УДК 519.85

Многокритериальный синтез потоковых сетей с гарантией живучести [1]

© 2000 г. **Ю.Е.Малашенко, Н.М.Новикова, И.И.Поспелова**
Москва, ВЦ РАН
Поступила в редакцию 04.04.2000 г.

Поставлена задача синтеза (модернизации, развития) многопользовательских сетевых систем в условиях возможности неслучайных внешних воздействий, уменьшающих пропускную способность ребер физического графа сети. Предложена формулировка соответствующей задачи о допустимости многопродуктовых потоковых сетей для известного вектора требований. Исследована параметрическая постановка, учитывающая неинформированность (неполную или неточную информированность) о векторе требований. Для случая неизвестных требований задача синтеза представлена как многокритериальная максиминимаксная с вектором величин потоков продуктов (мультипотоком) в качестве максимизируемого критерия. Проведена формализация решения задачи и рассмотрены методы поиска решения.

Введение. Настоящая статья является дальнейшим развитием [1], посвященной применению общей методологии исследования операций [2] для анализа живучести многопродуктовых потоковых сетей (МП-сетей). Мы будем пользоваться следующей моделью МП-сети [3, 4].

Известно множество $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ вершин сети — пунктов входа/выхода (подключения к сети) и транзитных узлов. На этом множестве задано два графа: логический, или граф тяготений, ребра которого $p_1, \ldots, p_m$ связывают попарно пункты входа/выхода, указывая информационные направления (направления связи), и физический, или граф сети $G = \langle V, E\rangle$, ребра которого $e_1, \ldots, e_K$ соответствуют реально существующим линиям связи. Логические ребра $p_i = (v_{s_i}, v_{t_i})$, $i \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$, называются также тяготеющими парами или видами продуктов. Каждому физическому ребру e_k формально сопоставляется пара противоположно направленных дуг g_k и g_{K+k}. При этом для любой вершины $v \in V$ определены множества $T(v)$ и $S(v)$ индексов входящих и выходящих дуг. Описанная структура сети задает ограничения на структуру передаваемых по сети потоков.

Обозначим через $f = \{f_{ij}\}$ матрицу распределения потоков по дугам МП-сети, здесь $f_{ij} \geq 0$ — поток i-го вида продукта (тяготеющей

[1] Работа поддержана грантами N.98-01-00233 РФФИ, N.00-15-96141 “Научные школы” и INTAS 97 – 1050.

пары p_i) по дуге g_j. Считается, что в транзитных для p_i узлах сети не происходит потери потока, т.е. выполнены условия сохранения, или неразрывности

$$\sum_{j\in S(v)} f_{ij} = \sum_{j\in T(v)} f_{ij} \ \ \forall v \neq v_{s_i}, v_{t_i}, \quad \sum_{j\in S(v_{s_i})} f_{ij} = \sum_{j\in T(v_{t_i})} f_{ij} \ \ \forall i \in M. \quad (0.1)$$

Введем $z_i(f) = \sum_{j\in S(v_{s_i})} f_{ij} = \sum_{j\in T(v_{t_i})} f_{ij}$ — количество потока i-го вида продукта, пропускаемое по сети в соответствии с распределением потоков f. Вектор $z(f) = (z_1(f), \dots, z_m(f))$ называется мультипотоком и характеризует эффективность функционирования сети, т.е. качество обслуживания пользователей сетевой системы (группы пользователей моделируются тяготеющими парами). Так что задачу об эффективном распределении потоков в сети можно поставить как многокритериальную с вектором критериев $z(f)$ — мультипотоком. Ограничения задаются с помощью (0.1) и условия

$$\sum_{i=1}^{m} (f_{ik} + f_{i(k+K)}) \leq y_k \ \ \forall e_k \in E, \quad (0.2)$$

учитывающего пропускную способность ребер e_k графа G.

Обозначим через $Z(y)$ множество достижимых мультипотоков для сети с вектором y пропускной способности физических ребер, т.е. множество всех $z(f)$, таких что f удовлетворяет (0.1), (0.2). Получим задачу векторной максимизации

$$\operatorname*{Max}_{z\in Z(y)} z = \operatorname{Max} Z(y). \quad (0.3)$$

Значением векторного максимума (0.3) является множество Парето или Слейтера (см. в [2, 5]) векторов, недоминируемых в смысле отношения $\geq$ или $>$. (Знаки неравенств для векторов понимаются покомпонентно.) В частности, для слейтеровского значения

$$\operatorname{Max} Z(y) = \{z \in Z(y) |\ \forall z' \in Z(y) \ \ \exists i \in M\colon \ z'_i \leq z_i\}.$$

Существуют и другие множества, предлагаемые в качестве значения (0.3), например, в [5], но мы на них останавливаться не будем.

Задача (0.3) была исследована в [6], где предложены методы ее решения с помощью параметрического анализа. Укажем, что множественность значения (0.3) обусловлена субъективной неопределенностью, выразившейся в наличии вектора критериев. Содержательно это означает невозможность для исследователя сети предпочесть одну тяготеющую пару другой (или ранжировать пользователей) в силу неизвестных заранее относительных величин их потоковых требований — входных потоков. Так что от исследователя ждут описания всех недоминируемых вариантов, а окончательный выбор будет сделан лицом, принимающим решение (ЛПР).

В [1] рассмотрена задача типа (0.3) с неизвестной (неточно или неполностью известной) пропускной способностью ребер физического графа МП-сети. Таким образом, кроме субъективной неопределенности, авторы учли еще и неопределенность объективную — разрушающие (поражающие) воздействия на сеть, далее, "удары", имеющие неслучайный характер, например, являющиеся результатом глобальных изменений, катаклизмов или целенаправленного поведения. При этом допускалось, что потери пропускной способности могут быть довольно большими и трудно восполнимыми, и исследовалась постановка, разрешающая апостериорное перераспределение потоков в сети. А именно считалось, что оставшаяся после удара пропускная способность станет затем известной и возможно оптимизировать распределение потоков в соответствии с (0.3). (Множество тяготеющих пар предполагается для простоты не подверженным воздействию — не изменяющимся.) Полученная задача, названная задачей анализа уязвимости, имеет вид

$$\operatorname*{Min}_{y \in Y_\gamma(c)} \operatorname*{Max}_{z \in Z(y)} z, \quad \gamma \in [0,1], \tag{0.4}$$

где $Y_\gamma(c) \overset{\text{def}}{=} \{0 \le y \le c | \sum\limits_{k=1}^{K} y_k = (1-\gamma) \sum\limits_{k=1}^{K} c_k\}$ — множество возможных вариантов для вектора пропускной способности y в зависимости от исходного вектора пропускной способности c, а γ — параметр, характеризующий мощность удара. Смысл введения параметра γ состоит в следующем.

