Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности

Свойства суперконкурентного распределения потоков [1]

©1998 г. **М.Р.Давидсон, Ю.Е.Малашенко, Н.М.Новикова**
Москва, ВЦ РАН

Поступила в редакцию 21.04.97 г.

Рассматривается задача выбора рационального распределения потоков в многопродуктовых потоковых сетях, не удовлетворяющих условию допустимости. В качестве решения предложено суперконкурентное распределение потоков, являющееся дальнейшим развитием идеи конкурентного распределения. Исследована его устойчивость по отношению к небольшим изменениям количественных параметров сети. Предложены численные методы поиска суперконкурентного распределения.

Введение. Предлагаемая статья является продолжением [1], посвященной применению общей методологии исследования операций [2] для анализа допустимости многопродуктовых потоковых сетей (МП-сетей) [3, 4] с учетом неопределенности. В [1] были даны обобщенные постановки задачи о допустимости и указаны возможности их решения. Причем за основу взято понятие конкурентного распределения потоков в сети [5, 6] — максимизирующего уровень обеспеченности требований тяготеющих пар (продуктов). Настоящая работа посвящена проблеме анализа МП-сетей в случае недопустимости, когда невозможно обеспечить требования на передачу потоков тяготеющих пар.

Подчеркнем, что МП-сеть служит математической моделью реальных территориально-распределенных систем, имеющих сетевую структуру и объединяющих многих пользователей. Для таких систем существенны вопросы, связанные с принятием решений по использованию имеющихся сетевых ресурсов, их распределением между пользователями, т.е. с анализом возможностей улучшения работы сети за счет рационального перераспределения потоков. В условиях дефицита ресурсов сети возникают и отказы, и потери, и задержки, и ухудшение качества связи, причем, зачастую, не равномерно, а для одних и тех же пользователей. Если принять во внимание, что оконечные пользователи большой сетевой системы агрегированы, это — не отдельные лица, а целые коллективы или группы населения, то проблема недискриминирования пользователей в любых условиях выходит на первый план. Кроме того, уже сам факт, что с территориально-распределенной

[1] Работа поддержана РФФИ по гранту N.95-01-00232

цедуре принятия решений повышенные требования ответственности.

Проблема выбора приемлемого распределения потоков в случае недопустимости многопродуктовой сети, т.е. невозможности удовлетворить всем требованиям пользователей, нередко возникает при наличии неопределенности: либо требования пользователей оказываются далекими от ожиданий проектировщиков первичной сети связи, либо пропускная способность ребер физического графа МП-сети отличается от расчетной, например, в результате повреждений сети (см. [7, 8]). В обоих случаях ресурсов сети может сильно недоставать для обеспечения требований пользователей и вопрос о конкуренции или компромиссе между ними в условиях дефицита становится весьма актуальным. Здесь надо искать решение, не только не дискриминирующее никого из пользователей, но и использующее все ресурсы сети, пока они могут пригодиться хотя бы одной абонентской паре.

Распространенный в литературе вариант максимизации суммарного потока по сети не соответствует первому пожеланию. Произвольно взятое конкурентное распределение потоков, вообще говоря, не отвечает последнему условию, поскольку невозможность обеспечить требования одной тяготеющей пары (например, ребро соединения которой вышло из строя) не способствует стремлению удовлетворить требованиям остальных. Тем не менее, сама структура (физический граф) сети ставит ее пользователей в неравные условия, учет которых позволяет выбрать из конкурентных распределений потоков максимально обеспечивающее требования всех тяготеющих пар без дискриминации какой-либо из них. Такое распределение потоков было впервые предложено в работе [9] и названо *нормативным* (требования пользователей трактуются как нормативы, которые должны обеспечиваться). Мы далее будем называть его *суперконкурентным*, чтобы подчеркнуть не только формальную, но и более глубокую сущностную связь с конкурентным.

Суперконкурентное (нормативное) распределение потоков рекурсивно определяется в разделе 2. Будет показано, что оно является таким решением задачи распределения потоков в сети, которое не дает возможности одним тяготеющим парам улучшить обеспеченность своих требований за счет других, менее обеспеченных, и кроме того, использует все способы увеличения обеспеченности требований тяготеющих пар за счет ресурсов сети. В разделах 3 и 4 исследована его зависимость от исходных данных и обоснована устойчивость по отношению к небольшим изменениям вектора требований пользователей и пропускной перконкурентного решения.

1. Основные сведения. В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения и понятия из [1], относящиеся к модели "МП-сеть".

