

СФЕРИЧЕСКИЙ ШТАМП.

В первую очередь было произведено сравнение МОМ с аналитическими результатами для одиночного сферического штампа (Рис. 3*a*) радиуса R , действующего на вязкоупругое полупространство. Аналитические результаты [5] и [34], используемые

a)



b)

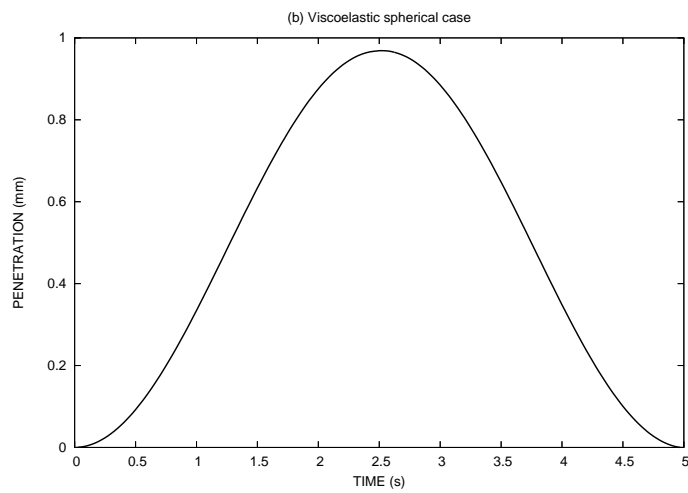


Рис. 4: Сферический штамп. Зависимости контактной силы (*a*) и глубины проникновения (*b*) от времени при заданном радиусе контакта в рамках вязкоупругих аналитической (—) и численной (-----) моделей, упругой модели с $E_{\infty} = 7.5$ МПа (.....) и с $E_0 = 15$ МПа (.....)

в сравнении, описаны в книге [35]

$$\delta(t) = \frac{a^2(t)}{R} - \frac{1}{R} \int_{t_m}^t J(t - \theta) \frac{d}{d\theta} \left[\int_{t_1(\theta)}^{\theta} G(\theta - \tau) \frac{da^2(\tau)}{d\tau} d\tau \right] d\theta, \quad (3.1)$$

$$p(x, y, t) = \frac{2}{\pi(1 - \nu)R} \int_0^{t_1(t)} G(t - \tau) \frac{d\sqrt{a^2(\tau) - x^2 - y^2}}{d\tau} d\tau. \quad (3.2)$$

Результирующая нормальная контактная сила $F(t)$ под штампом в зависимости от контактного радиуса $a(t)$ может быть подсчитана по формуле

$$F(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{a(t)} r p(r, t) d\varphi dr = \frac{4}{3(1 - \nu)R} \int_0^{t_1(t)} G(t - \tau) \frac{da^3(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (3.3)$$

Здесь t_1 - новая переменная времени

$$\begin{aligned} t_1(t) &= t, & t &\leq t_m, \\ a(t_1) &= a(t), & t &\geq t_m \quad (t_1 < t_m), \end{aligned} \quad (3.4)$$

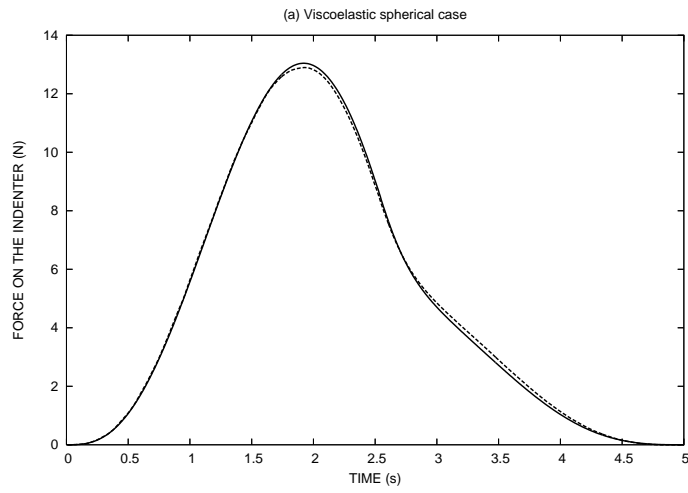
где t_m - точка максимума контактного радиуса $a(t)$. В следующих примерах напряжение представляется в форме ряда Прони (Prony's series)

$$\sigma(t) = \left(E_\infty + (E_0 - E_\infty) e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right) \varepsilon_0, \quad (3.5)$$

где τ_c - характеристическое время, E_0 - мгновенный модуль Юнга, E_∞ - статический модуль Юнга, ε_0 - мгновенная деформация. Далее, функции ползучести и релаксации могут быть представлены в следующем виде

$$\begin{aligned} G(t) &= E_\infty + (E_0 - E_\infty) e^{-\frac{t}{\tau_c}}, \\ J(t) &= \frac{1}{E_\infty} - \frac{(E_0 - E_\infty)}{E_0 E_\infty} e^{-\frac{E_\infty}{E_0} \frac{t}{\tau_c}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

a)



b)

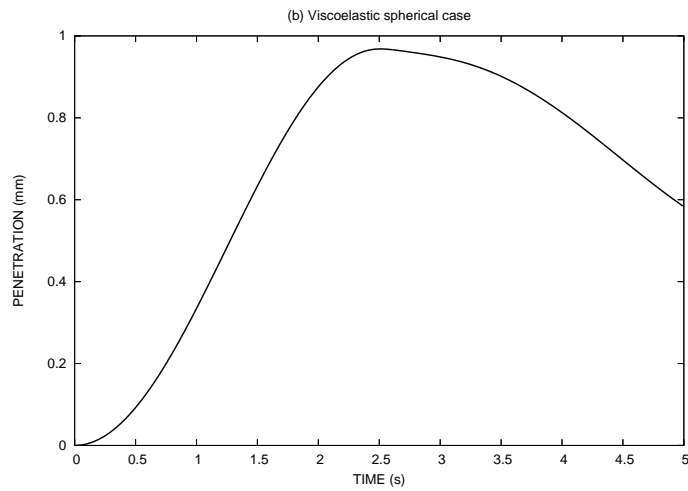
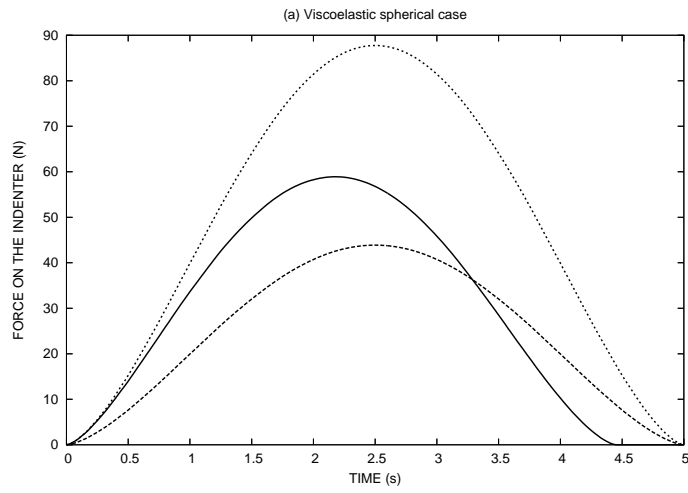


