Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. VI.

Задача о допустимости при неслучайных потерях пропускной способности [1]

©1998 г. **О.А. Воробейчикова, Ю.Е.Малашенко, Н.М.Новикова**
Москва, ВЦ РАН

Поступила в редакцию 21.04.97 г.

Рассмотрена задача анализа эффективности многопользовательских сетевых систем в условиях возможности неслучайных внешних воздействий, уменьшающих пропускную способность ребер физического графа сети. Предложена формулировка соответствующей задачи о допустимости многопродуктовых потоковых сетей для известного вектора требований. Исследована параметрическая постановка, учитывающая неинформированность (неполную или неточную информированность) о векторе требований. В таком случае задача анализа представлена как многокритериальная минимаксная с вектором величин потоков продуктов (мультипотоком) в качестве максимизируемого критерия. Проведена формализация решения задачи и указаны методы поиска решения.

Введение. Предлагаемая статья является продолжением [1], посвященной применению общей методологии исследования операций [2] для анализа допустимости многопродуктовых потоковых сетей (МП-сетей) [3, 4] в условиях неопределенности. В [1] был изучен случай неточно или неполностью известного вектора входной нагрузки (требований тяготеющих пар) и даны адекватные обобщенные постановки задачи о допустимости, в частности, гарантированная (предполагающая допустимость для любого вектора требований). В [5] исследована задача о допустимости в случае неизвестных требований и предложены методы ее решения с помощью параметрического анализа. При этом использовалась многокритериальная постановка на максимум вектора величин потоков продуктов. В работе [6] был проведен подробный анализ МП-сетей в предположении, что неопределенный фактор влияет на пропускную способность ребер физического (а не логического) графа сети и является случайным. Содержательно этот вариант существенно отличается от предыдущих тем, что неопределенность, исследуемая в [6], является объективной, а не субъективной как, когда речь идет об

[1] Работа поддержана РФФИ по гранту N.98-01-00233

сматривается задача анализа МП-сети с неизвестной (неточно или неполностью известной) пропускной способностью ребер ее физического графа в детерминированном случае. Предполагается, что возможные разрушающие (поражающие) воздействия на сеть имеют неслучайный характер: являются результатом глобальных изменений, катаклизмов или целенаправленного поведения. Потери пропускной способности могут оказаться довольно большими и трудно восполнимыми, что требует апостериорного перераспределения потоков в сети. Поэтому будем рассматривать задачу анализа в *нежесткой постановке*: учитывать возможность оптимизации распределения потоков после поражающего воздействия на сеть, далее, "удара". Здесь считается, что оставшаяся пропускная способность станет затем известной. Тяготеющие пары полагаем для простоты не подверженными воздействию — не изменяющимися.

Согласно общей методологии исследования операций [2] в условиях неполной информированности надо ориентироваться на гибко понимаемый принцип гарантированности результата, т.е. учитывать всю доступную и ожидаемую информацию (по мере ее поступления) и рассчитывать на худший случай в рамках имеющейся неопределенности. Следуя 1-му правилу, мы выбрали нежесткую постановку задачи анализа. Однако, рамки неопределенности вектора пропускной способности для рассматриваемого класса задач слишком широки, чтобы приводить к содержательным оценкам по 2-му правилу. С целью сузить эти рамки будем совмещать принцип гарантированности результата с параметрическим анализом. А именно, параметризуем все возможные воздействия по "силе" (или "мощности") удара, точнее, по сумме потерь пропускной способности ребер МП-сети. Конкретная локализация удара (ребра, подвергшиеся поражающему воздействию) и распределение данной мощности удара по ребрам сети по-прежнему считаются неизвестными. Таким образом, гарантированное оценивание функциональных возможностей МП-сети предполагает поиск наихудшего для сети распределения удара, т.е. поиск варианта уменьшения пропускной способности ребер, приводящего к максимальному ущербу функционированию МП-сети (при известных ограничениях на суммарное сокращение пропускной способности). Параметрическое семейство подобных задач поиска будет в работе ассоциироваться с *задачей анализа уязвимости.*

Сетевые системы как сложные многопользовательские системы, вообще говоря, не имеют единственного показателя эффективности, их ных критериев уже рассматривались нами при изучении задачи анализа МП-сети с фиксированной пропускной способностью (см. [7, 5]). Указанные векторы будут и в дальнейшем служить основными количественными показателями при получении оценок функциональных возможностей МП-сети в условиях разрушающих воздействий. При этом качество функционирования сети понимается с позиций обеспечения потоковых требований пользователей — тяготеющих пар. В данной работе исследуется случай неизвестных требований, т.е. вектором критериев согласно [5] является мультипоток (но в отличие от [5] задача ставится не как оптимизационная, а как минимаксная). Однако для начала, если рассмотреть упрощенную постановку задачи анализа МП-сети как задачи анализа допустимости (см. [1]) для конкретного вектора требований, то можно ограничиться одним скалярным показателем эффективности сети (соглашаясь на определенное уравнивание пользователей). Соответствующая формулировка задачи анализа уязвимости приводится в следующем разделе, и на ней будет базироваться общее исследование (см. разд. 2 и 3).