Основной характеристикой допустимости МП-сети служит *уровень максиминной обеспеченности требований* :

$$\theta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(\mathbf{f},z)\in X(c)} \min_{i\in M} \frac{z_i}{d_i}, \tag{1.1}$$

где $c=(c_1,\ldots,c_e)$ — вектор пропускной способности ребер графа сети,
$d=(d_1,\ldots,d_m)$ — вектор требований тяготеющих пар (продуктов),
$M=(1,2,\ldots,m)$ — множество индексов i тяготеющих пар,
$X(c)$ — многогранник распределений потоков $\mathbf{f}=\{f_{ij}\}$ и мультипотоков (величин потоков) $z=(z_1,\ldots,z_m)$, достижимых в МП-сети, т.е. удовлетворяющих условию неразрывности потоков и ограничениям по пропускной способности ребер

$$\sum_{i=1}^{m}(f_{ik}+f_{i(k+e)}) \le c_k \quad \forall k=1,2,\ldots,e. \tag{1.2}$$

Распределение потоков, реализующее θ_0, называется *конкурентным* [5].

Критерий допустимости МП-сети дается условием $\theta_0 \ge 1$, которое гарантирует существование допустимого распределения потоков, т.е. такого, что соответствующий вектор мультипотока будет не меньше вектора заданных требований. При этом конкурентное распределение потоков очевидно будет допустимым.

В случае недопустимости МП-сети ($\theta_0 < 1$) основной недостаток концепции конкурентного распределения как решения задачи о рациональном распределении потоков состоит в следующем. Множество конкурентных распределений является слишком широким и содержит "уравнительные" распределения потоков, при которых всем тяготеющим парам обеспечивается θ_0-я часть их требований, тогда как многие могли быть обеспечены целиком. Пропускная способность ребер для таких распределений также недоиспользуется. К сожалению, известные численные методы находят одно произвольное (и обычно, нелучшее) решение. Вопрос о том, какие распределения потоков из всего множества конкурентных распределений считать наиболее приемлемыми для недопустимых МП-сетей, будет рассматриваться далее.

Обозначим через $X_0(c,d)$ множество конкурентных распределений потоков $\mathbf{f}^0(d)$ вместе с соответствующими мультипотоками $z^0(d)$ — векторами значений потоков тяготеющих пар,

$$X_0(c,d) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Arg} \max_{(\mathbf{f},z)\in X(c)} \{\min_{i\in M} \frac{z_i}{d_i}\} = \{(\mathbf{f}^0(d), z^0(d)) \in X(c) |\ \min_{i\in M} \frac{z_i^0(d)}{d_i} = \theta_0\}.$$

Введем обозначение $M_0 = M_0(d)$ для индексов i тех тяготеющих пар, которым нельзя увеличить поток выше $z_i^0(d)$, не понизив при этом обеспеченность требований какой-либо тяготеющей пары ниже величины θ_0 максиминной обеспеченности требований в МП-сети:

$$M_0 = M_0(d) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in M |\ \frac{z_i^0(d)}{d_i} = \theta_0 \ \ \forall\ (\mathbf{f}^0(d), z^0(d)) \in X_0(c,d)\}. \qquad (2.1)$$

Очевидно, что для любого конкурентного распределения потоков $\mathbf{f}^0(d)$ и соответствующего ему конкурентного мультипотока $z^0(d)$ существует свое множество тяготеющих пар, обеспеченность требований которых находится на уровне θ_0,

$$\widehat{M}(\mathbf{f}^0(d), z^0(d)) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in M |\ \frac{z_i^0(d)}{d_i} = \theta_0\}, \quad (\mathbf{f}^0(d), z^0(d)) \in X_0(c,d),$$

в частности, среди конкурентных содержатся и уравнительные распределения $\hat{\mathbf{f}}^0(d)$, для которых $\widehat{M}(\hat{\mathbf{f}}^0(d), \hat{z}^0(d)) = M$ — все тяготеющие пары остаются на уровне максиминной обеспеченности требований. Множество M_0 ищется как наименьшее по включению из $\widehat{M}(\mathbf{f}^0(d), z^0(d))$ для конкурентных распределений потоков и оказывается, что оно равно пересечению всех этих множеств:

$$M_0 = \bigcap \{\widehat{M}(\mathbf{f}^0(d), z^0(d)) |\ (\mathbf{f}^0(d), z^0(d)) \in X_0(c,d)\}.$$

Указанный результат (о непустоте пересечения всех $\widehat{M}$ и о существовании таких $(\tilde{\mathbf{f}}^0(d), \tilde{z}^0(d)) \in X_0(c,d)$, для которых $\widehat{M}(\tilde{\mathbf{f}}^0(d), \tilde{z}^0(d)) = M_0$) вытекает из линейности задачи и формально доказан в [7]. На его основе и было выбрано для M_0 определение (2.1), данное выше.