Рис. 5: Сферический штамп. Зависимости контактной силы (*a*) и глубины проникновения (*b*) от времени при заданном радиусе контакта в рамках вязкоупругих аналитической (—) и численной (-----) моделей для материала, свойства которого сильно зависят от времени

a)



b)

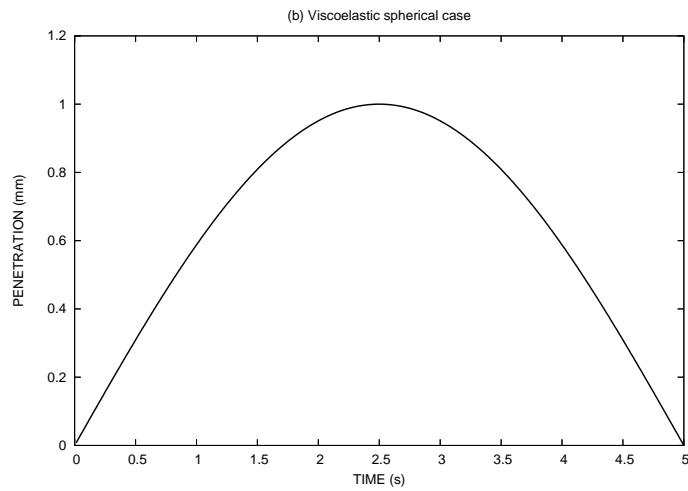


Рис. 6: Сферический штамп. Зависимость контактной силы (a) от времени при заданном проникновении (b) в рамках вязкоупругой численной модели (—), упругой модели с $E_\infty = 7.5$ МПа (-----) и с $E_0 = 15$ МПа (.....)

Далее, предполагается, что $E_\infty = 7.5$ МПа, $E_0 = 15$ МПа, $\tau_c = 1$ с и $R = 5$ мм, а контактный радиус $a(t) = 2.2 \sin(\frac{\pi t}{L_t})$ задан, где $L_t = 5$ с - время нагружения. В этом случае проникновение $\delta(t)$ меняется между 0 и 1 мм (Рис. 4b). Зависимость контактных сил от времени представлена на Рис. 4a. Здесь проводится сравнение между контактными силами, полученными на основании аналитической формулы и с помощью МОМ для $n_\tau = 201$, $n_x = n_y = 81$, $L_t = 5$ с, $L_x = L_y = 20$ мм. Как видно из рисунка, расхождение результатов очень незначительное. Помимо этого, можно заметить асимметрию вязкоупругой кривой: в самом начале оба вязкоупругих решения (аналитическое и численное) близки к упругому решению с модулем Юнга E_0 , а в самом конце близки к упругому решению с модулем Юнга E_∞ .

На Рис. 5 представлен пример материала со следующими значениями параметров: $E_\infty = 0.9$ МПа, $E_0 = 9$ МПа, $\tau_c = 0.3$ с и $n_\tau = 601$, $n_x = n_y = 81$, $L_t = 5$ с, $L_x = L_y = 20$ мм. Оказывается, что свойства данного материала сильно зависят от времени: нормальная контактная сила под штампом обращается в ноль (Рис. 5a), несмотря на то, что проникновение при этом не равно нулю (Рис. 5b). Здесь также наблюдается сильная асимметрия кривой.

Пусть снова $E_\infty = 7.5$ МПа, $E_0 = 15$ МПа, $\tau_c = 1$ с, а проникновение $\delta(t) = \sin(\frac{\pi t}{L_t})$ задано (Рис. 6b). Зависимость контактной силы от времени представлена на Рис. 6a. В самом начале численное вязкоупругое решение стремится к упругому решению с модулем Юнга E_0 , а в самом конце стремится к упругому решению с модулем Юнга E_∞ . Причина пересечения вязкоупругого и упругого решений состоит в памяти вязкоупругого материала: контактная сила исчезает, несмотря на то, что проникновение еще не равно нулю. Упругое решение подчиняется закону Герца и обращается в ноль вместе с проникновением.

Распределение давления в центральном сечении $p(0, y, t)$ в

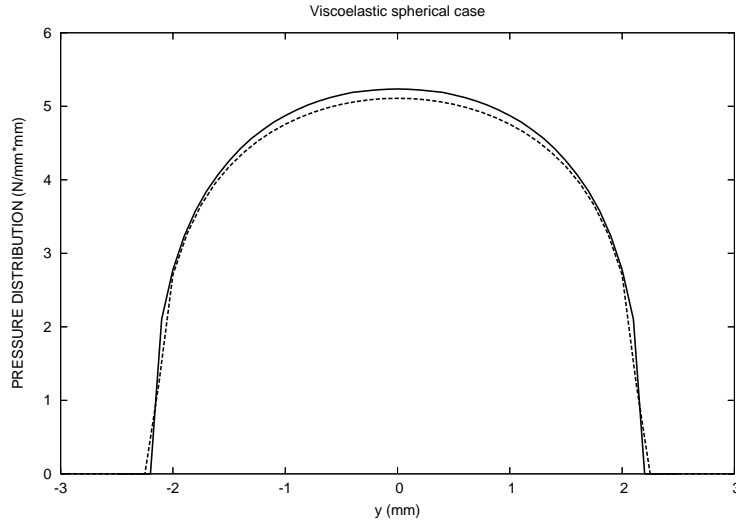


Рис. 7: Сферический штамп. Распределение давления в центральном сечении в момент времени $t = 2.5$ с в рамках вязкоупругих аналитической (—) и численной (-----) моделей

момент времени $t = 2.5$ с представлено на Рис. 7 для $n_\tau = 401$, $n_x = n_y = 101$, $L_t = 5$ с, $L_x = L_y = 10$ мм. Расхождение между аналитическим и численным решениями незначительное.

КОНИЧЕСКИЙ ШТАМП.