1. Гарантированный уровень обеспеченности требований — скалярная характеристика уязвимости МП-сети. Скалярной характеристикой качества функционирования МП-сети является мера ее допустимости, т.е. уровень обеспеченности потоковых требований (о.п.т.) пользователей. При возможности соответствующего перераспределения потоков сеть характеризуется максимально достижимым уровнем о.п.т., или величиной *максиминной о.п.т.*

$$\theta_0 = \theta_0(c, d) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(\mathbf{f},z)\in X(c)} \min_{i\in M} \frac{z_i}{d_i}, \tag{1.1}$$

где $c = (c_1, \ldots, c_e)$ — вектор пропускной способности ребер графа сети, $d = (d_1, \ldots, d_m)$ — вектор требований тяготеющих пар (продуктов), $M(d) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in M|\ d_i \neq 0\}$, $M = (1, 2, \ldots, m)$ — множество индексов i тяготеющих пар, $X(c)$ — многогранник *распределений потоков* $\mathbf{f} = \{f_{ij}\}$ и *мультипотоков* (величин потоков) $z = (z_1, \ldots, z_m)$, достижимых в МП-сети, т.е. удовлетворяющих условию неразрывности потоков и ограничениям по пропускной способности ребер

$$\sum_{i=1}^{m} (f_{ik} + f_{i(k+e)}) \leq c_k \quad \forall k = 1, 2, \ldots, e. \tag{1.2}$$

Кроме этого, будем использовать отдельное обозгачение $Z(c)$ для множества достижимых мультипотоков в сети: $Z(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{z|\ \exists \mathbf{f} :\ (\mathbf{f}, z) \in X(c)\}$.

недопустимости МП-сети ($\theta_0 < 1$) стремление к максимизации

$$\min_{i\in M} \frac{z_i}{d_i} \tag{1.3}$$

— уровня о.п.т. — согласуется с концепцией равноправности пользователей и равнозначности для сети их потоковых требований. Значение θ_0 характеризует эффективность МП-сети по обеспечению данного вектора требований. Распределение потоков, реализующее θ_0, называется *конкурентным* [8]. Следуя [7], обозначим через $X_0(c,d)$ и $Z_0(c,d)$ соответственно множества конкурентных распределений потоков и мультипотоков, а также введем множество $M_0 = M_0(c,d)$ — пересечение реализаций минимума в (1.1) по всем конкурентным решениям (непустота M_0 вытекает из линейности сетевых ограничений).

Ограничения (1.2) показывают зависимость θ_0 от вектора c пропускной способности ребер в МП-сети. В данной статье этот вектор считается неизвестным в силу возможности непредсказуемых (неслучайных) воздействий на сетевую систему, уменьшающих исходно имевшуюся пропускную способность. Наибольшее гарантированное значение уровня о.п.т. (1.3) с учетом неопределенности пропускной способности дается формулой

$$\theta_0^{z*} = \theta_0^{z*}(d) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{c\in C} \max_{(\mathbf{f},z)\in X(c)} \min_{i\in M(d)} z_i/d_i, \tag{1.4}$$

где C — множество векторов c в рамках заданной неопределенности. (Достижимость минимума в (1.4) вытекает из результатов [7] о непрерывности максиминной о.п.т. по c.)

В [6] рассматривалось $C = \{c|\ c' \le c \le c''\}$, однако, если не вводить дополнительных предположений, то величина c'' совпадает с изначальным вектором c^0 пропускной способности ребер физического графа МП-сети (в лучшем случае удара не произойдет), а $c' = \bar{0}$ (в худшем случае все ребра будут разрушены полностью). Поэтому, чтобы не свести все исследование к тривиальному значению 0 для (1.4), будем далее изучать задачу (1.4) с $C = C[\gamma]$, где

$$C[\gamma] \stackrel{\text{def}}{=} \{c \ge \bar{0}|\ c \le c^0,\quad \sum_{k=1}^{e} c_k = (1-\gamma)\sum_{k=1}^{e} c_k^0\}, \tag{1.5}$$

при различных $\gamma \in [0,1]$. Параметр γ имеет смысл силы, или мощности, удара и показывает, какая часть изначальной пропускной способности оказалась разрушенной (суммарно по всем ребрам). Переменная ра пропускной способности ребер физического графа МП-сети. Исходно (до удара) имевшуюся пропускную способность будем обозначать вектором c^0, не оговаривая этого в дальнейшем. Введем также обозначение $c_0 \stackrel{\rm def}{=} \sum_{k=1}^{e} c_k^0$ для начального отсчета потерь пропускной способности.

Теперь мы можем формально определить наибольшее гарантированное значение уровня о.п.т. при ударе мощности γ как

$$\theta_0^{г*}[\gamma] = \theta_0^{г*}[\gamma](d) \stackrel{\rm def}{=} \min_{c\in C[\gamma]} \max_{(\mathbf{f},z)\in X(c)} \min_{i\in M(d)} z_i/d_i, \quad \gamma \in [0,1]. \qquad (1.6)$$

Случай $\theta_0^{г*}[\gamma] \geq 1$ означает гарантированную допустимость МП-сети при заданном значении γ. В противном случае, найдется такое распределение мощности удара, что не удастся обеспечить полностью требования пользователей.

Заметим, что, если $\theta_0(c^0, d) = 1$, т.е. в исходной сети все требования обеспечивались, но для хотя бы одной тяготеющей пары — без запаса, то $\theta_0^{г*}[\gamma] \leq 1-\gamma$. Указанная оценка, как правило, завышена. В случае $\theta_0(c^0, d) = 1, \quad M_0(c^0, d) = M$ очевидно $\exists c \in C[\gamma]$: $\theta_0(c, d) = 1-\gamma$ с $M_0(c, d) = M$, т.е. даже при суперконкурентном распределении потоков после удара [7] ни одна тяготеющая пара не может гарантированно рассчитывать на большее $1-\gamma$ значение о.п.т.