Тяготеющие пары с индексами i из M_0 будем называть имеющими 0-й уровень максиминной обеспеченности требований, подразумевая под этим уровнем значение θ_0. Индексы из M_0 назовем информационными направлениями 0-го уровня.

Теперь мы можем ввести определение *сверхконкурентного* распределения потоков $\mathbf{f}^1(d)$ как такого конкурентного распределения потоков, которое является конкурентным не только на 0-м, но и на более сокий уровень) максиминной обеспеченности требований. А именно, предположим, что $M_0 \neq M$, и рассмотрим задачу поиска 1-го уровня максиминной обеспеченности требований в МП-сети:

$$\theta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(\mathbf{f}^0(d), z^0(d)) \in X_0(c,d)} \min_{i \in M \setminus M_0} \frac{z_i^0(d)}{d_i}. \tag{2.2}$$

Обозначим аналогично $X_0(c,d)$

$$X_1(c,d) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Arg} \max_{(\mathbf{f}^0(d), z^0(d)) \in X_0(c,d)} \{ \min_{i \in M \setminus M_0} \frac{z_i^0(d)}{d_i} \} = \tag{2.3}$$

$$= \{(\mathbf{f}^1(d), z^1(d)) \in X(c) | \min_{i \in M \setminus M_0} \frac{z_i^1(d)}{d_i} = \theta_1 \text{ и } \frac{z_{i_0}^1(d)}{d_{i_0}} = \theta_0 \ \ \forall i_0 \in M_0\} -$$

множество сверхконкурентных распределений потоков и мультипотоков. Введем множество информационных направлений 1-го уровня максиминной обеспеченности требований

$$M_1 = M_1(d) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in M \setminus M_0 | \frac{z_i^1(d)}{d_i} = \theta_1 \ \ \forall \, (\mathbf{f}^1(d), z^1(d)) \in X_1(c,d)\} \tag{2.4}$$

как множество индексов таких тяготеющих пар, для которых невозможно увеличить поток в МП-сети, не понизив при этом обеспеченность требований какой-либо тяготеющей пары ниже достигнутого ею уровня максиминной обеспеченности требований, т.е. ниже θ_0 — для информационных направлений из M_0 (0-го уровня) — или ниже θ_1 — для информационных направлений из $M \setminus M_0$ (остальных уровней).

Отметим, что достаточно большие сетевые системы имеют, как правило, несколько "узких мест" — ребер, пропускная способность которых не позволяет увеличить поток, — различных для разных тяготеющих пар (подробнее о множествах этих ребер, называемых максиминными рассечениями МП-сети, см. в [10, 11, 8]; о максиминных рассечениях 0-го уровня, называемых *минимальными или "разреженными" многопродуктовыми разрезами*, см. также в [12, 13, 14, 15]). Так что в произвольно взятой МП-сети скорей всего будет несколько уровней максиминной обеспеченности требований и множество всех информационных направлений не исчерпается $M_0 \cup M_1$. Поэтому имеет смысл продолжить отбор лучших и среди сверхконкурентных распределений потоков, рассмотрев сверх-сверхконкурентные распределения, т.е. те, которые учитывают конкуренцию между тяготеющими парами не только за достижение 0-го и 1-го уровней максиминной обеспеченности требований (за пропускную способность ребер 0-го и 1-го рассмотрение в общем виде.

Пусть определены значения $\theta_0, \dots, \theta_l$ уровней максиминной обеспеченности требований тяготеющих пар в МП-сети (от 0-го до l-го, $l \geq 1$) и множества $M_0, \dots, M_l$ индексов тяготеющих пар, имеющих соответствующие уровни максиминной обеспеченности требований, а также введено множество $X_l(c,d)$ l-сверхконкурентных распределений потоков и мультипотоков $(\mathbf{f}^l(d), z^l(d))$. Предположим, что $M_0 \cup \ldots \cup M_l \neq M$, т.е. в сети еще остались тяготеющие пары, которым ресурсы МП-сети позволяют увеличить обеспеченность их требований без дискриминации остальных пользователей. Тогда определим аналогично (2.2)–(2.4) $(l+1)$*-й уровень максиминной обеспеченности требований*

$$\theta_{l+1} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(\mathbf{f}^l(d), z^l(d)) \in X_l(c,d)} \min_{i \in M \setminus \bigcup_{j=0}^{l} M_j} \frac{z_i^l(d)}{d_i}, \tag{2.5}$$