Согласно общей методологии исследования операций [2] в условиях неполной информированности надо ориентироваться на гибко понимаемый принцип гарантированности результата, т.е. учитывать всю доступную и ожидаемую информацию (по мере ее поступления) и рассчитывать на худший случай в рамках имеющейся неопределенности. По 1-му правилу в постановке (0.4) отражена возможность перераспределения потоков. Однако рамки неопределенности вектора пропускной способности для рассматриваемого класса задач слишком широки, чтобы приводить к содержательным оценкам по 2-му правилу. С целью сузить эти рамки принцип гарантированности результата совмещается с параметрическим анализом. А именно, все возможные воздействия параметризованы по "силе" (или "мощности") удара, точнее, по сумме потерь пропускной способности ребер МП-сети. Конкретная локализация удара (ребра, подвергшиеся поражающему воздействию) и распределение данной мощности удара по ребрам сети по-прежнему считаются неизвестными. Таким образом, гарантированное оценивание функциональных возможностей МП-сети предполагает поиск наихудшего для пользователей распределения удара. Решение параметрического семейства подобных задач поиска и понимается в работе [1] под словами "анализ уязвимости МП-сети". Р.

В настоящей статье рассматривается задача выбора исходного вектора c пропускной способности с целью понижения уязвимости сетевой системы, вернее, повышения ее живучести. Мы запишем эту постановку в форме: $\forall\gamma \in [0,1]$ найти

$$\operatorname*{Max}_{c\in C}\ \operatorname*{Min}_{y\in Y_\gamma(c)}\ \operatorname*{Max}_{z\in Z(y)} z, \tag{0.5}$$

а способы определить значение (0.5) так, чтобы получались неулучшаемые гарантированные оценки живучести, будут предложены далее. Здесь же добавим несколько слов относительно выбора критерия.

Мы не исследуем проблему скорейшего или более дешевого восстановления сети после удара, не интересуемся стоимостными показателями синтеза сети — они заложены в множество ограничений C; также в ограничениях (по пропускной способности) считаем учтенной стоимость передачи потоков. Качество функционирования сети оценивается лишь с позиций обеспечения потоковых требований пользователей — тяготеющих пар. При этом возможны два типа векторных критериев: соответствующих известным (нормативным) и неизвестным требованиям. В данной работе развивается ненормативный подход, т.е. вектором критериев согласно [6] является мультипоток, но в отличие от [6] ставится задача не на максимум, а на максиминимакс мультипотока. В разд. 2 будет показано, что поставленная задача сводится к параметрическому семейству однокритериальных задач повышения гарантированной живучести МП-сети с известными требованиями, где вектор требований и служит параметром.

1. Формализация решения. Фиксируем произвольное значение $\gamma < 1$. Получим задачу на многокритериальный максиминимакс. Значение векторного максиминимакса до недавнего времени не определялось (см. [7]). Скалярные задачи поиска максиминимакса изучались, в частности, в [8]. Возможно несколько подходов к заданию множества (0.5): прямое продолжение по аналогии определений векторного максимума и минимакса на максиминимакс, расширение этих определений на случай точечно-множественных отображений для получения $\mathrm{Max}\{\mathrm{Min}\,\mathrm{Max}\}$ и $\mathrm{Max}\,\mathrm{Min}\{\mathrm{Max}\}$, обобщение процедуры сведения скалярных максиминных задач к поиску максимума, предложенной в [9]. Соответствующий математический аппарат разработан в [10], мы изложим его применительно к рассматриваемой задаче чуть ниже. А начнем с использования принципа наилучшего гарантированного результата для данной постановки.

Сперва предположим, что реализовался некоторый вектор $y \in Y_\gamma(c)$. Тогда любой мультипоток $z \in Z(y)$ достижим. Однако заранее не известно, какой именно вектор y будет реализован (выбран противником). Поэтому реально говорить о гарантированной достижимости лишь для мультипотоков из пересечения множеств $Z(y)$ по всем возможным $y \in Y_\gamma(c)$. Здесь множество альтернатив для y зависит от изначально установленной пропускной способности — вектора c. Но поскольку выбор c является управлением оперирующей стороны, получим в качестве множества гарантированно достижимых мультипотоков

$$\Psi_\gamma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{c \in C} \bigcap_{y \in Y_\gamma(c)} Z(y) \tag{1.1}$$

и придем к задаче поиска $\mathrm{Max}\,\Psi_\gamma$ для определения наилучшей гарантированной оценки живучести (при заданном γ). Отметим, что оценка дается множеством в силу наличия векторного критерия эффективности МП-сети.

Множество $\mathrm{Max}\,\Psi_\gamma$ предложено в качестве значения векторного максиминимакса (0.5) в [7, 10] (как частный случай определения для произвольной постановки задачи на максиминимакс неотрицательного вектора критериев). Указанное определение также может быть получено путем простого слияния определений векторного максимина [5] и минимакса [11]:

$$\operatorname*{Max}_{c \in C} \operatorname*{Min}_{y \in Y(c)} \Phi(c, y) = \mathrm{Max} \bigcup_{c \in C} \bigcap_{y \in Y(c)} \{\psi \geq 0 |\ \psi \leq \Phi(c, y)\}$$

$$\text{и} \quad \operatorname*{Min}_{y \in Y(c)} \operatorname*{Max}_{z \in Z(y)} z = \mathrm{Max} \bigcap_{y \in Y(c)} \bigcup_{z \in Z(y)} z = \mathrm{Max} \bigcap_{y \in Y(c)} Z(y).$$

Кроме того при определенных условиях регулярности (см. в разд. 2) для слейтеровских значений справедливо, согласно [7], равенство

$$\mathrm{Max}\,\Psi_\gamma = \mathrm{Max} \bigcup_{c \in C} \mathrm{Min} \bigcup_{y \in Y_\gamma(c)} \mathrm{Max}\, Z(y)$$