Поиск $\theta_0^{г*}[\gamma]$ является непростой вычислительной задачей даже при заданном γ. Целевая функция в (1.6) — максиминная о.п.т. $\theta_0(c, d)$ — будет вогнутой по c при фиксированном d. Поэтому значение (1.6) достигается в угловых точках многогранника $C[\gamma]$, но их перебор может потребовать значительного времени. Конечно, существуют простые случаи, например, когда $\theta_0^{г*}[\gamma] = 0$ — мощности удара достаточно для нарушения связности графа сети и разделения хотя бы одной тяготеющей пары. Такие случаи находятся путем перебора всех тяготеющих пар и вычисления пропускной способности c_* наименьшего из их минимальных разрезов. (Задача поиска минимального разреза для одной тяготеющей пары полиномиальна [4].) Получим $\theta_0^{г*}[\gamma] = 0$ $\forall \gamma \geq c_*/c_0$. Для $0 < \gamma < c_*/c_0$ уже придется перебирать не тяготеющие пары, а угловые точки $C[\gamma]$, которых экспоненциальное число. Тем не менее, в расчете на худший случай, не удается гарантированно сократить перебор, хотя возможно применение различного рода эвристик. Ясно также, что для близких γ значения $\theta_0^{г*}[\gamma]$ будут близкими и при определенных условиях будут достигаться в той же угловлй точке. Однако алгоритмов пересчета решений, полученных для разных γ, для параметрического семейства задач (1.6) авторам не известно сти рекомендуется проводить для достаточно сильно агрегированных сетей с небольшим числом ребер, например, с целью сравнительного исследования влияния структуры МП-сети на ее уязвимость. Проблема разработки численных методов решения (1.6) представляется авторам первоочередной проблемой анализа уязвимости МП-сетей.

2. Задача анализа уязвимости в случае неизвестного вектора требований.

2.1. Постановка задачи как многокритериальной минимаксной. Предположим теперь, что вектор требований пользователей сетевой системы не известен или известен недостаточно полно и поэтому при анализе уязвимости его также следует задавать параметрически (считать в (1.6) d параметром). Аналогичная постановка задачи анализа допустимости МП-сети, рассмотренная в [5], оказалась эквивалентной многокритериальной максимизации вектора z — мультипотока. Далее мы увидим, что соответствующая параметрическая постановка задачи анализа уязвимости будет эквивалентна многокритериальному минимаксу вектора мультипотока, где минимум, как и в (1.6), берется по $c \in C[\gamma]$ (1.5), γ — параметр, характеризующий разрушительную силу предполагаемых внешних воздействий. Запишем эту постановку формально: найти

$$\operatorname*{Min}_{c\in C} \operatorname*{Max}_{(\mathbf{f},z)\in X(c)} z, \quad z = (z_1, \dots, z_m), \tag{2.1}$$

$C = C[\gamma], \quad \gamma \in [0, 1]$.

К постановке (2.1) можно прийти и трактуя формально задачу анализа уязвимости МП-сети как игровую [9]. Действительно, рассмотрим антагонистическую игру двух лиц, в которой множества выборов игроков определяются с помощью нашей МП-сети. Предположим, что выбор распределения потоков $\mathbf{f}$, подчиненного ограничению $(\mathbf{f}, z) \in X(c)$, осуществляет 1-й игрок, целью которого является максимизация вектора $z = (z_1, \dots, z_m)$, т.е. достижение

$$\operatorname*{Max}_{(\mathbf{f},z)\in X(c)} z, \tag{2.2}$$

$x = (\mathbf{f}, z)$ — вектор стратегий 1-го игрока. Под Max в (2.2) понимается [2, 10] множество эффективных (оптимальных по Парето) или полуэффективных (по Слейтеру) значений вектора критериев z из множества $Z(c)$ достижимых мультипотоков. Управлением 2-го игрока является шения их исходной пропускной способности c^0 на величину w в рамках выделенной мощности $c_0\gamma = \sum\limits_{k=1}^{e} w_k$, $0 \le w \le c^0$. Переобозначив $c := c^0 - w$, получим, что 2-й игрок выбирает $c \in C = C[\gamma]$. Целью 2-го игрока считаем минимизацию вектора z потоков в сети, предполагая, что требования на передачу потоков или приоритетные направления среди $i \in M$, а также конкретный выбор $\mathbf{f}$ 1-м игроком 2-му не известны. В свою очередь, 1-му игроку становится известным выбор 2-го, что соответствует возможности апостериорного перераспределения дуговых потоков. Тем самым приходим к классической игре типа Γ_1 (с правом 1-го хода у 2-го игрока) [11], но с векторной функцией выигрыша. В качестве значения игры можем по аналогии со скалярным случаем написать формулу (2.1).

Обсудим содержательную сторону такой постановки. Здесь 2-й игрок моделирует сознательного противника или неопределенный фактор — помеху 1-му игроку. 1-й игрок может восприниматься как диспетчер сети или сетевой администратор — лицо, принимающее решения по управлению потоками в сетях. При этом правило управления потоками может быть задано заранее ("зашито" в сетевой системе) и тогда 1-й игрок оказывается автоматом, олицетворяющим диспетчерское правило. В данной ситуации можно предположить, что им выбирается вполне определенная, а не произвольная, точка из множества (2.2). Однако мы считаем, что она не известна (неточно известна) на момент проведения исследования уязвимости, например, из-за неопределенности вектора потоковых требований, когда речь идет об априорном анализе сети на этапе предварительного проектирования облика. И в результате допускаем, что может реализоваться произвольное эффективное (или еще шире, полуэффективное — в зависимости от постановки) решение, т.е. надеемся, что заведомо неэффективным способом потоки в случае аварии перераспределяться не будут. Ориентируясь лишь на эту информацию, мы хотим дать оценку способности МП-сети обеспечить потоковые требования пользователей в условиях возможности внешних воздействий заданной (для конкретного γ) мощности и приходим к формуле (2.1).