Результаты, полученные с помощью МОМ, сравнивались с аналитическими результатами для одиночного конического штампа (Рис. 3d) с углом полураствора θ , воздействующего на вязкоупругое полупространство таким образом, что контактный радиус монотонно возрастает. В этом случае решение контактной задачи теории упругости [10, 36] может быть записано в виде

$$F = \frac{4}{\pi} \operatorname{tg} \theta 2 \mu_e \delta^2. \quad (3.7)$$

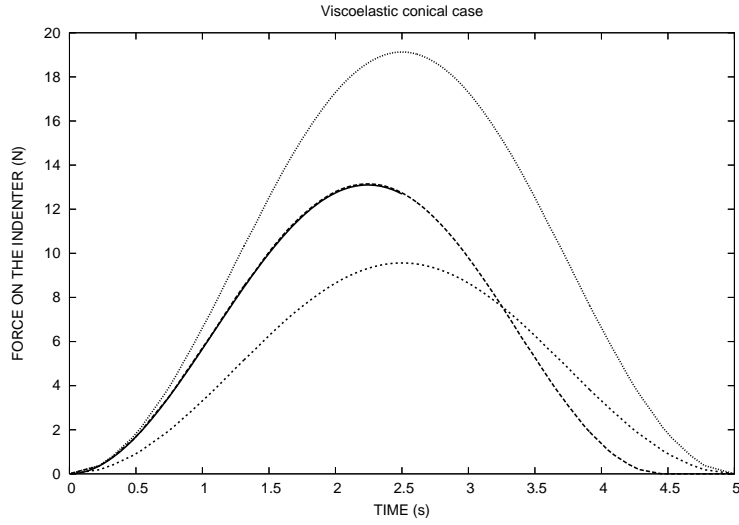


Рис. 8: Конический штамп. Зависимость контактной силы от времени при заданном проникновении в рамках вязкоупругих аналитической (—) и численной (-----) моделей, упругой модели с $E_\infty = 7.5$ МПа (.....) и с $E_0 = 15$ МПа (.....)

Следуя технике [4], в решении (3.7) необходимо заменить упругую константу на соответствующий интегральный оператор

$$F(t) = \frac{4}{\pi} t g \theta \int_0^t G(t - \tau) \frac{d\delta^2(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (3.8)$$

Зависимость контактных сил от времени представлена на Рис. 8. Здесь проводится сравнение между контактными силами, полученными на основании аналитической формулы (3.8) и с помощью МОМ для $n_\tau = 401$, $n_x = n_y = 201$, $L_t = 5$ с, $L_x = L_y = 20$ мм, $\theta = 45^\circ$. Как видно из рисунка, расхождение результатов очень незначительное. Здесь проникновение $\delta(t) = \sin(\frac{\pi t}{L_t})$ задано, и имеет место тот же эффект, что и для сферического

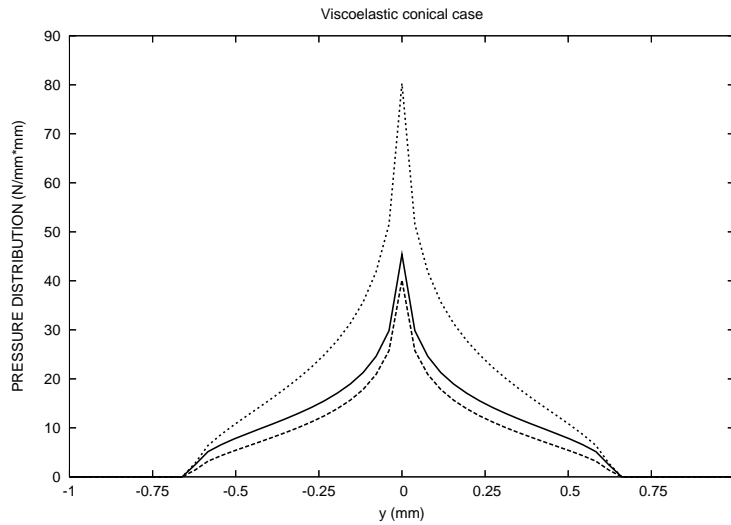


Рис. 9: Конический штамп. Распределение давления в центральном сечении в момент времени $t = 2.5$ с в рамках вязкоупругой модели (—), упругой с $E_\infty = 7.5$ МПа (-----) и с $E_0 = 15$ МПа (.....)

штампа: вначале оба вязкоупругих решения (аналитическое и численное) стремятся к упругому решению с модулем Юнга E_0 , а затем к упругому решению с модулем Юнга E_∞ .

Распределение давления в центральном сечении $p(0, y, t)$ в момент времени $t = 2.5$ с представлено на Рис. 9 для $n_\tau = 401$, $n_x = n_y = 181$, $L_t = 5$ с, $L_x = L_y = 7$ мм. Максимальное давление сосредоточено в центре зоны контакта, а его величина намного больше, чем для сферического штампа, но зона контакта на порядок меньше. Решения контактной задачи теории упругости, соответствующие модулям Юнга E_0 и E_∞ , также изображены на рисунке.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ШТАМП.

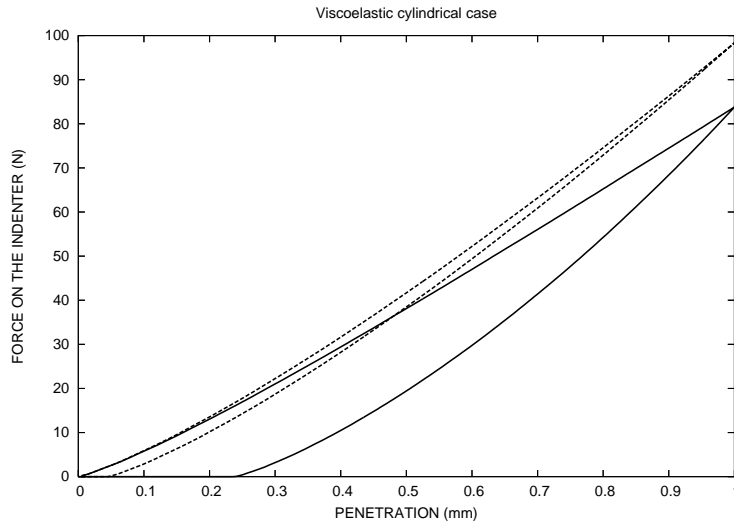


Рис. 10: Цилиндрический штамп, опирающийся на плоскость своей образующей. Зависимость контактной силы от проникновения для различных значений скоростей нагрузки: $V = 1$ мм/с (—) и $V = 10$ мм/с (-----)

Пусть цилиндрический штамп опирается на плоскость своей образующей (Рис. 3e), радиус основания цилиндра $R = 5$ мм, а длина образующей $b = 3$ мм.