множество реализаций максимума в (2.5) — множество $(l+1)$-сверхконкурентных распределений потоков и мультипотоков $(\mathbf{f}^{l+1}(d), z^{l+1}(d))$ —

$$X_{l+1}(c,d) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Arg} \max_{(\mathbf{f}_i^l(d), z_i^l(d)) \in X_l(c,d)} \{ \min_{i \in M \setminus \bigcup_{j=0}^{l} M_j} \frac{z_i^l(d)}{d_i} \} = \tag{2.6}$$

$$= \{ (\mathbf{f}^{l+1}(d), z^{l+1}(d)) \in X(c) | \min_{i \in M \setminus \bigcup_{j=0}^{l} M_j} \frac{z_i^{l+1}(d)}{d_i} = \theta_{l+1} \text{ и } \frac{z_{i_j}^{l+1}(d)}{d_{i_j}} = \theta_j$$
$$\forall i_j \in M_j \ \ \forall j = 0, 1, \dots, l \},$$

а также множество информационных направлений $(l+1)$-го уровня (индексов тяготеющих пар, имеющих $(l+1)$-й уровень) максиминной обеспеченности требований, т.е. таких, для которых невозможно увеличить соответствующую компоненту мультипотока, не уменьшая обеспеченность требований какой-либо тяготеющей пары ниже достигнутого ею или же $(l+1)$-го уровня максиминной обеспеченности требований (ниже θ_j для информационных направлений из M_j, $j = 0, 1, \dots, l$, или ниже θ_{l+1} для остальных информационных направлений) $M_{l+1} = M_{l+1}(d) \stackrel{\text{def}}{=}$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \{ i \in M \setminus \bigcup_{j=0}^{l} M_j | \ \frac{z_i^{l+1}(d)}{d_i} = \theta_{l+1} \ \ \forall (\mathbf{f}^{l+1}(d), z^{l+1}(d)) \in X_{l+1}(c,d) \}. \tag{2.7}$$

Если множество тяготеющих пар все еще не исчерпано, то повторяем построения (2.5)–(2.7) при замене l на $l+1$ до тех пор, пока на последнем шаге $L = L(d)$ не получим $M_0 \cup \ldots \cup M_L = M$, т.е.

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \min\{ l \geq 0 | \ M_0 \bigcup \ldots \bigcup M_l = M \}.$$

Любое L-сверхконкурентное распределение потоков $\mathbf{f}^L(d)$ будем называть суперконкурентным. Всем суперконкурентным распределениям соответствует единственный суперконкурентный мультипоток $z^L(d)$ с компонентами

$$z_i^L(d) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \theta_0 d_i, & i \in M_0, \\ \theta_1 d_i, & i \in M_1, \\ \dots & \dots\dots\dots \\ \theta_L d_i, & i \in M_L. \end{cases}$$

Ни одна компонента вектора $z^L(d)$ не может быть увеличена в рамках $Z(c)$ без уменьшения потока какой-либо другой тяготеющей пары. Таким образом, суперконкурентный мультипоток $z^L(d)$ является парето-оптимальным (эффективным) вектором потоков, т.е. максимальным элементом множества $Z(c)$ достижимых мультипотоков (см. в [16, 2]), его нельзя увеличить за счет более полного использования имеющейся пропускной способности ребер сети, даже если часть из них осталась недозагруженной (остались нестрогие неравенства в (1.2) для некоторых $\mathbf{f}^L(d)$). Поэтому можно утверждать, что в целях обеспечения требований тяготеющих пар ресурсы МП-сети суперконкурентными распределениями потоков используются в полной мере.

Вектор $z^L(d)$ будет ближайшим к d мультипотоком из паретовской границы $Z(c)$ в метрике $\mathbf{L}_\infty(M)$. Такие векторы называются в [16] симметрично лексикографически оптимальными и предлагаются в качестве справедливого решения в теории коллективного выбора [17]. Симметрия в нашем случае соответствует равноправности пользователей — тяготеющих пар сети — относительно обеспечения их требований. Предположение равноправности или недискриминирования как раз и лежит в основе концепции конкурентного распределения потоков (считается, что относительные “веса” абонентов учтены в векторе d требований абонентских пар). Таким образом, сохраняя все достоинства конкурентного распределения потоков, суперконкурентное распределение свободно от его недостатков. В частном случае $M_0 = M$ эти определения совпадают.