2.2. Формализация значения уязвимости. Постановка (2.1) является многокритериальной задачей на *связанный* минимакс, или минимакс *со связанными ограничениями* (множество ограничений внутренней задачи максимизации зависит от внешней минимизирующей переменной). В общем виде для произвольного вектора критериев $\Phi =$

$$\Phi^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{Min}_{c\in C} \operatorname*{Max}_{(\mathbf{f},z)\in X(c)} \Phi(\mathbf{f}, z, c). \tag{2.3}$$

Значением (2.3) в отличие от скалярного случая будет не число, а множество векторов, которое, как правило, состоит не из одного элемента (аналогично многокритериальной постановке из [5]). В [12, 13] предложена следующая формализация значения (2.3) для неотрицательных критериев:

$$\Phi^* = \operatorname{Max} \bigcap_{c\in C} \bigcup_{x\in X(c)} \{0 \le \psi \le \Phi(x, c)\}, \tag{2.4}$$

соответствующая концепции гарантированного значения, введенной в [10] для векторного минимакса с несвязанными переменными. В [14, 23] доказано, что в случае, когда Max и Min в (2.3) понимаются в смысле Слейтера, множество (2.4) совпадает с замыканием (в $\mathbf{R}^q$) множества

$$\operatorname{Min} \bigcup_{c\in C} \operatorname{Max} \bigcup_{x\in X(c)} \{0 < \psi \le \Phi(x, c)\},$$

которое при замене Max и Min получается из определения векторного максимина, данного в [15, 16]. Подробное сравнение различных определений векторного минимакса проведено в [17], где показано совпадение многих из них для задачи (2.1), поскольку $\forall z \in Z(c)\ \forall z' \le z\ (z' \ge 0)$ выполнено $z' \in Z(y)$. Так что в качестве базового определения значения (2.1) примем (2.4), т.е. множество

$$Z^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcap_{c\in C} Z(c). \tag{2.5}$$

В слейтеровском случае формула (2.5) для (2.1) будет позднее (см. разд. 3.1) несколько подкорректирована с учетом содержательных особенностей рассматриваемой задачи.

3. Связь с параметрической (по d) постановкой.

3.1. Параметризация значения уязвимости. Итак, для рассматриваемой постановки мы получили, что даже при фиксированном γ уязвимость МП-сети характеризуется в общем случае множеством векторов, и поэтому возникает задача конструктивного описания этого множества. В [17] предложен способ параметризации множества (2.4) — значения векторного минимакса — с помощью обратной логической свертки (ОЛС), введенной в [18] и уже использовавшейся нами в [5]. Для задачи (2.1), (2.5) предложенный метод сводится к следующему.

параметр опускать. Обозначим через $\theta_0^*(d)$ величину (1.4), (1.6) в зависимости от параметра $d \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D} = \mathcal{D}^m$ — стандартный симплекс в $\mathbf{R}^m$),

$$\theta_0^*(d) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{c \in C} \max_{x \in X(c)} \min_{i \in M(d)} \frac{z_i}{d_i}$$

— точная нижняя оценка уровня обеспеченности вектора требований d в МП-сети при неизвестном векторе пропускной способности $c \in C = C(\gamma)$.

Утверждение 1 [9]. *Пусть C таково, что $\theta_0^*(\bar{1}/m) > 0$. Тогда, если* Max *в* (2.5) *понимать по Слейтеру, то*

$$Z^* = Z^C \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \theta_0^*(d) d, \tag{3.1}$$

а если по Парето, то $Z^* = \operatorname{Max} Z^C$.

Таким образом, в условиях утв. 1 мы подтвердили эквивалентность многокритериального и параметрического (по d) подходов к анализу уязвимости МП-сети с неизвестными требованиями, ибо множество полуэффективных точек (2.5) задается параметрическим семейством значений (1.4) (при подходящей нормировке $d \in \mathcal{D}$ вектора требований).

Рассмотрим теперь отдельно случай $\theta_0^*(\bar{1}/m) = 0$, означающий, что

$$\exists i \in M: \quad \min_{c \in C} \max_{x \in X(c)} z_i = 0, \tag{3.2}$$

т.е. i-й критерий не улучшаем. Обозначим через M_0^* множество всех таких i и положим $m^* \stackrel{\text{def}}{=} |M_0^*|$. Для $i \in M_0^*$ по определению любая точка $z \in \bigcup_{c \in C} Z(c)$ с $z_i = 0$ будет слейтеровской. В результате слейтеровское множество как значение (2.1) оказывается мало информативным в случае $M_0^* \neq \emptyset$ (т.е. $\forall \gamma \geq c_*/c_0$ — см. разд. 1). Тогда представляется осмысленным подкорректировать определение (2.5) для (2.1) в этом случае, не меняя его в остальных. А именно, будем считать, что если Max в (2.2) понимается по Слейтеру, то значением (2.1) является множество

$Z'^* \stackrel{\text{def}}{=} \{(z_i = 0|\ i \in M_0^*)\} \otimes Z'^C$, где $Z'^C \stackrel{\text{def}}{=}$

$$= \operatorname*{Min}_{c \in C} \operatorname*{Max}_{x \in X(c)} (z_i(x)|\ i \notin M_0^*) \stackrel{\text{по (2.5)}}{=} \operatorname{Max} \bigcap_{c \in C} \bigcup_{z \in Z(y)} \{(z_i|\ i \notin M_0^*)\} =$$

$$\stackrel{\text{из утв.1}}{=} \bigcup_{d \in \mathcal{D}^{m-m^*}} \theta_1^*(d) d, \quad \theta_1^*(d) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{c \in C} \max_{x \in X(c)} \min_{i \in M(d) \setminus M_0^*} \frac{z_i}{d_i}. \tag{3.3}$$

Величина $\theta_1^*(d)$ в задаче об уязвимости аналогична 1-му уровню максиминной обеспеченности требований $\theta_1(d)$, введенному в [7] для задачи анализа допустимости МП-сети. Заметим, что при выполнении (3.2) $\theta_0^*(d) = 0\ \forall d$: $M(d) \cap M_0^* \neq \emptyset$, а для тех d, для которых $M(d) \cap M_0^* = \emptyset$, следует $\theta_0^*(d)d \in Z'^*$. Таким образом, $Z'^* = Z^C$ и для описания Z'^* также можно применить формулу (3.1) (хотя (3.3) позволяет сократить размерность решаемой параметрической задачи).