На Рис. 10 представлена зависимость силы от проникновения $\delta(t)$ для различных значений скоростей нагрузки $V = 1, 10$ мм/с и для $n_\tau = 401$, $n_x = n_y = 81$, $L_t = \frac{2}{V}$ с, $L_x = L_y = 20$ мм. Пусть проникновение задается следующими формулами

$$\delta(t) = \begin{cases} Vt, & t < \frac{1}{V}, \\ -Vt + 2, & t > \frac{1}{V}. \end{cases}$$

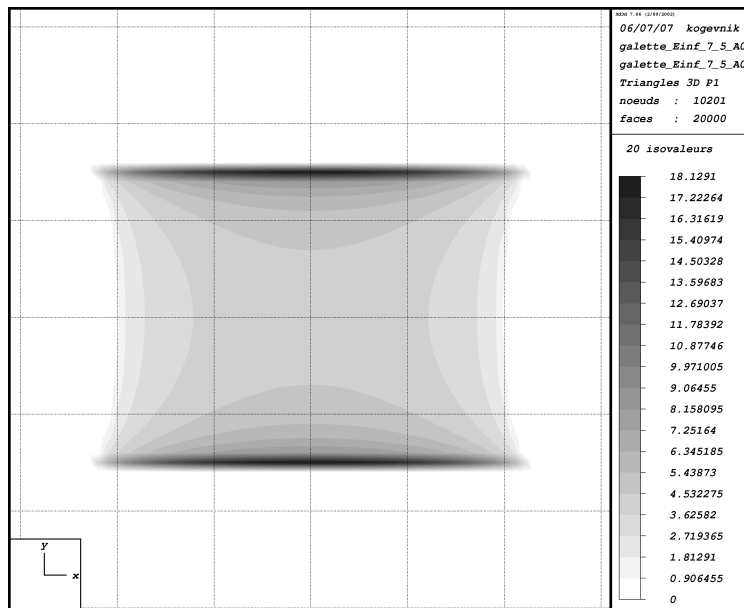
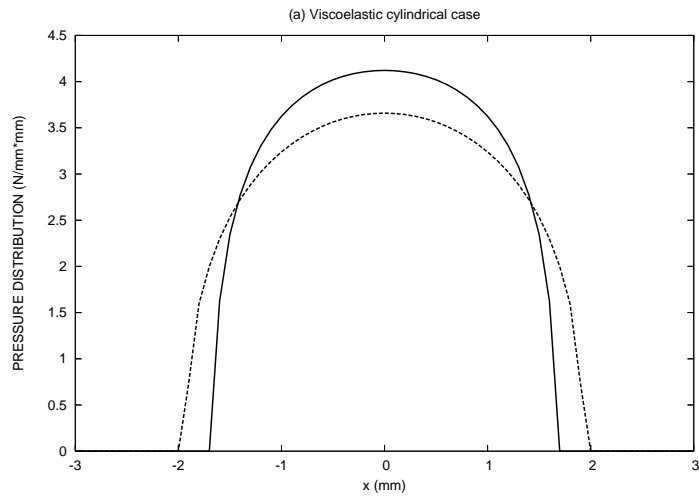


Рис. 11: Цилиндрический штамп, опирающийся на плоскость своей образующей. Распределение давления в момент времени $t = 2.5$ с

Расхождение между графиками, соответствующими $V = 1$ мм/с и $V = 10$ мм/с, значительное. Причина кроется в характеристическом времени материала τ_c равном 1 с. Для $V = 1$ мм/с время нагрузки $t = \frac{\delta}{V} = 1$ с $= \tau_c$. Для $V = 10$ мм/с, напротив, время нагрузки и характеристическое время материала различаются в десять раз. Здесь также можно наблюдать гистерезис кривой, свойственный вязкоупругому материалу и связанный с потерей энергии в процессе нагрузки-разгрузки. В случае упругого материала обе ветви сливаются, и нагрузка-разгрузка осуществляется по одной кривой.

Пусть теперь проникновение задано следующим образом

a)



b)

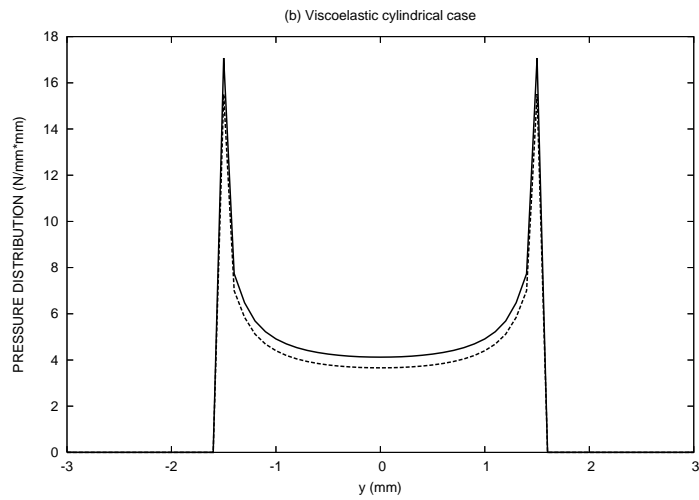


Рис. 12: Цилиндрический штамп, опирающийся на плоскость своей образующей. Распределения давлений в разрезах вдоль направляющей (a) в моменты времени $t_1 = 1.25$ с (—) и $t_2 = 3.05$ с (-----) и вдоль образующей (b) в моменты времени $t_1 = 1.25$ с (—) и $t_2 = 3.05$ с (-----)

$\delta(t) = \sin(\frac{\pi t}{L_t})$. Распределение давления при $t = 2.5$ с представлено на Рис. 11 для $n_\tau = 401$, $n_x = n_y = 101$, $L_t = 5$ с, $L_x = L_y = 10$ мм. Максимальное давление сосредоточено на двух границах зоны контакта (вертикальная ось y - ось симметрии цилиндра). Его величина выше, чем для сферического штампа, однако ниже, чем для конического. Расхождение между вязкоупругими решениями для $t = t_1 = 1.25$ с (участок нагрузки) и $t = t_2 = 3.05$ с (участок разгрузки) представлено на Рис. 12. Распределения давлений в разрезах вдоль направлений в разрезах вдоль направляющей $p(x, 0, t_1)$ и $p(x, 0, t_2)$ представлены на Рис. 12a, а распределения давлений в разрезах вдоль образующей $p(0, y, t_1)$ и $p(0, y, t_2)$, соответственно, на Рис. 12b. Здесь необходимо отметить, что, несмотря на то, что результирующие нормальные силы практически совпадают $F(t_1) \approx F(t_2)$, распределения давлений для $t = t_1$ и $t = t_2$ различны, то есть $p(x, y, t_1) \neq p(x, y, t_2)$.