для обобщения на максиминимакс определения векторного минимакса из [12, 13]. В нерегулярном случае последнее множество дает "паразитические" точки, поэтому в [10] оно исправлено на

$$\mathbb{R}^m_+ \bigcap \operatorname{Max} \bigcup_{c\in C} \operatorname{Min} \bigcup_{y\in Y_\gamma(c)} \operatorname{Max} \bigcup_{z\in Z(y)} \{\psi \le z\} \tag{1.2}$$

и доказано равенство слейтеровских значений $\operatorname{Max}\Psi_\gamma$ и (1.2). Паретовское значение (0.5) предложено определять как множество максимальных (в смысле $\le$) слейтеровских значений, т.е. опять-таки как $\operatorname{Max}\Psi_\gamma$. К тому же определению значения (0.5) придем, используя формализм оптимизации точечно-множественных отображений, причем, независимо от расстановки скобок,

$$\operatorname{Max}\Psi_\gamma = \operatorname*{Max}_{c\in C}\{\operatorname*{Min}_{y\in Y_\gamma(c)} \operatorname{Max} Z(y)\} = \operatorname*{Max}_{c\in C} \operatorname*{Min}_{y\in Y_\gamma(c)} \{\operatorname{Max} Z(y)\}.$$

Скалярную задачу отыскания максимина $\max\limits_{c\in C} \min\limits_{y\in Y(c)} \phi(c,y)$ можно записать, согласно [9], как задачу математического программирования с бесконечным числом ограничений

$$\max_{c\in C,\ b\in B(c)} b,$$

где $B(c) = \{b \in \mathbb{R}^1 |\ b \le \phi(c,y) \quad \forall y \in Y(c)\}$, b — вспомогательная переменная. Задачу на векторный максимин $\operatorname*{Max}\limits_{c\in C} \operatorname*{Min}\limits_{y\in Y(c)} \Phi(c,y)$ можно формально переписать аналогичным образом, как

$$\operatorname*{Max}_{c\in C,\ b\in B(c)} b,$$

где $b = (b_1, \ldots, b_m)$, $B(c) = \{b \in \mathbb{R}^m |\ b \le \Phi(c,y) \ \ \forall y \in Y(c)\}$. Заметим, что

$$B(c) = \bigcap_{y\in Y(c)} \{b |\ b \le \Phi(c,y)\},$$

и подставляя $\operatorname{Max} Z(y)$ вместо $\Phi(c,y)$, получаем

$$\operatorname*{Max}_{c\in C,\ b\in B(c)} b = \operatorname{Max}\{b\in\mathbb{R}^m |\ b \in \bigcup_{c\in C} B(c)\} = \operatorname{Max} \bigcup_{c\in C} B(c) =$$

$$= \operatorname{Max} \bigcup_{c\in C} \bigcap_{y\in Y(c)} \{b |\ b \le \operatorname{Max} Z(y)\} = \operatorname{Max} \bigcup_{c\in C} \bigcap_{y\in Y(c)} \bigcup_{z\in Z(y)} \{b |\ b \le z\}$$

для $Y(c) = Y_\gamma(c)$. А поскольку отрицательные значения в нашей задаче интереса не представляют, то в слейтеровском случае естественно рассматривать пересечение полученного множества с $\mathbb{R}^m_+$, — пришли к уже не раз выведенному $\operatorname{Max}\Psi_\gamma$.

Таким образом, определение значения оптимума мультипотока в поставленной задаче, построенное с позиций принципа наилучшего гарантированного результата, согласуется с формальными определениями векторного максиминимакса. И для описания множества (0.5) мы получили задачу поиска максимальных элементов множества (1.1), понимая максимум по Парето или по Слейтеру в зависимости от его исходной трактовки. Известно большое число методов многокритериальной максимизиции (см. например в [5, 14, 15]), однако в условиях неопределенности множество (1.1) не задано явно, и это затрудняет их использование. В результате требуется разработка прямых методов решения задачи (0.5), чему и будут посвящены следующие разделы.

2. Параметризация решения. Значение (0.5) является множеством, как правило, бесконечным даже при фиксированном γ. Для получения решения задачи (0.5), надо задать его параметризацию, причем желательно, чтобы она позволяла строить угловые точки оптимума (хотя бы слейтеровские). Соответствующая параметризация предлагается ниже.

Традиционно для описания множеств Парето и Слейтера используется метод сверток [2, 5]. Сразу заметим, что множество Ψ_γ оказывается, вообще говоря, невыпуклым (является объединением многогранников), поэтому применение линейной свертки частных критериев для параметризации и аппроксимации $\operatorname{Max}\Psi_\gamma$ не оправдано. Далее рассмотрим *обратную логическую* свертку (ОЛС), предложенную в [16, 17] на базе логической свертки из [2].

Обратная логическая свертка предполагает замену вектора z параметрическим семейством скалярных критериев

$$\min_{i\in I(\lambda)} \lambda_i^{-1} z_i, \quad \lambda \in \Lambda, \tag{2.1}$$

где $I(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in M | \lambda_i \neq 0\}$, $\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \geq 0 | \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$ — стандартный симплекс в $\mathbb{R}^m$.

Свертка (2.1) для задач на векторный максимум подробно изучена в [16, 17], для задач на векторный минимакс она исследована в [11], а в [18] предложено определять с ее помощью значение векторного максиминимакса.

На основе свертки (2.1) сведем многокритериальную задачу (0.5) к параметрическому семейству скалярных задач поиска

$$\theta_\gamma[\lambda] \stackrel{\text{def}}{=} \max_{c\in C} \min_{y\in Y_\gamma(c)} \max_{z\in Z(y)} \min_{i\in I(\lambda)} \lambda_i^{-1} z_i \quad \forall \lambda \in \Lambda. \tag{2.2}$$

Отметим, что в сделанных предположениях все минимумы и максимумы в (2.2) достигаются и являются непрерывными функциями тех векторов z, c и y, от которых зависят (см. [8] с учетом непрерывности внутреннего максимума, доказанной в [6, 19]).