По аналогии с формулой (1.13) из [1] задача (2.5) может быть представлена в виде задачи линейного программирования (ЛП):

$$\theta_{l+1} = \max_{(\mathbf{f},z,\theta)} \{\theta |\ (\mathbf{f}, z) \in X(c), \quad z_{i_0} = \theta_0 d_{i_0}\ \forall i_0 \in M_0, \dots$$

$$\dots, z_{i_l} = \theta_l d_{i_l}\ \forall i_l \in M_l, \quad z_i \geq \theta d_i \quad \forall i \in M \setminus \bigcup_{j=0}^{l} M_j\}. \qquad (2.8)$$

дут рассмотрены в п.5. Отметим только, что обычно не требуется осуществлять поиск всех $\theta_0, \ldots, \theta_L$ — достаточно получить значение $\theta_l \geq 1$. Тогда соответствующее l-сверхконкурентное распределение потоков $\mathbf{f}^l(d)$ является безусловно приемлемым для тяготеющих пар с индексами из $M \setminus \bigcup_{j=0}^{l-1} M_j$, так как все их требования полностью обеспечены, а для остальных тяготеющих пар все равно нет оснований рассчитывать на увеличение потока, поскольку оно может быть проведено только за счет уменьшения потоков тяготеющих пар, имеющих никак не больший уровень обеспеченности требований, т.е. за счет дискриминирования других пользователей МП-сети.

Полученный в процессе определения $z^L(d)$ набор $(\theta_0, M_0, \ldots, \theta_L, M_L)$ дает достаточно информативную характеристику качества обслуживания пользователей МП-сети в целом — безотносительно к обеспеченности требований конкретных тяготеющих пар. Здесь удобно построить диаграмму типа представленной на рис.1. По вертикальной оси отложим значения θ_l, $l = 0, 1, \ldots, L$, а по горизонтальной — суммарные величины требований, которые могут быть обеспечены на уровне не выше l-го, приведенные к сумме всех требований пользователей МП-сети:

$$\mu_l \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in \bigcup_{j=0}^{l} M_j} d_i / \sum_{i \in M} d_i.$$

Точки $(\mu_0, \theta_0), (\mu_1, \theta_1), \ldots, (\mu_L, \theta_L)$ соединим между собой с помощью “ступенек”, как показано на рис.1. Получим ступенчатую функцию $\theta(\mu)$ — *диаграмму обеспеченности требований*. Любая точка (μ, θ) на диаграмме означает, что доля μ всех требований обеспечена не более, чем на $\theta \cdot 100\%$.

Рис.1.

Степень необеспеченности требований тяготеющих пар характеризуется тем, насколько ниже 1 проходит диаграмма обеспеченности требований. Площадь под функцией $\min\{1, \theta(\mu)\}$ равна той части всех тресуперконкурентном распределении потоков,

$$\chi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\theta_l \le 1} \theta_l \sum_{i_l \in M_l} d_{i_l} / \sum_{i \in M} d_i = \sum_{i \in M} \min\{z_i^L(d), d_i\} / \sum_{i \in M} d_i.$$

В частности, при $\theta_L \le 1$

$$\chi = \sum_{l=0}^{L} \theta_l \sum_{i_l \in M_l} d_{i_l} / \sum_{i \in M} d_i = \sum_{i \in M} z_i^L(d) / \sum_{i \in M} d_i.$$

Вообще говоря, вектор $z^L(d)$ не максимизирует суммарный поток всех тяготеющих пар в сети (иначе, он вполне мог бы оказаться дискриминационным для некоторых пользователей), хотя, будучи парето-оптимальным, суперконкурентный мультипоток максимизирует на $Z(c)$ взвешенную сумму значений потоков. Например, в случае $L = m$ в качестве весовых коэффициентов могут быть выбраны любые положительные числа, а при $L = 0$ ($M_0 = M$) многим разным d может соответствовать один и тот же вектор весовых коэффициентов — направляющий вектор той грани паретовской границы $Z(c)$, которой принадлежит $z^L(d)$.