СЕМЬ СФЕРИЧЕСКИХ ШТАМПОВ.

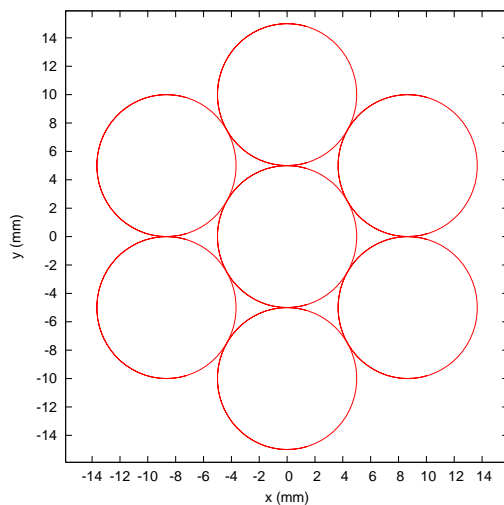


Рис. 13: Конфигурация, состоящая из семи штампов (вид сверху)

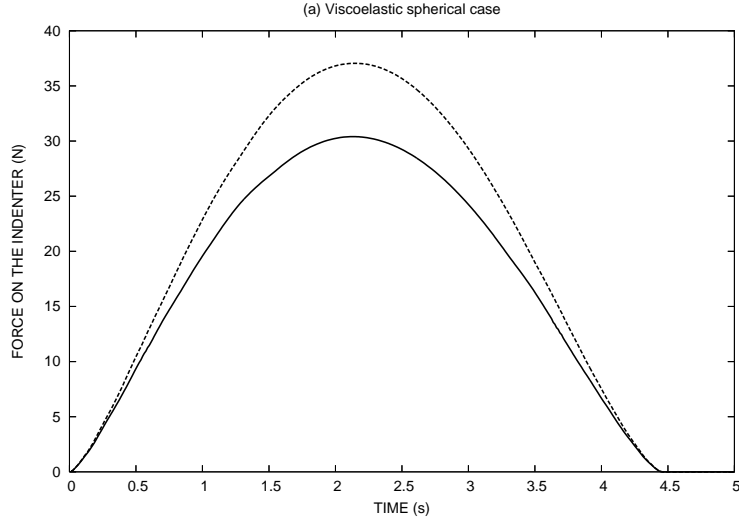


Рис. 14: Сферические штампы. Зависимость контактных сил от времени при заданном проникновении для центрального (—) и периферического (-----) штампов

Пусть конфигурация состоит из семи идентичных сферических штампов с радиусами $R = 5$ мм (Рис. 3а). На Рис. 13 изображен вид сверху указанной конфигурации для $L_x = L_y = 30$ мм. Центры штампов $A_i, i = \overline{1, 7}$ имеют следующие координаты

$$\begin{aligned} A_1 &= (0, 0), \quad A_2 = (0, 2R), \quad A_3 = (\sqrt{3}R, R), \quad A_4 = (\sqrt{3}R, -R), \\ A_5 &= (0, -2R), \quad A_6 = (-\sqrt{3}R, -R), \quad A_7 = (-\sqrt{3}R, R). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Сравнение контактных сил, как функций времени, полученных с использованием ДИМ (А2) для центрального и периферических штампов при $n_\tau = 401$, $n_x = n_y = 91$ и $\varepsilon = 0.1$ (значение параметра ε выбрано и не будет меняться) произведено на Рис. 14. Контактная сила для центрального штампа меньше контактной силы для периферического штампа. Причина этого явля-

ния состоит в том, что под действием периферических штампов центральная часть области контакта оказывается частично деформированной, в результате чего, центральный штамп не так сильно воздействует на поверхность полупространства.

Сравнение контактных сил, полученных с использованием ДИМ (A1 и A2), произведено на Рис. 15 для $n_\tau = 401$, $n_x = n_y = 91$. Оказывается, что разница между результатами невелика,

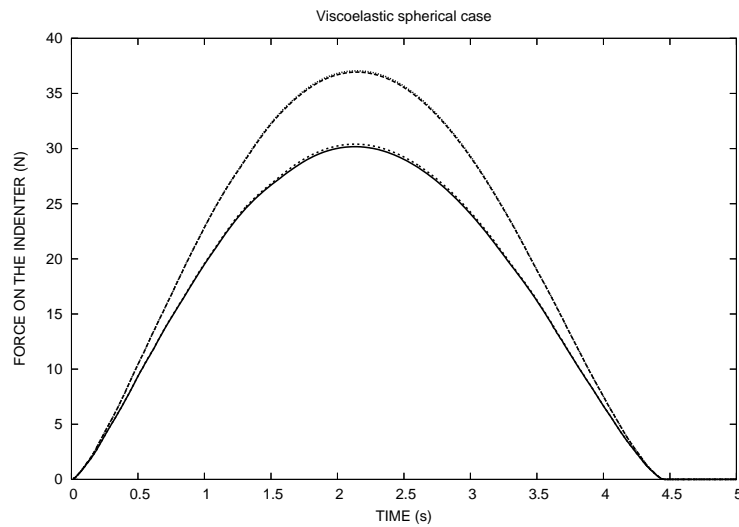


Рис. 15: Сферические штампы. Зависимость контактных сил от времени при заданном проникновении, подсчитанных с помощью алгоритмов A1 для центрального (—) и периферического (-----) штампов и A2 для центрального (.....) и периферического (- · - · - ·) штампов

однако алгоритм A2 примерно в пять раз быстрее, чем алгоритм A1.

Для упругого случая ДИМ сравнивался с результатами эксперимента для данной конфигурации в работе [37]. Расхождение

между численными и экспериментальными результатами составило менее 10 %.

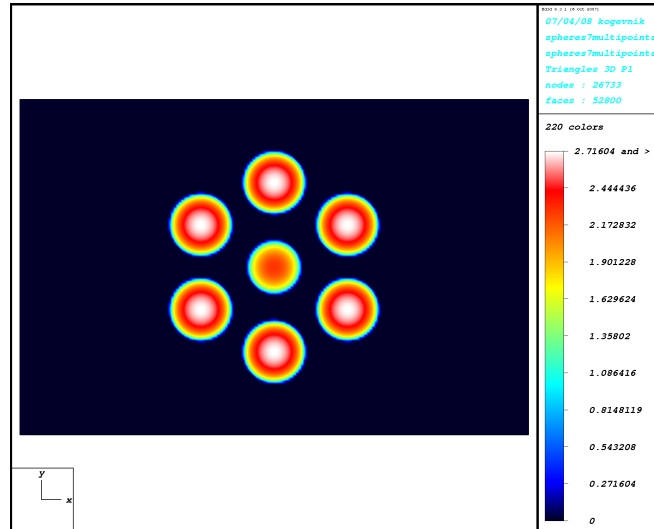
СЕМЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ШТАМПОВ СО СФЕРИЧЕСКИМИ ОКОНЧАНИЯМИ.