Обозначим

$$\Psi^0 \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{c\in C} \bigcap_{y\in Y_\gamma(c)} \bigcup_{z\in Z(y)} \{\psi > 0 |\ \psi \le z\},$$

и пусть для замыкания Ψ^0 в $\mathbb{R}^m$ справедливо

$$\overline{\Psi^0} = \Psi_\gamma. \tag{2.3}$$

Можно показать, что при выполнении условия (2.3) (обобщающего условия регулярности из [16, 11, 7]) для слейтеровского значения (0.5) имеет место представление

$$\operatorname{Max}\Psi_\gamma = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \theta_\gamma[\lambda]\lambda. \tag{2.4}$$

В отсутствие регулярности не исключено, что $\operatorname{Max}\Psi_\gamma$ по Слейтеру совпадет со всем Ψ_γ, т.е. не поможет выделить оптимальное подмножество недоминируемых стратегий. При этом формула (2.4) даст более узкое, чем $\operatorname{Max}\Psi_\gamma$ по Слейтеру, множество, не приводя к потере паретовских значений (см. в [18]). Таким образом формула (2.4) позволяет уточнить определение значения (0.5). А именно будем считать, что если исходно речь шла о слейтеровском множестве оптимальных мультипотоков, то

$$\operatorname*{Max}_{c\in C} \operatorname*{Min}_{y\in Y_\gamma(c)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(y)} z = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \lambda \max_{c\in C} \min_{y\in Y_\gamma(c)} \max_{z\in Z(y)} \min_{i\in I(\lambda)} \frac{z_i}{\lambda_i} \setminus \{0\}, \tag{2.5}$$

в паретовском случае следует взять максимум по Парето от правой части (2.5).

Параметризация с помощью ОЛС также дает возможность описать множества реализаций максимумов и минимума в (0.5). В отличие от скалярных задач в силу неединственности значения векторного оптимума возникает множественность и оптимальных стратегий, и наихудших вариантов для неопределенных факторов (стратегий противника). В качестве соответствующих множеств реализаций предлагаются такие $C_\gamma^* \subseteq C$, $Y_\gamma^*(c) \subseteq Y_\gamma(c)$, $Z^*(y) \subseteq Z(y)$, для которых выполнено

$$\operatorname*{Max}_{c\in C_\gamma^*} \operatorname*{Min}_{y\in Y_\gamma(c)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(y)} z = \operatorname*{Max}_{c\in C} \operatorname*{Min}_{y\in Y_\gamma(c)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(y)} z,$$

$$\operatorname*{Min}_{y\in Y_\gamma^*(c)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(y)} z = \operatorname*{Min}_{y\in Y_\gamma(c)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(y)} z, \quad \operatorname*{Max}_{z\in Z^*(y)} z = \operatorname*{Max}_{z\in Z(y)} z,$$

причем желательно, чтобы они были минимальными по включению. Последнему требованию не всегда удается удовлетворить, однако ниже (см. утв. 1) будут указаны условия, когда ОЛС приводит к несокращаемым множествам реализаций.

Из результатов [6, 1, 7] заключаем, что искомые множества представимы в виде

$$Z^*(y) = Z^0(y) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{z^0(y,\lambda) \in \arg\max_{z\in Z(y)} \{\min_{i\in I(\lambda)} \lambda_i^{-1} z_i\} \mid \lambda \in \Lambda\Big\}, \qquad (2.6)$$

$$Y_\gamma^*(c) = Y_\gamma^0(c) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{y^0(c,\lambda,\gamma) \in \arg\min_{y\in Y_\gamma(c)} \{\max_{z\in Z(y)} \min_{i\in I(\lambda)} \lambda_i^{-1} z_i\} \mid \lambda \in \Lambda\Big\},$$

$$C_\gamma^* = C_\gamma^0 \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{c^0(\lambda,\gamma) \in \arg\max_{c\in C} \{\min_{y\in Y_\gamma(c)} \max_{z\in Z(y)} \min_{i\in I(\lambda)} \lambda_i^{-1} z_i\} \mid \lambda \in \Lambda\Big\}.$$

Заметим, что для формирования этих множеств не нужны все реализации оптимумов ОЛС, а достаточно по одной для каждого значения параметра свертки λ.

Минимальность по включению $Z^0(y), Y_\gamma^0(c)$ в условиях регулярности и общего положения доказана в [1] (утв. 5). Приведем аналогичный результат для C^0. Обозначим

$$D_\gamma(c) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{y\in Y_\gamma(c)} Z(y)$$

— множество мультипотоков z, гарантированно достижимых по отношению к удару мощности γ при синтезе с вектором $c \in C$.

Утверждение 1. Представим многогранник $Z(y)$ $\forall y$ заданным в $\mathbb{R}^m$ линейными ограничениями неравенствами "$\le$" с неотрицательными коэффициентами и $z \ge 0$. Предположим, что $\forall c \in C$ в любой точке $z \in D_\gamma(c)$ активными является не более m из них и все $D_\gamma(c)$ — m-мерные многогранники. Тогда для слейтеровского значения оптимума (0.5) $\forall c^0(\lambda,\gamma) \in C_\gamma^0$

$$\operatorname*{Max}_{c\in C_\gamma^0 \setminus \{c^0(\lambda,\gamma)\}} \operatorname*{Min}_{y\in Y_\gamma(c)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(y)} z \ne \operatorname*{Max}_{c\in C} \operatorname*{Min}_{y\in Y_\gamma(c)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(y)} z.$$

Доказательство. Введем множество J индексов всех ограничений, представляющих $Z(y)$, $y \in Y$. Обозначим через $J(c)$ те из них, которые определяют $D_\gamma(c)$, $c \in C$, кроме ограничений неотрицательности, а через $R(z) \subseteq J$ индексы ограничений, активных (выполняющихся как равенства) в точке $z \in \Psi_\gamma$. По построению C_γ^0

$$\forall c^0 \in C_\gamma^0 \;\; \forall z^0 \in \operatorname{Max} D_\gamma(c^0): \quad J(c^0) \bigcap R(z^0) \ne \emptyset.$$

Действительно, если все ограничения с индексами из $J(c^0)$ не активны, то мультипоток z^0 не является слейтеровским для множества, задаваемого этими ограничениями, ибо может быть увеличен по всем координатам в силу неотрицательности коэффициентов и полноразмерности множества ограничений.