Для дальнейшего полезно будет ввести отдельное обозначение $\eta_i = \eta_i(d) = \eta_i(c, d)$ для $z_i^L(d)/d_i$ — обеспеченности требований i-й тяготеющей пары при суперконкурентном распределении потоков —

$$\eta_i \stackrel{\text{def}}{=} \theta_l \quad \text{для} \quad i \in M_l. \tag{2.9}$$

Вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ описывает распределение тяготеющих пар по уровням обеспеченности требований, т.е. фактически характеризует положение каждой тяготеющей пары в сети (чем больше компонента η_i, тем лучше положение i-й пары по сравнению с другими тяготеющими парами). Естественно, это положение зависит от ее расположения в сети (структуры физического и логического графов), от вектора c пропускной способности и от требований d всех тяготеющих пар. Таким образом, вектор η можно считать решением задачи *нормативного анализа* МП-сети — анализа того, насколько сеть способна удовлетворить требованиям пользователей (трактуемым как заданные нормативы) при условии недискриминирования.

3. Оценки уровней максиминной обеспеченности в случае неточно известных требований. Предположим теперь, что, как и в задаче, рассмотренной в [1], вектор требований d известен лишь с точностью до множества $D \ni d$. Поскольку выбор приемлемого распределения потоков во всех исследуемых в [1] постановках осуществляется ходе решения задачи), то рекомендуется выбирать суперконкурентное для этого d распределение потоков по тем же причинам, что и в п.2. Значение 0-го уровня максиминной обеспеченности тяготеющих пар в МП-сети оценивается

$$\theta_0^c \stackrel{\text{def}}{=} \max_{d \in D} \theta_0(d) = \max_{\mathbf{f}, z, d, \theta} \{\theta | \ (\mathbf{f}, z) \in X(c), \ \theta d \leq z, \ d \in D\}$$

сверху и $\theta_0(d^{max})$ снизу, где

$$d^{max}: \quad d_i^{max} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{d \in D} d_i$$

(см. конец п.1.3 [1]). Однако, если желательно получить гарантированные (нижние) или в слабом смысле (верхние) оценки более высоких уровней максиминной обеспеченности требований, то необходимы дополнительные исследования. Даже для жестко гарантированной постановки (или для гарантированной при $d^{max} \in D$) [1] диаграмма $\theta(\mu)$ обеспеченности требований (см. рис.1 в п.2), построенная для вектора d^{max}, будет иметь, вообще говоря, лишь 1-ю ступеньку не выше, чем у аналогичных диаграмм, построенных $\forall d \in D$. По остальным значениям $\theta_l(d), \ l > 0$, величины $\theta_l(d^{max})$ могут не давать искомых нижних оценок

$$\theta_l^г \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{d \in D} \theta_l(d).$$

Заметим, что длины ступенек — μ_l — различны для разных d (как и множества $M_l(d) \ \forall l = 0, 1, \ldots, L(d)$, и числа $L(d)$), и что гарантируется только:

$$\forall i_0 \in M_0(d^{max}) \ \ \eta_{i_0}(d^{max}) \leq \eta_{i_0}(d) \leq \eta_i(d) \ \ \forall i \in M, \ \ \forall d \in D, \qquad (3.1)$$

при этом существуют примеры, когда $\theta_1(d^{max}) > \theta_1(d)$ для некоторых $d \leq d^{max}$. Действительно, $\forall d \in D$, $\forall i \in M \ \eta_i(d) \geq \theta_0(d) \geq \theta_0^г = \eta_{i_0}(d^{max})$ $\forall i_0 \in M_0(d^{max})$ — получаем (3.1), но если $M_0(d^{max}) \neq M$, то для $i \in M \setminus M_0(d^{max})$ возможно $\theta_0^г < \theta_0(d) < \eta_i(d) = \theta_1(d) < \theta_1(d^{max})$. Например, если рассмотреть сеть "треугольник" с рис.2, где физический и логический графы МП-сети совпадают, вектор пропускной способности $c = (10, 15, 20)$, а для вектора d имеется два варианта $d^{max} = (20, 20, 20)$ и $d^{min} = (20, 14, 20)$, то $M_0(d) = M_0(d^{max}) = \{1, 2\}$ (1-я и 2-я тяготеющие пары делят между собой 5 единиц пропускной способности на 2-м ребре из расчета $f_{12}/d_1 = f_{22}/d_2$, а 3-й тяготеющей паре остается 3-е ребро после прохождения той части потока 1-й пары, которую пропускают "в обход" по 2-му и 3-му ребру) и $\theta_0(d^{max}) = 0.625$, $\theta_1(d^{max}) = 0.875$, $\theta_0(d^{min}) > 0.735$, $\theta_1(d^{min}) < 0.766$.