Пусть конфигурация состоит из семи идентичных цилиндрических штампов с радиусами оснований a со сферическими окончаниями радиусами $R = 10$ мм (Рис. 3b). Рассматривается два случая, соответствующие различным значениям радиуса основания цилиндра: $a = 2.5$ мм и $a = 3.5$ мм. Цилиндрические штампы со сферическими окончаниями используются для получения больших и близко друг к другу расположенных зон контакта. Для сферических штампов, когда радиус R велик, зоны контакта также велики, однако расположены далеко друг от друга. Координаты центров штампов задаются соотношениями (3.9) с заменой R на a . Таким образом, для конфигурации с $a = 2.5$ мм зоны контакта располагаются ближе друг к другу, чем для конфигурации с $a = 3.5$ мм.

Распределение давления $p(x, y, t)$ и распределение давления в разрезе $p(0, y, t)$, полученные с использованием ДИМ (A2) для $a = 2.5$ мм, $t = 1$ с, представлены на Рис. 16 для $n_\tau = 401$, $n_x = n_y = 201$. Влияние периферических штампов на центральный сильнее, чем для сферического случая, так как зоны контакта очень близки. Для данной конфигурации зоны контакта и величины максимальных давлений периферических штампов намного больше, чем для центрального.

Сравнение контактных сил, как функций времени, полученных с помощью ДИМ (A1 и A2), приведено на Рис. 17a для $a = 3.5$ мм и $n_\tau = 401$, $n_x = n_y = 61$. Расхождение между решениями невелико, однако больше, чем для сферического случая. На Рис. 17b приведено сравнение распределений давлений в разрезах, полученных с использованием ДИМ (A1 и A2), в момент времени $t = 1$ с для $n_\tau = 401$, $n_x = n_y = 121$. Разница также невелика, однако стоит заметить, что A1 лучше отслеживает

a)



b)

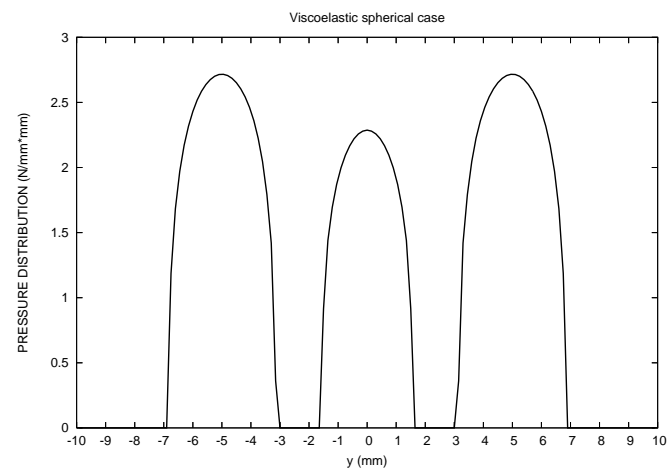
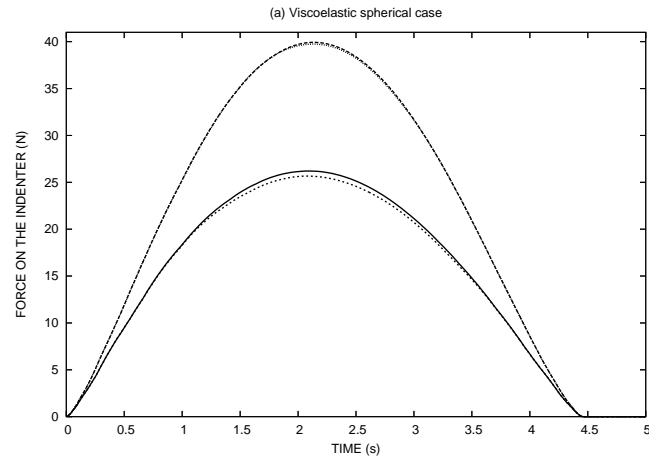


Рис. 16: Цилиндрические штампы со сферическими окончаниями. Распределение давления (a), полученное с помощью алгоритма A2, в момент времени $t = 1$ с и $a = 2.5$ мм и распределение давления в разрезе (b) вдоль вертикальной оси ($x = 0$ мм)

a)



b)

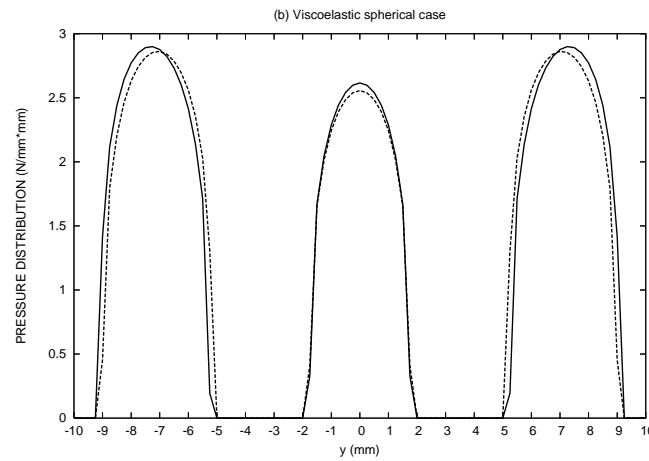


Рис. 17: Цилиндрические штампы со сферическими окончаниями. Зависимость контактных сил от времени (*a*) при заданном проникновении, подсчитанных с помощью алгоритмов A1 для центрального (—) и периферического (-----) штампов и A2 для центрального (.....) и периферического (.....) штампов и распределения давлений в разрезе (*b*) вдоль вертикальной оси ($x = 0$ мм) в момент времени $t = 1$ с при $a = 3.5$ мм, подсчитанные с помощью алгоритмов A1 (—) и A2 (-----)

влияние центрального штампа на периферические. Центральный штамп, в свою очередь, также деформирует полупространство под периферическими штампами, в результате чего точки максимального давления сдвигаются наружу и более не располагаются в центрах зон контакта.