Итак Z^C (3.1), или Z'^* (3.3), и $\mathrm{Max} Z^C$ полностью описывают решение задачи (2.1) и рассмотренной игры Γ_1. Примем соответствующее конструктивное определение для значения уязвимости МП-сети с незаданными требованиями

$$\operatorname*{Min}_{c\in C} \operatorname*{Max}_{(\mathbf{f},z)\in X(c)} z \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{d\in\mathcal{D}} \Big(\min_{c\in C} \max_{x\in X(c)} \min_{i\in M(d)} \frac{z_i}{d_i}\Big) d = \tag{3.4}$$

$$= \{(z_i = 0|\ i \in M_0^*)\} \otimes \bigcup_{d\in\mathcal{D}^{m-m^*}} \Big(\min_{c\in C} \max_{x\in X(c)} \min_{i\in M(d)\setminus M_0^*} \frac{z_i}{d_i}\Big) d.$$

В паретовском случае из этого множества следует оставить лишь эффективные векторы (путем исключения нестрого доминируемых).

Формула (3.4) наглядно демонстрирует эквивалентность многокритериального и параметрического подходов к анализу уязвимости МП-сетей с неизвестным вектором требований. Стоит подчеркнуть, что обратная логическая свертка была выбрана для параметризации значения уязвимости не только ради этого. Дело в том, что, к примеру, линейная свертка просто не дает подходящей формулы для векторного минимакса. Использование ОЛС открывает возможность применения для аппроксимации Z^C, Z'^C методов, обобщающих предложенные в [18]. Мы обсудим их далее в разд. 4.2. Кроме того, как будет показано в следующем разделе, эта свертка приводит к минимальному по включению множеству, определяющему реализацию внешнего минимума в (2.1).

3.2. Определение множества наихудших воздействий для общности проведем для задачи (2.3) с произвольным векторным критерием, зависящим от потоковых переменных и пропускной способности ребер МП-сети, предполагая только неотрицательность и непрерывность. При этом мы не будем интересоваться содержательной стороной такого обобщенного понятия уязвимости — она соответствует более широкой трактовке понятия эффективности функционирования МП-сети, чем принято в настоящей работе (некоторые многокритериальные примеры см. в [19, 20, 21, 22]). Достаточно лишь, что в частном за уязвимости. Отметим также, что аналог формулы (3.3) имеет место и для задачи (2.3), но мы для простоты ограничимся в данном разделе обычным определением (2.4). (Это не изменит получаемых результатов.)

В определениях (2.4),(2.5),(3.4) участвует все множество C, вообще говоря, континуальное. Естественно, представляет интерес найти более узкое множество $C' \subset C$, для которого тоже

$$\Phi^* = \operatorname{Max} \bigcap_{c \in C'} \bigcup_{x \in X(c)} \{\psi \geq 0 |\ \Phi(x,c) \geq \psi\}, \tag{3.5}$$

т.е. множество наихудших для 1-го игрока стратегий 2-го — соответствующее реализации Min в (2.1),(2.3). Как правило, нельзя выбрать одно $c' \in C$ так, чтобы $\Phi^* = \operatorname{Max} \bigcup_{x \in X(c')} \{\psi \geq 0 |\ \Phi(x,c') \geq \psi\}$ или же $Z^* = \operatorname{Max} Z(c')$, поэтому имеет смысл говорить о минимальном по включении таком множестве C'. Однако в общем случае поиск требуемого множества является самостоятельной сложной задачей. Исследуем возможность использования линейной и обратной логической сверток с целью ее решения. Для этого введем следующие определения и обозначения:

$$\forall\ C' \subseteq C \quad \Phi_{\leq}[C'] \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{c \in C'} \bigcup_{x \in X(c)} \{\psi \geq 0 |\ \Phi(x,c) \geq \psi\},$$

$$\widehat{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{c(\lambda) = \arg\min_{c \in C} \{ \max_{x \in X(c)} \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varphi_i(x,c)\} |\ \lambda \in \mathcal{D}\};$$

$$C^* \stackrel{\text{def}}{=} \{c^* = c^*(d) = \arg\min_{c \in C} \{ \max_{x \in X(c)} \min_{i:\ d_i \neq 0} d_i^{-1} \varphi_i(x,c)\} |\ d \in \mathcal{D}\}. \tag{3.6}$$

Данные обозначения корректны, так как за счет непрерывности $X(\cdot)$ по Хаусдорфу min достигается.

Утверждение 2 [17]. *Если множества $\Phi_{\leq}[\{c\}]$ выпуклы $\forall c \in C$, то $\Phi_{\leq}[C] = \Phi_{\leq}[\widehat{C}]$, т.е. $\Phi^* = \operatorname{Max} \Phi_{\leq}[\widehat{C}]$.*

В общем (не обязательно выпуклом) случае множество наихудших для 1-го игрока стратегий противника может быть параметризовано с помощью (3.6), где использована обратная логическая свертка, как и для параметризации значения векторного минимакса в разд. 3.1. Заметим, что для формирования множества наихудших воздействий не требуется знания всех реализаций минимума по c, достаточно лишь по одной для каждого значения параметра.

Утверждение 3 [17]. *Справедливо равенство $\Phi_{\leq}[C] = \Phi_{\leq}[C^*]$, т.е. $\Phi^* = \operatorname{Max} \Phi_{\leq}[C^*]$.*

нее в [12], о возможности использования метода сверток для описания минимизирующих стратегий в векторном минимаксе. При этом разные свертки приводят к, вообще говоря, различным множествам ($\widehat{C}$ и C^*), и можно говорить, что та свертка лучше, которая дает меньшее множество.