Рис. 2.

Из этого примера МП-сети видно также, что нижняя грань $\theta_l(d)$ для $l > 0$ может на параллелепипиде D не достигаться. Действительно, если допустить, что 2-я компонента вектора d меняется от 10 до 20, то $\inf \theta_1(d) = 0.75$, но для вектора $\tilde{d} \stackrel{\text{def}}{=} (20, 13\frac{1}{3}, 20)$, к которому сходится минимизирующая последовательность, имеем $M_0(\tilde{d}) = M$, $\theta_0(\tilde{d}) = 0.75$, а уровень $\theta_1(\tilde{d})$ не определен (в МП-сетях более сложной структуры он мог бы равняться пределу значений 2-го уровня максиминной обеспеченности требований, превышающему 0.75, — см. пример для рис.3 в конце п.4).

Таким образом, только если $M_0(d^{max}) = M$, точная нижняя оценка диаграмм $\theta(\mu)$ обеспеченности требований дается единственной диаграммой, построенной для $d = d^{max}$. В остальных случаях может понадобиться столько диаграмм, сколько ступенек (т.е. до m), и значит, столько же разных векторов d, из диаграмм для которых строится искомая точная нижняя оценка — нижняя огибающая всех $\theta(\mu)$ $\forall d \in D$. (Если же не заботиться о точности оценки, то из (3.1) можно ограничиться горизонтальной прямой $\theta(\mu) \equiv \theta_0(d^{max})$.)

Аналогично обстоит дело и для слабой постановки при $l > 0$, когда ищем точные верхние оценки для $\theta_l(d)$ —

$$\theta_l^c \stackrel{\text{def}}{=} \max_{d \in D} \theta_l(d).$$

Хотя в случае $D \ni d^{min}$, где $d_i^{min} \stackrel{\text{def}}{=} \min\{d_i |\ d \in D\}$, выполнено $\theta_0^c = \theta_0(d^{min})$, однако вполне может оказаться, что $\theta_1^c = \theta_1(d^{max})$ (см. тот же пример на рис.2) или максимум в определении θ_1^c не достигается. Для подтверждения последнего результата достаточно для МП-сети с рис.2 положить $D = \{(30 - \tau, 15 - \tau/6, 30 - \tau) |\ \tau \in [0, 10]\}$, тогда $\theta_0(d)$ возрастает на D от 0.5 до 0.75, и $\theta_1(d)$ возрастает от 2/3 до почти 0.75, но максимизирующая последовательность сходится к указанному выше $\tilde{d}$ $(\tau = 10)$, на котором θ_1 переходит в θ_0 за счет расширения M_0.

максиминной обеспеченности требований, а о гарантированных, или наоборот, оптимистических оценках значений $\eta_i(d)$ (2.9) обеспеченности требований тяготеющих пар при суперконкурентном распределении потоков, т.е. искать

$$\eta_i^г \stackrel{\text{def}}{=} \min_{d\in D} \eta_i(d) \quad \text{или} \quad \eta_i^c \stackrel{\text{def}}{=} \max_{d\in D} \eta_i(d),$$

где $\eta_i(d) \stackrel{\text{def}}{=} z_i^{L(d)}(d)/d_i$ (см.(2.9)). Для компактных $D \not\ni 0$ оптимумы достигаются, как вытекает из результатов следующего раздела, где доказывается непрерывность (и липшицевость) функции $\eta(d)$. К сожалению, никаких численных методов поиска $\eta_i^г$ или η_i^c для $i \notin M_0$ авторам не известно. Еще раз подчеркнем, что для таких i оценки $\eta_i(d)$ не обязательно даются соответствующими экстремальными значениями d_i (в отличие от $i \in M_0$ — см. (1.19) в [1]).

4. Устойчивость суперконкурентного решения. В ряде сетевых задач с неточно известными требованиями множество D является достаточно узким — границы неопределенности для d можно считать пренебрежимо малыми. Тем не менее, для того, чтобы в этом случае рассматривать данную задачу как задачу с полной информированностью, необходимо обосновать устойчивость получаемого решения (как значений потоков для тяготеющих пар, так и приемлемых распределений потоков по ребрам физического графа МП-сети) по отношению к небольшим изменениям числовых параметров задачи. Соответствующее исследование для конкурентных и суперконкурентных распределений потоков и мультипотоков проводится в настоящем пункте. Для общности здесь будем предполагать, что и вектор c пропускной способности ребер графа сети может подвергаться малым возмущениям.