Кроме того $\forall c^0 \in C_\gamma^0 \;\; \exists z^0 \in \operatorname{Max} \Psi_\gamma : \quad z^0 \in \operatorname{Max} D_\gamma(c^0)$. Докажем это от противного. Предположим, что $\exists \lambda^0 \in \Lambda: \;\; c^0 = c^0(\lambda^0, \gamma)$ и $\forall z^0 \in \operatorname{Max} D_\gamma(c^0) \; \exists c' \in C, \; z' \in D_\gamma(c'): \;\; z' > z^0, \;$ т.е. $z_i' > z_i^0 \;\; \forall i \in I(\lambda^0)$ и

$$\min_{i \in I(\lambda^0)} z_i' > \min_{i \in I(\lambda^0)} z_i^0.$$

С учетом минимальности по включению $Z^0(y)$ и $Y_\gamma^0(c)$ в сделанных предположениях [1] можно выбрать $z^0 = z^0(y^0(c^0, \lambda^0, \gamma), \lambda^0)$. Тогда получили, что

$$\max_{z' \in D_\gamma(c')} \min_{i \in I(\lambda^0)} z_i' > \max_{z^0 \in D_\gamma(c^0)} \min_{i \in I(\lambda^0)} z_i^0, \quad \text{т.е.}$$

$$\min_{y \in Y_\gamma(c')} \max_{z' \in Z(y)} \min_{i \in I(\lambda^0)} z_i' > \min_{y \in Y_\gamma(c^0)} \max_{z^0 \in Z(y)} \min_{i \in I(\lambda^0)} z_i^0$$

— противоречие с определением $c^0 = c^0(\lambda^0, \gamma)$. Таким образом,

$$\forall c^0 \in C_\gamma^0 \;\; \exists z^0 \in \operatorname{Max} \Psi_\gamma : \quad J(c^0) \bigcap R(z^0) \neq \emptyset.$$

Итак, если мы предположим, что утверждение 1 не верно и синтез c^0 можно не рассматривать, то $\forall j \in J(c^0) \cap R(z^0) \neq \emptyset \quad j$-е ограничение должно быть следствием остальных ограничений, активных в точке z^0, т.е. представимо их линейной комбинацией. Выберем угловую точку z многогранника $D_\gamma(c^0)$, смежную с z^0 (или $z = z^0$, если z^0 — угловая). Для нее выполнено $R(z) \supseteq R(z^0)$, значит, и у нее j-е ограничение должно быть следствием других активных ограничений, т.е. активные ограничения в точке z оказались линейно зависимыми. Но по условию $|R(z)| \leq m$ — пришли к противоречию с тем, что угловая точка m-мерного многогранника определяется m линейно независимыми ограничениями. Утверждение доказано.

Теперь обсудим данное определение значения и реализаций (0.5) в контексте классической задачи о допустимости МП-сети: можно ли в сети с вектором y пропускной способности физических ребер пропустить вектор d требований пользователей (см. в [4]). В качестве числовой оценки допустимости МП-сети в [20] введен максимальный уровень обеспеченности потоковых требований (о.п.т.)

$$\theta_0 = \theta_0(y, d) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{z \in Z(y)} \min_{i \in I(d)} z_i / d_i.$$

Критерий допустимости МП-сети дается условием $\theta_0 \geq 1$. В случае недопустимости МП-сети ($\theta_0 < 1$) стремление к максимизации уровня о.п.т.

$$\min_{i \in M} z_i/d_i \tag{2.7}$$

согласуется с концепцией равноправности пользователей и равнозначности для сети их потоковых требований. Значение θ_0 характеризует эффективность МП-сети по обеспечению данного вектора требований. Распределение потоков, реализующее максимум уровня о.п.т. (2.7), называется *конкурентным* [21]. Обозначим через $Z_0(y,d)$ множество конкурентных мультипотоков, очевидно $\forall \lambda \in \Lambda$ элементами $Z_0(y,\lambda)$ являются $z^0(y,\lambda)$, определенные в (2.6). Введем также множество $M_0 = M_0(y,d)$ — пересечение реализаций минимума (2.7) по всем конкурентным решениям (непустота M_0 вытекает из линейности сетевых ограничений).

Ограничения $Z(y)$ определяют зависимость θ_0 от вектора y пропускной способности. В данной статье этот вектор считается неизвестным в силу возможности непредсказуемых (неслучайных) воздействий на сетевую систему, уменьшающих исходно имевшуюся пропускную способность. Наибольшее гарантированное значение уровня о.п.т. (2.7) с учетом неопределенности пропускной способности дается формулой

$$\theta_0^{\text{г}} = \theta_0^{\text{г}}(d,c,\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y \in Y_\gamma(c)} \max_{z \in Z(y)} \min_{i \in I(d)} z_i/d_i \tag{2.8}$$

(достижимость минимума в (2.8) следует из результатов [19] о непрерывности θ_0 по y). Случай $\theta_0^{\text{г}} \geq 1$ означает гарантированную допустимость МП-сети при заданной величине γ. В противном случае найдется такое распределение мощности удара, что не удастся обеспечить полностью требования пользователей.

Значение $\theta_0^{\text{г}}$ характеризует живучесть системы, показывая, насколько МП-сеть сохраняет способность по обеспечению данного вектора требований. При фиксированном d это значение зависит от c и γ, где $\gamma \in [0,1]$ является параметром, а c — управлением оперирующей стороны. Выбор c с целью максимизации гарантированного уровня о.п.т. приводит по определению (2.2) к задаче поиска $\theta_\gamma[d]$. Тем самым величина $\theta_\gamma[\lambda]$ (2.2) в задаче повышения живучести имеет смысл наибольшего гарантированного уровня обеспеченности вектора λ потоковых требований пользователей сетевой системы. Вектор $\theta_\gamma[\lambda]\lambda$ — это мультипоток, который гарантированно будет пропущен по синтезируемой сети при любых возможных (для конкретного γ) значениях неконтролируемых факторов в условиях конкурентного распределения потоков в соответствии с требованиями, пропорциональными λ. Объединению таких векторов по всем вариантам требований и оказывается равной наилучшая гарантированная оценка живучести сети с критерием эффективности — вектором потоков (для слейтеровской постановки). Действительно, поскольку $\theta_\gamma[d]d = \theta_\gamma[\lambda]\lambda$ для $\lambda = d/\sum_{i=1}^{m} d_i$, то достаточно ограничиться $\lambda \in \Lambda$.