Утверждение 4 [23]. *В выпуклом случае множество C^* является подмножеством множества $\widehat{C}$. Обратное включение, вообще говоря, неверно.*

Утверждение 5 [17]. *Пусть*
1) $\varphi_i(x,c) \equiv z_i$, $1 \le i \le q$ $(q = m)$,
2) $\forall c \in C$ многогранник $Z(c)$ можно считать заданным в m-мерном пространстве линейными ограничениями-неравенствами "$\le$" с неотрицательными коэффициентами и ограничением $z \ge 0$,
3) из них в любой точке $z \in \bigcap\limits_{c \in C} Z(c)$ активными являются не более m ограничений,
4) $\bigcap\limits_{c \in C} Z(c)$ — m-мерный многогранник.
Тогда, если Max *в* (2.4) *понимается в смысле Слейтера, то*
$\forall c^* \in C^*$ *выполнено* $\Phi^* \ne \mathrm{Max}\,\Phi[C^* \setminus \{c^*\}]$.

Таким образом, для задачи анализа уязвимости МП-сетей множество C^* в общем положении (3-е и 4-е условия утв. 5) оказывается минимальным по включению среди всех C', удовлетворяющих (3.5). (Напомним, что речь идет о задаче с фиксированным γ, от значения которого C^* естественно зависит. К сожалению, исследование этой зависимости представляет собой на данный момент не решенную проблему.)

Перепишем (3.6) для случая (2.1), получим

$$C^* = \{c^*(d) = \arg\min_{c \in C}\{\max_{x \in X(c)} \min_{i \in M(d)} \frac{z_i}{d_i}\} \mid d \in \mathcal{D}\}, \tag{3.7}$$

т.е. построение C^* предполагает решение параметрического семейства задач (1.4), или (1.6), с $d \in \mathcal{D}$. Тем самым, в задаче описания наихудших стратегий противника (при анализе уязвимости МП-сети) параметрический и многокритериальный подходы тоже приводят к одинаковым решениям.

Как указано в разд. 1, внешний минимум в (3.7) достигается в угловых точках множества C, т.е. $C^* \subseteq \mathrm{corn}C$. Значит, стратегии, реализующие минимум в многокритериальном минимаксе, также достаточно искать среди угловых точек C. Методы поиска C^*, Z^*, Z'^* будут обсуждаться далее.

анализа уязвимости.

4.1. Сведение линейной задачи поиска векторного минимакса к многокритериальной задаче на максимум. Задача (2.1) анализа уязвимости является линейной многокритериальной задачей на минимакс. Для таких задач удается [23] обобщить теорему Гермейера о сведении минимаксной задачи к оптимизационной, но большой размерности [2]. Применим этот результат к рассматриваемой постановке.

Пусть $\mathrm{corn} C = \{c^1, \ldots, c^t\}$. Тогда из предыдущего следует, что

$$\operatorname*{Min}_{c \in C} \operatorname*{Max}_{x \in X(c)} z = \operatorname*{Min}_{c \in \{c^1, \ldots, c^t\}} \operatorname*{Max}_{x \in X(c)} z = \operatorname*{Min}_{c \in \{c^1, \ldots, c^t\}} .$$

Теперь, вводя t-кратное дублирование переменных, освободимся от минимума. Получим линейную многокритериальную задачу поиска

$$Z^* = \operatorname*{Max}_{f^1, \ldots, f^t,\ z^1, \ldots, z^t,\ z} z \tag{4.1}$$

при ограничениях

$$(\mathbf{f}^s, z^s) \in X(c^s), \quad z^s \geq z \quad \forall s = 1, 2, \ldots, t.$$

(В случае (3.2), когда надо для вычисления (2.1) искать Z'^*, придем к похожей формуле для Z'^C.)

Число ограничений и переменных в (4.1) пропорционально числу угловых точек множества C, т.е., вообще говоря, экспоненциально. Тем не менее, для маленьких (модельных) сетей эта формула позволяет исследовать их уязвимость путем применения известных методов векторной оптимизации [24, 25, 26], в том числе, описанных в [5]. В следующих разделах использование ОЛС даст возможность построения прямых методов решения (2.1), что представляется более предпочтительным для задач большей (но все-таки небольшой) размерности. Напомним, что для сетей реальной размерности нет алгоритмов решения даже однокритериальной постановки (1.6) потоковой задачи анализа уязвимости.

4.2. Аппроксимация значения векторного минимакса с помощью ОЛС. Рассмотрим снова общую задачу (2.3). В [27] показано, как можно получить аппроксимацию множества Φ^* в метрике Хаусдорфа, т.е. построить такой конечный набор точек из Φ^*, от которого все точки Φ^* расположены не дальше, чем на ε. Соответствующее множество называется ε-сетью в Φ^*.

Изложим результаты [27] в предположении выпуклости $\Phi_{\leq}[C]$. Введем

$$\theta(d) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\psi \in \Phi_{\leq}[C]} \min_{i:\ d_i \neq 0} d_i^{-1} \psi_i,$$

$$\psi\in\Phi_{\le}[C]\; i:\ d_i\neq 0$$

$$d_i^{-1}\psi_i(d) = const\ \forall i:\ d_i \neq 0,\ \psi_i(d) = 0\ \forall i:\ d_i = 0.$$

Утверждение 6 [27]. *Справедливы равенства*

$$\psi(d) = \theta(d)d, \quad \theta(d) = \min_{c\in C}\max_{x\in X(c)}\min_{i:\ d_i\neq 0} d_i^{-1}\varphi_i(x,c) \tag{4.2}$$

и для задачи (2.1) $\theta(d) = \theta_0^*(d)$.

Утверждение 7 [27]. *При* $M_0^* = \emptyset$ *отображение* $\psi(d)$ *непрерывно в любой точке множества* $\mathcal{D}$.

Утверждение 8 [27]. *Пусть* Max *в* (2.2) *понимается по Слейтеру и* $M_0^* = \emptyset$. *Тогда для любого* $\epsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для любой* δ*-сети* $\mathcal{D}_\delta \subset \mathcal{D}$ *множество* $\bigcup\limits_{d\in\mathcal{D}_\delta}\psi(d)$ *образует* ϵ*-сеть в* Φ^*.