Результирующая контактная сила, подсчитанная с помощью ДИМ, хорошо согласуется с контактной силой, подсчитанной с помощью МОМ, но для данной конфигурации ДИМ оказывается примерно в восемь раз быстрее, чем МОМ.

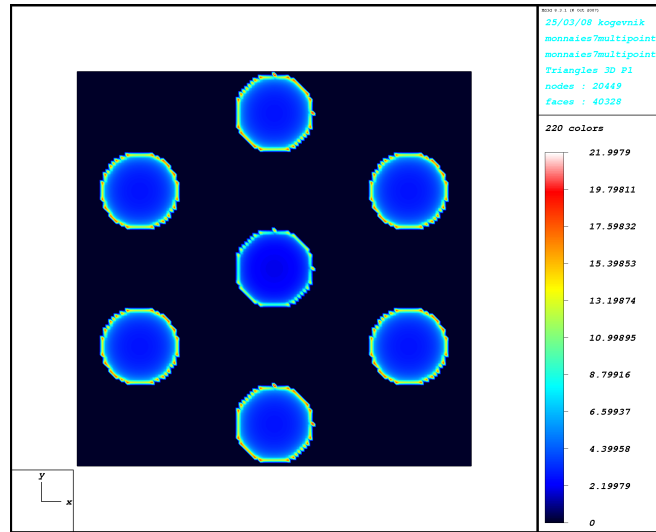
СЕМЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ШТАМПОВ.

Пусть конфигурация состоит из семи идентичных цилиндрических штампов (Рис. 3с) с радиусом основания $a = 1$ мм. Распределение давления $p(x, y, t)$ и распределение давления в разрезе вдоль диагонали $p(x, 0.56x, t)$ в момент времени $t = 1$ с представлены на Рис. 18 для $n_\tau = 401$, $n_x = n_y = 421$. Максимальное давление для каждой зоны контакта сосредоточено на границе. Влияние периферических штампов на центральный заключается в том, что давление центрального штампа меньше, а влияние центрального штампа на периферические заключается в том, что распределения давлений для периферических штампов несимметричны.

ДВЕНАДЦАТЬ ШТАМПОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ.

Пусть конфигурация включает в себя двенадцать штампов: три цилиндрических штампа с радиусом основания $a = 3$ мм со сферическими окончаниями радиусов $R = 5, 6, 10$ мм, три цилиндрических штампа с радиусами оснований $a = 1, 1, 1.5$ мм, три конических штампа с углом полураствора $\theta = \frac{\pi}{4}$ и три цилиндрических штампа, опирающихся на плоскость своими образующими, с радиусами оснований и образующими, соответственно, $R = 3$ мм и $b = 1$ мм, $R = 2$ мм и $b = 2$ мм, $R = 1$ мм и $b = 3$ мм. Эта конфигурация наиболее сложна и несимметрична. Распределение давления $p(x, y, t)$ и распреде-

a)



b)

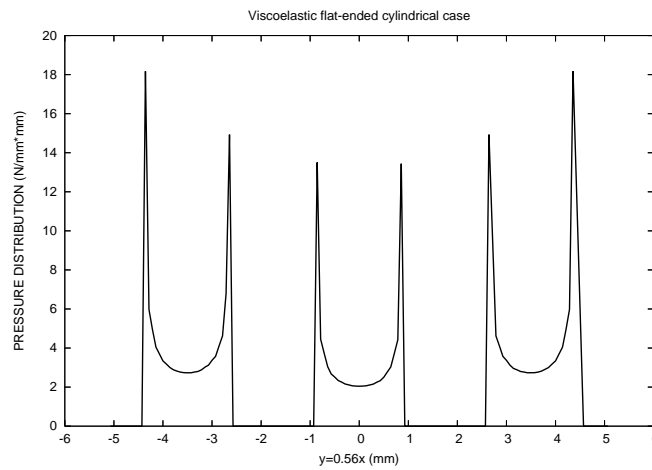
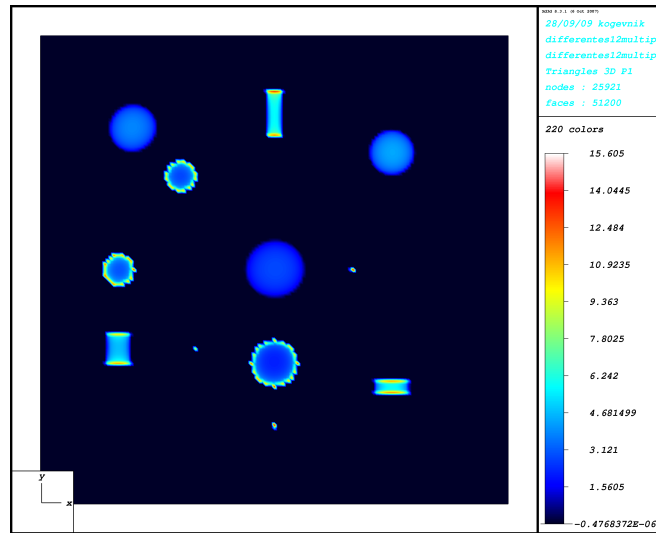


Рис. 18: Цилиндрические штампы. Распределение давления (a) в момент времени $t = 1$ с и распределение давления в разрезе (b) вдоль диагонали

a)



b)

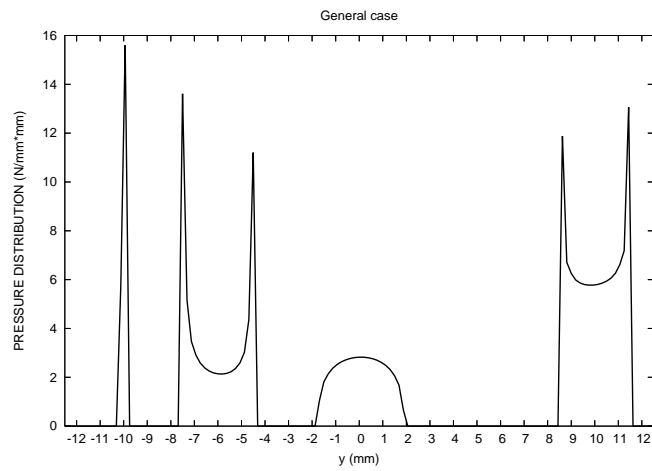


Рис. 19: Общий случай: три цилиндрических штампа со сферическими окончаниями, а также три цилиндрических, три конических и три цилиндрических штампа, опирающихся на плоскость своими образующими. Распределение давления (a) в момент времени $t = 1$ с и распределение давления в разрезе (b) вдоль вертикальной оси ($x = 0$ мм)

ление давления в разрезе $p(0, y, t)$, полученные с применением ДИМ (A1), в момент времени $t = 1$ с представлены на Рис. 19 для $n_\tau = 401$, $n_x = n_y = 161$. Как и раньше, максимальное давление для цилиндрических штампов сосредоточено на границах зон контакта, для цилиндрических штампов, опирающихся на плоскость своими образующими, - на границах, перпендикулярных оси симметрии цилиндра. Распределения давлений также несимметричны, а максимальные величины давлений для указанных штампов имеют один порядок. Максимальное давление для цилиндрических штампов со сферическими окончаниями меньше, чем для всех других видов штампов. Самое большое давление и самые маленькие зоны контакта получаются для конических штампов.