Таким образом, для каждого мультипотока $z^0 \in \operatorname{Max}\Psi_\gamma$ можно указать вектор требований λ^0, для которого $z^0 = \theta_\gamma[\lambda^0]\lambda^0$ и $\theta_\gamma[\lambda^0]$ — точная (неулучшаемая) гарантированная оценка уровня о.п.т., или допустимости МП-сети для данного вектора требований. Следовательно параметризация значения (0.5) с помощью ОЛС имеет понятный содержательный смысл, что также должно содействовать ЛПР в процессе принятия решений (в частности, это дает возможность использовать любую информацию о потоковых требованиях). Параметризация по γ позволяет получить вполне представительную картину гарантированной живучести МП-сети как системы передачи произвольных векторов мультипотоков.

3. Поиск решения. Предположим, что величина γ (мощность удара) фиксирована. Тогда для аппроксимации значения (0.5) следует выбрать некоторую δ-сеть на множестве Λ параметров, т.е. конечное множество $\Lambda_\delta \subset \Lambda$, такое что $\forall\lambda \in \Lambda \quad \rho(\lambda, \Lambda_\delta) \leq \delta$, где ρ — расстояние в $\mathbb{R}^m$, а затем найти $\theta_\gamma[\lambda]$ для элементов из Λ_δ. В условиях регулярности (2.3) для любого $\varepsilon > 0$ найдется δ, при котором конечное множество $\bigcup_{\lambda\in\Lambda_\delta} \theta_\gamma[\lambda]\lambda$ образует ε-сеть на $\operatorname{Max}\Psi_\gamma$ для слейтеровского значения Max. Этот результат вытекает из (2.4) и непрерывности в условиях (2.3) функции $\theta_\gamma[\cdot]$ по $\lambda \in \Lambda$ (см. в [22]).

Теперь предположим, что множество C конечно. В [1] показано, что при каждом фиксированном c ОЛС позволяет для ряда $\lambda \in \Lambda_\delta$ не решать задачу (2.8), а пересчитывать значения $\theta_0^{\text{г}}(\lambda, c, \gamma)$ по уже вычисленным $\theta_0^{\text{г}}(\lambda^j, c, \gamma)$. А именно обозначим через Λ^s стандартный симплекс в $\mathbb{R}^s$ $\forall s \leq m$, $\Lambda^m = \Lambda$. Для любого $\mu \in \Lambda^s$ определим

$$\lambda(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{s} \mu_j\lambda^j, \quad \overline{\theta}(\mu, \lambda(\mu)) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\sum_{j=1}^{s} \mu_j/\theta_0^{\text{г}}(\lambda^j, c, \gamma)\Big)^{-1}. \tag{3.1}$$

Справедливо следующее

Утверждение 2 [1]. Пусть в каких-то узлах $\lambda^1, \ldots, \lambda^s$ некоторой δ-сети на Λ известны значения $\theta_0^{\text{г}}(\lambda^j, c, \gamma)$ для $j = 1, \ldots, s$. Тогда если найдется $\mu^0 \in \Lambda^s$, $\mu^0 > 0$, для которого

$$\theta_0^{\text{г}}(\lambda(\mu^0), c, \gamma) = \overline{\theta}(\mu^0, \lambda(\mu^0)), \ \text{ т.е. } \ \theta_0^{\text{г}}(\lambda(\mu^0), c, \gamma) = \Big(\sum_{j=1}^{s} \mu_j^0 / \theta_0^{\text{г}}(\lambda^j, c, \gamma)\Big)^{-1}, \tag{3.2}$$

то $\theta_0^{\text{г}}(\lambda(\mu), c, \gamma) = \overline{\theta}(\mu, \lambda(\mu))$ для всех $\mu \in \Lambda^s$.

Итак, зная $\theta_0^{\text{г}}(\lambda^j, c, \gamma)$ для $j = 1, \ldots, s$, можно при выполнении условия (3.2) получить $\theta_0^{\text{г}}(\lambda, c, \gamma)$ по формуле (3.1) при любом $\lambda \in conv\{\lambda^1, \ldots, \lambda^s\}$. Однако распространить указанный результат на $\theta_\gamma[\lambda]$ не удается в силу невыпуклости множества Ψ_γ. Действительно, утв. 2 основано на том, что все точки $\theta_0^{\text{г}}(\lambda^1, c, \gamma)\lambda^1, \ldots, \theta_0^{\text{г}}(\lambda^s, c, \gamma)\lambda^s$ принадлежат одной слейтеровской грани множества $D_\gamma(c)$, а значит, одной и той же слейтеровской грани некоторого $Z(y)$, откуда и следует результат утв. 2 (аналогично утв. 4 из [6]). Но в отсутствие выпуклости Ψ_γ принадлежности найденных точек $\theta_\gamma[\lambda^j]\lambda^j$ одной слейтеровской грани Ψ_γ не достаточно для принадлежности той же грани точек $\theta_\gamma[\lambda(\mu)]\lambda(\mu)$.

Поэтому есть смысл построить по отдельности множества достижимости в задачах (0.4) для каждого $c \in C$, а затем взять объединение полученных множеств и найти его слейтеровские грани, зная слейтеровские грани всех $D_\gamma(c)$. Для их построения можно воспользоваться алгоритмом из [1], основанном на методе адаптивного дробления из [23]. В задачах с небольшим числом элементов в C такая процедура оказывается более экономной, чем прямое применение (2.2), поскольку минимизирует количество обращений к программе поиска минимакса ОЛС.