Таким образом, выбрав подходящее δ, мы можем получить аппроксимацию множества Φ^*, но для этого придется решать достаточно много задач типа (1.6), для которых не известно эффективных алгоритмов. Так что актуальным является сокращение их числа.

4.3. Сокращение перебора при аппроксимации слейтеровского значения векторного минимакса с помощью ОЛС. Далее предполагаем линейность критериев φ_i по x и по c, как в задаче (2.1). В таком случае $\Phi_{\le}[C]$ является многогранником, и формально для аппроксимации множества Φ^* его эффективных или полуэффективных точек можно использовать все результаты [5] и [18]. Трудность однако в том, что в задаче анализа уязвимости исходный многогранник $\Phi_{\le}[C]$ не задан в явном виде и найти его ненамного проще, чем найти Φ^*. Поэтому методы, предложенные ранее для сокращения перебора с помощью ОЛС в многокритериальной оптимизации, нуждаются в обобщении на минимаксный случай. Следуя [27], приведем требуемое обоснование для слейтеровской постановки, т.е. покажем как можно получать точки $\psi(d)$, не решая соответствующих задач (1.4), а по вычисленным ранее значениям.

Пусть в ряде узлов $d^1,\dots,d^s$ некоторой δ-сети на $\mathcal{D}^q$ построены $\psi(d^l)$ и найдены $\theta(d^l)$ (4.2) для $l = 1,\dots,s \le q$. Для любого $\lambda \in \mathcal{D}^s$ определим

$$\begin{gathered}d(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=1}^{s}\lambda_l d^l,\ \ \overline{\theta}(\lambda, d(\lambda)) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\sum_{l=1}^{s}\lambda_l/\theta(d^l)\Big)^{-1},\ \ \overline{\psi}(\lambda, d(\lambda)) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\theta}(\lambda, d(\lambda))d(\lambda) = \\ = \Big(\sum_{l=1}^{s}\lambda_l/\theta(d^l)\Big)^{-1}\sum_{l=1}^{s}\lambda_l d^l.\end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\theta(d(\lambda^0)) = \overline{\theta}(\lambda^0, d(\lambda^0)), \quad \textit{т.е.} \;\; \theta(d(\lambda^0)) = \Big(\sum_{l=1}^{s} \lambda_l^0/\theta(d^l)\Big)^{-1}, \qquad (4.4)$$

то $\theta(d(\lambda)) = \overline{\theta}(\lambda, d(\lambda))$ *и* $\psi(d(\lambda)) = \overline{\psi}(\lambda, d(\lambda))$ *для всех* $\lambda \in \mathcal{D}^s$.

Итак, зная $\psi(d^l)$ для $l = 1, \ldots, s$, можно, при выполнении условия (4.4), получить $\psi(d)$ при любом $d \in conv\{d^1, \ldots, d^s\}$ по формуле (4.3).

Утверждение 10 [27]. *Существуют многогранники* $D_1^*, ..., D_S^*$, *такие что*

1) $\bigcup\limits_{j=1}^{S} D_j^* = \mathcal{D}^q$;

2) $\mathrm{dim} D_j^* = q - 1$;

3) относительные внутренности многогранников попарно не пересекаются: $\mathrm{ri} D_{j'}^* \bigcap \mathrm{ri} D_{j''}^* = \emptyset$ *для любых* $j' \neq j''$;

4) для любых $\{d^l\}_{l=1}^s \subset D_j^*$ *выполнено условие* (4.4) *при всех векторах* $\lambda^0 \in \mathcal{D}^s$, $\lambda^0 > 0$.

Утверждения 9 и 10 позволяют сократить число решаемых скалярных минимаксных задач при аппроксимации (с помощью утв. 8) слейтеровского множества Φ^* и применять алгоритмы, разработанные в [18]. Для аппроксимации Z^C, Z'^C, т.е. для решения задачи анализа уязвимости с фиксированным γ (как в многокритериальной, так и в параметрической постановках) применимы методы из [5] с соответствующей заменой условий (2.4),(2.5) [5] условиями (4.4). Естественно, работа этих методов для минимаксного случая потребует больше вычислительных ресурсов, чем в отсутствие неопределенного фактора, не только за счет увеличения времени решения скалярных задач, но и за счет роста числа итераций — дроблений многогранников, примерно пропорционального числу угловых точек C. Еще раз подчеркнем, что вопрос о решении параметрического семейства задач (4) с $\gamma \in (0, 1)$ является открытым и для проведения анализа уязвимости сети придется строить аппроксимации Z^{C}, Z'^{C} для каждого γ из заданного набора параметров.

4.4. О выделении паретовских граней значения векторного минимакса. Из справедливости (4.4) с учетом кусочной линейности Φ^* вытекает, что все точки $\psi(d^1), \ldots, \psi(d^s)$ принадлежат одной слейтеровской грани множества $\Phi_{\leq}[C]$, а значит, одной и той же слейтеровской грани некоторого $\Phi_{\leq}[\{c\}]$, $c \in C^*$. На этом основано утв. 9 аналогично утв. 4 из [5]. Утв. 10 базируется на конечности числа таких граней и является аналогом утв. 5 из [5]. Однако паретовские грани в задаче (2.1),(2.3) окажутся, вполне возможно, частями не паретовских, а результате для их поиска надо знать $\Phi_{\leq}[C]$, либо их надо искать апостериорно — после построения всех слейтеровских граней. Ни то, ни другое не представляется рациональным способом. Не удается применить утв. 4 из [5] в полном объеме, поскольку нет прямого метода вычисления паретовских точек множества $\Phi_{\leq}[C]$. Так что, к сожалению, вопрос об алгоритмическом выделении паретовских граней многогранника $\Phi_{\leq}[C]$ остается не только вопросом размерности. В настоящее время авторы могут предложить фактически лишь двухэтапную процедуру его решения.