Данная конфигурация является попыткой промоделировать вязкоупругий контакт между шиной и микронеровностями дороги произвольной формы. Описанный в статье ДИМ может быть использован для решения контактных задач с большим количеством неровностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Разработка математических моделей и комплекса программ для прогнозирования свойств наноструктурированных материалов с учетом масштабных эффектов» (контракт 14.740.11.0995).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boussinesq J.* Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Gauthier-Villars. Paris. 1885. 721 p.
2. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper // J. Reine und Angewandte Mathematik. 1881. V.92. P. 156-171.

3. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte // Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes. Berlin. 1882. P. 174-196.
4. *Radok J.R.M.* Viscoelastic stress analysis // Q. App. Math. 1957. V.15. P.198-202.
5. *Ting T.C.T.* The contact stresses between a rigid indenter and a viscoelastic half-space // Trans. ASME. Series E. Journal of Applied Mechanics. 1966. V.33. P.845-854.
6. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат. 1953. 264 с.
7. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука. 1980. 304 с.
8. *Галин Л.А., Шматкова А.А.* О движении жесткого штампа по границе вязкоупругой полуплоскости // ПММ. 1968. Т.32. Вып.3. С.445-450.
9. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука. 2001. 478 с.
10. *Вильке В.Г.* О негерцевом контакте колеса и рельса // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ им. А.А. Дородницына РАН. 2007. С. 137-157.
11. *Greenwood J.A., Williamson J.B.P.* Contact of nominally flat surfaces // In: Proceedings of the Royal Society of London. 1966. V.A295. P.300-319.
12. *McCool J.* Comparison of Models for the Contact of Rough Surfaces // Wear. 1986. V.107. P.37-60.

13. *Carbone G., Bottiglione F.* Asperity contact theories: Do they predict linearity between contact area and load? // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2008. V.56. P.2555-2572.
14. *Kucharski S., Klimczak T., Polijaniuk A., Kaczmarek J.* Finite-elements model for the contact of rough surfaces // Wear. 1994. V.177. P.1-13.
15. *Adams G.G., Nosonovsky M.* Contact modeling - forces // Tribology International. 2000. V.33. P.431-442.
16. *Cesbron J., Anfosso-Lédée F., Duhamel D., Yin H.P., Le Houédec D.* Experimental study of tyre/road contact forces in rolling conditions for noise prediction // Journal of Sound and Vibration. 2009. V.320. P.125-144.
17. *Kragelsky I.V., Demkin N.B.* Contact area of rough surfaces // Wear. 1960. V.3. P.170-187.
18. *O'Callaghan M., Cameron M.A.* Static contact under load between nominally flat surfaces in which deformation is purely elastic // Wear. 1976. V.36. P.79-97.
19. *Bush A.W., Gibson R.D., Thomas T.R.* The elastic contact of a rough surface // Wear. 1975. V.35. P.87-111.
20. *Singh K.P., Paul B.* Numerical Solution of Non-Hertzian Elastic Contact Problems // ASME Journal of Applied Mechanics. 1974. V.96. P.484-490.
21. *Webster M.N., Sayles R.S.* A Numerical Model for the Elastic Frictionless Contact of Real Rough Surfaces // ASME Journal of Tribology. 1986. V.108. P.314-320.
22. *Ju Y., Zheng L.* A full numerical solution for the elastic contact of three-dimensional real rough surfaces // Wear. 1992. V.157. P.151-161.

23. *Chang L., Gao Y.* A Simple Numerical Method for Contact Analysis of Rough Surfaces // ASME Journal of Tribology. 1999. V.121. P.425-432.
24. *Nayak L., Johnson K.L.* Pressure between elastic bodies having a slender area of contact and arbitrary profiles // International Journal of Mechanical Sciences. 1979. V.21. P.237-247.
25. *Nowell D., Hills D.A.* Hertzian contact of ground surfaces // ASME Journal of Tribology. 1989. V.111. P.175-179.
26. *Ciavarella M., Hills D.A., Moobola R.* Analysis of plane and rough contact, subject to a shearing force // International Journal of Mechanical Sciences. 1999. V.41. P.107-120.
27. *Karpenko Yu.A., Akay A.* A numerical model of friction between rough surfaces // Tribology International. 2001. V.34. P.531-545.
28. *Liu Z., Neville A., Reuben R.L.* A Numerical Calculation of the Contact Area and Pressure of Real Surfaces in Sliding Wear // Journal of Tribology. 2001. V.123. P.27-35.
29. *Stanley H.M., Kato T.* An FFT-Based Method for Rough Surface Contact // ASME Journal of Tribology. 1997. V.119. P.481-485.
30. *Kalker J.J.* Two algorithms for the contact problem in elastostatics // Delft University of Technology. Report of the Department of Mathematics and Informatics. 82-26. 1982.
31. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. Cambridge University Press. 1985. 466 p.
32. *Cesbron J., Anfosso-Lédée F., Yin H.P., Duhamel D., Le Houédec D.* Influence of road texture on tyre/road contact in

- static conditions. Numerical and experimental comparison // International Journal of Road Materials and Pavement Design. 2008. V.9. N.4. P.689-710.
33. *Love A.E.H.* Stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary // In: Phil. Trans. Royal Society. 1929. V.A228. P.37-43.
34. *Graham G.A.C.* The contact problem in the linear theory of viscoelasticity // International Journal of Engineering Science. 1965. V.3. P.27-46.
35. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. Second edition. New York: Academic Press. 1982. 384 p.
36. *Love A.E.H.* Boussinesq's problem for a rigid cone // Quarterly Journal of Mathematics (Oxford series). 1939. V.10. P.161-175.
37. *Cesbron J., Yin H.P., Anfosso-Lédée F., Duhamel D., Le Houédec D., Feng Z.-Q.* Numerical and experimental study of multi-contact on an elastic half-space // International Journal of Mechanical Sciences. 2009. V.51. P.33-40.