Дело в том, что поиск $\theta_\gamma[\lambda]$ является непростой вычислительной задачей даже при заданном γ. Если поиск $\theta_0(y, \lambda)$ сводится к задаче линейного программирования, то уже поиск $\theta_0^{\text{г}}$ — задача глобальной оптимизации. Действительно, функция максимума в (2.8) будет вогнутой по y при фиксированном d, поэтому значение (2.8) достигается в угловых точках многогранника $Y_\gamma(c)$, и их перебор может потребовать немалого времени. Конечно существуют простые случаи, например, когда $\theta_0^{\text{г}}(d, c, \gamma) = 0$ — мощности удара достаточно для нарушения связности графа сети и разделения хотя бы одной тяготеющей пары. Такие случаи находятся путем перебора всех тяготеющих пар и вычисления пропускной способности c_* наименьшего из их минимальных разрезов. (Задача поиска минимального разреза для одной тяготеющей пары полиномиальна [4].) Получим $\theta_0^{\text{г}}(d, c, \gamma) = 0 \ \forall \gamma \geq \gamma_* = \gamma_*(c) \stackrel{\text{def}}{=} c_* / \sum\limits_{k=1}^{K} c_k$, $\forall d > 0$. Для $0 < \gamma < \gamma_*$ уже придется перебирать не тяготеющие пары, а угловые точки $Y_\gamma(c)$, которых экспоненциальное число, и гарантированно сократить перебор не удается (хотя возможно применение различного рода эвристик).

Заметим, что если $\theta_0(c,d)=1$, т.е. в синтезированной сети требования d обеспечены, но для хотя бы одной тяготеющей пары — без запаса, то $\theta_0^{\text{г}}(d,c,\gamma)\le 1-\gamma$. Указанная оценка, как правило, завышена. В случае $\theta_0(c,d)=1$ и $M_0(c,d)=M$ очевидно $\exists y\in Y_\gamma(c)$: $\theta_0(y,d)=1-\gamma$ с $M_0(y,d)=M$, т.е. при любом конкурентном распределении потоков после удара ни одна тяготеющая пара не может гарантированно рассчитывать на большее $1-\gamma$ значение о.п.т. При этом, если оказалось, что $\theta_0^{\text{г}}(d,c,\gamma)=1-\gamma$, то поскольку удара хуже не существует, синтез, соответствующий вектору c, в определенном смысле является оптимальным для данных требований. Более того, когда равенство справедливо для

$$c=c(d,G)\stackrel{\text{def}}{=}\arg\min_{c\ge 0}\{\sum_{e_k\in E}c_k|\ \theta_0(c,d)=1,\ M_0(c,d)=M\},\qquad(3.3)$$

можно говорить об оптимальной структуре графа сети, так как при синтезе с $c=c(d,G)$ требования d удовлетворяются и "лишней" (не используемой) пропускной способности не создается. Оптимальная структура получается из графа G после удаления физических ребер r_k с $c_k(d,G)=0$. И если C позволяет, следует выбрать вектор $c=c(d,G)/(1-\gamma)$, тогда $\theta_0^{\text{г}}(d,c,\gamma)=1$.

В многокритериальной постановке (с нефиксированными требованиями) условие $\theta_0(c,\lambda)=1\ \forall\lambda\in\Lambda$ не выполняется для нетривиальных структур. Однако можно предложить считать граф G^1 лучше G^2, если $\theta_0^{\text{г}}(\lambda,c(\lambda,G^1),\gamma)\ge\theta_0^{\text{г}}(\lambda,c(\lambda,G^2),\gamma)\ \forall\lambda>0,\ \gamma<1$. Тогда оптимальным был бы граф G^0, для которого $\theta_0^{\text{г}}(\lambda,c(\lambda,G^0),\gamma)=1-\gamma\ \forall\lambda>0,\ \gamma<\gamma_*$, при условии, что $\gamma_*(c(\lambda,G^0))$ не меньше остальных γ_*. Но не факт, что подобный граф существует. В качестве примера рассмотрим случай $m=3$ и графы G^1, G^2, G^3, представленные на рис. 1; граф тяготений (логический граф) совпадает с G^2.

Рис. 1.

Нетрудно видеть, что $\forall d_3\ge d_2\ge d_1>0$: $c_k(d,G^2)=d_k\ \forall k=1,2,3$, $c_{k-1}(d,G^1)=d_k+d_1\ \forall k=2,3$, $c_k(d,G^3)=d_k+d_{(k+1)mod\,3}\ \forall k=1,2,3$ (соответствующие величины для $d=(10,20,30)$ проставлены рядом с ребрами на рис. 1). Если посчитать $\theta_0^{\text{г}}$ для построенных сетей (см. аналогичные задачи в [24]), то получим $\theta_0^{\text{г}}(\lambda,c(\lambda,G^l),\gamma)<1-\gamma$ $\forall l=1,2,3$, $\theta_0^{\text{г}}(\lambda,c(\lambda,G^3),\gamma)<\theta_0^{\text{г}}(\lambda,c(\lambda,G^1),\gamma)<\theta_0^{\text{г}}(\lambda,c(\lambda,G^2),\gamma)$ и $\gamma_*(c(\lambda,G^3))<\gamma_*(c(\lambda,G^1))<\gamma_*(c(\lambda,G^2))\quad\forall\lambda>0$. Кроме того, если бы в качестве исходного графа было выбрано объединение всех трех структур (объединение G^2 и G^3), то по правилу (3.1) также построили бы граф G^2. Однако, как следует из результатов [24], структура G^1 в некотором отношении менее уязвима, чем G^2, ибо для нее всегда найдется тяготеющая пара, получающая $1-\gamma$ своих требований. Поэтому исследование живучести МП-сети и предполагает более подробный (многокритериальный) анализ, основанный на решении общей задачи (0.5), поставленной в данной работе.

Для сравнения трех рассмотренных на рис. 1 сетей (с обозначенной пропускной способностью) приведем для них множества достижимых мультипотоков $Z(c(d,G^l))$ и их гарантированных оценок, а именно, множества $D_\gamma(c(d,G^l))$ для $l=1,2,3$ с $\gamma=0$ (см. рис. 2) и $\gamma=0.2$ (см. рис. 3). (По определению $Y_\gamma(c)$ для $\gamma=0$ имеем $D_0(c)=Z(c)$ $\forall c\in C$.) Множества $D_{0.2}(c(d,G^l))$ строятся как пересечения $Z(y^{lt})$ по угловым точкам y^{lt} многогранников $Y_{0.2}(c(d,G^l))$ с соответствующими $l=1,2,3$. Эта возможность ограничиться конечным числом пересечений основана на представлении $Y^*_\gamma(c)=Y^0_\gamma(c)$ множества реализаций минимума с помощью ОЛС (см. разд. 2), поскольку за счет вогнутости ОЛС по y минимум свертки достигается в угловых точках $Y_\gamma(c)$. Графики для G^1 и G^3 на рис. 3 получены в результате пересечения двух множеств достижимости, построенных для случаев, когда вся мощность удара приходится на одно ребро с $c_k=30$ или 40. График для G^2 является пересечением четырех множеств достижимости, так как мощности удара для него достаточно, чтобы разрушить ребро c_1, и в этом случае рассмотрены два варианта распределения всей остаточной мощности по одному из двух оставшихся ребер.