Ограничимся, для простоты изложения, задачей (2.1) в случае $M_0^* = \emptyset$, т.е. когда (3.2) не выполнено. Возьмем за основу алгоритм 2 из [5], использующий метод адаптивного дробления. Построим с его помощью разбиение $\mathcal{D}$ на многогранники D_j^*, $j = 1, 2, \ldots, S$, фигурирующие в утв. 10 (и одновременно являющиеся многогранниками линейности функции $1/\theta_0^*(d)$ на $\mathcal{D}$). Для этого при вычислении $\tau_1(d^0, \lambda^t)$ будем отслеживать участки линейности функции $1/\theta_0^*(d)$ вместо $1/\theta_0(d)$, $\sigma(d)/\theta_0(d)$, опираясь на результаты [28] (в частности, на утв. 3.11 из [28] о выпуклости и кусочной линейности $1/\theta_0^*(d)$ по d). В остальном алгоритм остается без изменения.

По построенному разбиению найдем все максимальные слейтеровские грани Z^j множества $Z[C] = \bigcap\limits_{c \in C} Z(c)$ как $Z^j = \bigcup\limits_{d \in D_j^*} \theta_0^*(d) d$, $j = 1, 2, \ldots, S$. Каждая Z^j характеризуется некоторым c^{*j}, реализующим минимум в (3.6) и таким, что $\forall d \in D_j^* \;\; \exists c^*(d)$: $c^{*j} = c^*(d)$. Для того, чтобы выяснить, является ли Z^j частью паретовской грани множества $Z(c^{*j})$, т.е. будет ли Z^j паретовской гранью множества $Z[C]$, достаточно проверить равенство

$$M_0(c^{*j}, z^j / \sum_{i \in M} z_i^j) = M \qquad (4.5)$$

для некоторой $z^j \in \mathrm{ri} Z^j$.

Если Z^j оказалась частью непаретовской грани множества $Z(c^{*j})$, надо найти максимальные паретовские грани многогранника Z^j. Поскольку в процессе работы алгоритма 2 из [5] все грани были вычислены явно, то опять-таки можно взять точку z^{jk} из относительной внутренности очередной проверяемой грани Z^{jk} многогранника Z^j и для этой точки проверить равенство, аналогичное (4.5). Отметим, что проверку нужно проводить только, если смежный с Z^j по грани Z^{jk} многогранник Z^k тоже оказался непаретовской гранью $Z[C]$. Таким (не обязательно максимальных) выделяются все паретовские.

Указанная процедура предполагает поиск множеств M_0, что также непросто с вычислительной точки зрения (может потребовать решения $|M_0|$ задач линейного программирования — см. в [7]). Поэтому предложенный в разд. 4.1 метод способен привести к более успешным алгоритмам в том случае, когда важным является именно поиск всех паретовских граней в задаче (2.1), а не решение параметрического семейства задач (1.4). В паретовском смысле многокритериальная постановка задачи анализа уязвимости оказывается сложнее параметрической с точки зрения практического счета.

1. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. I. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.2

2. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

3. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.

4. *Карзанов А.В.* Комбинаторные способы решения разрезных задач о мультипотоках // Комбинаторные методы в потоковых задачах. Вып.3. М.: ВНИИСИ, 1979.

5. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М., Смирнов М.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. III. Многокритериальная, или параметрическая, постановка для неизвестных требований // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.4.

6. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. V. Задачи и методы исследования допустимости в условиях случайной пропускной способности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. N.1

7. *Давидсон М.Р., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. II. Свойства суперконкурентного распределения потоков // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.3.

8. *Matula D.W.* Concurrent flow and concurrent connectivity in graphs // Graph Theory and Its Appl. to Algorithms and Comput. Sci. N.Y.: Wiley-Intersci., 1985.

9. *Воробейчикова О.А., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Одна игра типа Γ_1 с вектор-функцией выигрыша // Сборник трудов 1-й Московской международной конференции по исследованию операций. М.: ВЦ РАН 1996.

10. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

11. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

вимости многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1989.

13. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Векторный минимакс со связанными ограничениями // Вестн. МГУ. Вычисл. матем. и кибернетика, 1996. N.4.

14. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Метод сверток в задаче поиска векторного максимина // Вестн. МГУ. Вычисл. матем. и кибернетика, 1998. N.1.

15. *Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е.* Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Мецниереба, 1996.

16. *Zhukovskiy, V.I., Salukvadze, M.E.* The vector-valued maximin. N.Y.: Academic Press, 1994.

17. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Параметризация значения векторного минимакса со связанными ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1997. Т.37. N.12.

18. *Смирнов М.М.* Методы аппроксимации граней множества Парето в линейной многокритериальной задаче // Вестн. МГУ. Вычисл. матем. и кибернетика, 1996. N.3. С.37–43.

19. *Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н.* Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М.: Наука, 1986.

20. *Лочмелис Я.Я.* Многокритериальные задачи оптимизации сетей связи // Радиоэлектроника и электросвязь. / Исслед. по электродинамике и теории цепей. Рига, 1981.

21. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Многокритериальный и максиминный анализ многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1988.

22. *Меламед И.И., Сигал И.Х.* Теория и алгоритмы решения многокритериальных задач комбинаторной оптимизации. М.: ВЦ РАН, 1996.

23. *Воробейчикова О.А.* Векторный минимакс со связанными ограничениями: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, ф.ВМиК, 1998.

24. *Лотов А.В.* Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука, 1984.

максных и многокритериальных задач: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1984.

26. *Штоер Р.* Многокритериальная оптимизация. М.: Радио и связь, 1992.

27. *Воробейчикова О.А.* Аппроксимация векторного минимакса со связанными ограничениями // Вестн. МГУ. Вычисл. матем. и кибернетика, 1998. N.2. С. 29–31.

28. *Смирнов М.М.* Методы аппроксимации множества Парето, основанные на обратной логической свертке, и их использование в сетевой оптимизации: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, ф.ВМиК, 1996.