Рис. 2.

Рис. 3.

Глядя на рис. 2, делаем вывод, что если для задачи о допустимости для конкретного вектора d все три сети эквивалентны ($\theta_0=1$), то в многокритериальной постановке лишь $Z(c(d,G^2))$ и $Z(c(d,G^3))$ будут совпадающими, причем включающимися в $Z(c(d,G^1))$ (т.е. в смысле множеств достижимости граф G^1 оказался лучше других). Из рис. 3 ясно, что по критерию живучести худшим можно считать граф G^3, поскольку для него $D_\gamma(c(d,G^3))$ строго включается в $D_\gamma(c(d,G^2))$ при $\gamma=0.2$, несмотря на совпадение этих множеств при $\gamma=0$, и также с большим запасом $D_\gamma(c(d,G^3))\subset D_\gamma(c(d,G^1))$. Множества $D_\gamma(c(d,G^2))$

и $D_\gamma(c(d,G^1))$ не включаются одно в другое, т.е. графы G^1 и G^2 оказались несравнимыми по векторному критерию живучести, что вполне согласуется с результатами из [24], отмеченными выше.

С помощью объединения множеств, приведенных на рис. 3, может быть найдено значение (0.5) как многокритериальный максимум (1.1):

$$\operatorname*{Max}_{l=1,2,3}\ \operatorname*{Min}_{y\in Y_\gamma(c(d,G^l))}\ \operatorname*{Max}_{z\in Z(y)} z = \operatorname{Max}\bigcup_{l=1,2,3}\ \bigcap_{y\in Y_\gamma(c(d,G^l))} Z(y) = \operatorname{Max}\bigcup_{l=1,2} D_\gamma(c(d,G^l)).$$

В данном случае объединение достаточно провести для индексов 1 и 2, потому что 3-й граф не вошел в число реализаций оптимума. Получим множество гарантированно достижимых мультипотоков Ψ_γ, изображенное на рис. 4. Паретовские и слейтеровские грани этого множества имеют точки, соответствующие как 1-му, так и 2-му графам.

Рис. 4.

Отметим, что рассмотренные три варианта синтеза на самом деле являются решениями задач (3.3) с $d = (10,20,30)$ для трех базовых структур (линейной, кольцевой и звезды) физического графа при полном графе тяготений на трех вершинах. Если записать это в качестве ограничений $c \in C$ задачи синтеза, то видно, что построено решение достаточно общей задачи исследования живучести трехпродуктовых сетей (пересчет полученных данных под произвольные γ и $d > 0$ принципиальных трудностей не представляет).

В приведенном примере решение задачи (0.5) удается найти в явном виде. Для других постановок приходится численно решать параметрическое семейство задач (2.2) с различными значениями γ. Ясно, что для близких γ значения $\theta_\gamma[\lambda]$ будут близкими и при определенных условиях будут достигаться в угловой точке $y \in Y_\gamma(c)$ с теми же ненулевыми компонентами. Однако алгоритмов пересчета решений, полученных при разных γ, для параметрического семейства задач (2.2) авторам не известно (в отличие от пересчета по значениям $\lambda \in \Lambda$). Так что мы вынуждены ограничиваться лишь несколькими значениями γ. Поэтому задачу повышения живучести рекомендуется ставить для достаточно сильно агрегированных сетей с небольшим числом ребер, например, с целью выбора глобальной стратегии развития МП-сети. Проблема разработки численных методов решения (2.2) представляется авторам первоочередной проблемой анализа возможностей повышения живучести МП-сетей.

Список литературы

1. *Воробейчикова О.А., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. VI. Задача о допустимости при неслучайных потерях пропускной способности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. N.3.

2. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

3. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.

4. *Карзанов А.В.* Комбинаторные способы решения разрезных задач о мультипотоках // Комбинаторные методы в потоковых задачах. Вып.3. М.: ВНИИСИ, 1979.

5. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

6. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М., Смирнов М.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. III. Многокритериальная, или параметрическая, постановка для неизвестных требований // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N. 4.

7. *Новикова Н.М., Поспелова И.И.* Векторный максиминимакс // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 1999. N. 4.

8. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.

9. *Гермейер Ю.Б.* Приближенное сведение с помощью штрафных функций задачи определения максимина к задаче определения максимума // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т.9. N. 3.

10. *Новикова Н.М., Поспелова И.И.* Многокритериальные задачи принятия решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ РАН, 2000.

11. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Векторный минимакс со связанными ограничениями // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 1996. N. 4.

12. *Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е.* Многокритериальные задачи управления в условиях неопределенности. Тбилиси: Мецниереба, 1991.

13. *Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е.* Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Мецниереба, 1996.

14. *Штоер Р.* Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992.

15. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.

16. *Смирнов М.М.* О логической свертке вектора критериев в задаче аппроксимации множества Парето // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т.36. N. 5.

17. *Смирнов М.М.* Методы аппроксимации граней множества Парето в линейной многокритериальной задаче // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и кибернетика. 1996. N. 3.

18. *Новикова Н.М., Поспелова И.И.* Параметризация значения векторного максиминимакса с помощью обратной логической свертки // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 2000. N. 3.

19. *Давидсон М.Р., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. II. Свойства суперконкурентного распределения потоков // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.3.

20. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. I // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.2.

21. *Matula D.W.* Concurrent flow and concurrent connectivity in graphs // Graph Theory and Its Appl. to Algorithms and Comput. Sci. N.Y.: Wiley-Intersci., 1985.

22. *Поспелова И.И.* Теоретические вопросы двухэтапной векторной оптимизации: Автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, ф.ВМиК, 2000.

23. *Смирнов М.М.* Методы аппроксимации множества Парето, основанные на обратной логической свертке, и их использование в сетевой оптимизации: Автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, ф.ВМиК, 1996.

24. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. VII. Задача нормативного анализа уязвимости многопродуктовой потоковой сети // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. N.4