4.1. Устойчивость конкурентного распределения потоков. Для обоснования устойчивости суперконкурентного решения (распределения потоков и мультипотока) нам понадобится более детальное изучение устойчивости множества конкурентных распределений, а именно, доказательство устойчивости множества его крайних точек (поскольку поиск суперконкурентного решения представляет собой лексикографическую задачу ЛП и оптимум на каждом уровне лексикографии достигается в крайних точках) [18, 19, 20, 21]. Введем обозначение $E(\cdot)$ для множества крайних точек полиэдра в скобках, $E_{opt}(\cdot,\cdot)$ — для множества оптимальных крайних точек в ассоциируемой задаче ЛП (прямой — максимизации — или двойственной — минимизации) на данном множестве и с данным целевым вектором, которые указаны в

$$\max_{(\mathbf{f},z,\theta)\in\mathcal{Y}} \theta, \tag{4.1}$$

где через $\mathcal{Y}$ обозначено множество всех $(\mathbf{f}, z, \theta)$ таких, что $(\mathbf{f}, z) \in X(c)$, $-z_i + \theta d_i \le 0$, $i = 1, \dots, m$. Двойственная к (4.1) записывается (для соответствующего множества Λ) как

$$\min_{\lambda\in\Lambda}\langle c, \lambda\rangle, \tag{4.2}$$

и, очевидно, обе задачи (4.1), (4.2) разрешимы. Для обозначения возмущенных множеств, функций и задач будем помечать штрихом множество, функцию или номер задачи, в которых значение возмущаемого параметра заменено на возмущенное — помеченное штрихом. Справедливость следующих утверждений доказана в [19, 22, 23].

Предположим вначале, что возмущениям подвергается только вектор требований d, т.е. класс возмущений задается следующим образом $\mathcal{P}^d \stackrel{\text{def}}{=} \{d' \in \mathbf{R}^m_+ | (4.1)' \text{ разрешима}\}$. Обозначим через $\mathcal{L}$ произвольное полиэдральное множество такое, что из $(\mathbf{f}, z, \theta) \in \mathcal{L}$ следует, что $\theta \ge \alpha > 0$.

Теорема 1. *Пусть в задаче (4.1) в качестве допустимого множества взято $\mathcal{Y} \cap \mathcal{L}$. Тогда отображение $d' \mapsto E(\mathcal{Y}' \cap \mathcal{L})$ Липшиц-непрерывно на $\mathcal{P}^d$ в точке d.*

Отсюда следует, что отображение $d' \mapsto E_{opt}(\mathcal{Y}' \cap \mathcal{L},\ (0, \dots, 0, 1))$ Липшиц-полунепрерывно сверху на $\mathcal{P}^d$ в точке d.

Предположим теперь, что и правая часть может подвергаться возмущениям, т.е. класс возмущений определим как

$$\mathcal{P}' \stackrel{\text{def}}{=} \{(c', d') \in \mathbf{R}^e_+ \times \mathbf{R}^m_+ | (4.1)' \text{ разрешима}\}.$$

Теорема 2. *Многозначное отображение $(c', d') \mapsto E(\Lambda')$ Липшиц-непрерывно на $\mathcal{P}'$ в точке (c, d).*

Тогда отображение $(c', d') \mapsto E_{opt}(\Lambda', c')$ Липшиц-полунепрерывно сверху на $\mathcal{P}'$ в точке (c, d).

Следствие. *Многозначное отображение $(c', d') \mapsto E_{opt}(\mathcal{Y}',\ (0, \dots, 0, 1))$ Липшиц-полунепрерывно сверху на $\mathcal{P}'$ в точке (c, d).*

Полученная Липшиц-полунепрерывность сверху формально означает, что $\exists\delta > 0$, $\exists K = \text{const}$, $\forall(c', d') \in \mathcal{P}'$, $\rho\{(c', d'), (c, d)\} < \delta$, выполнено: $\forall x' \in E(X_0(c', d'))$

$$\rho\{(x', \theta_0'), E(X_0(c, d) \times \{\theta_0\})\} < K\rho\{(c', d'), (c, d)\}, \tag{4.3}$$

где $\theta_0' \stackrel{\text{def}}{=} \theta_0(c', d')$, $\rho\{\cdot, \cdot\}$ обозначает расстояние в евклидовом пространстве. Отсюда сразу получаем Липшиц-непрерывность отображения $(c', d') \mapsto \theta_0(c', d')$ на $\mathcal{P}'$ в точке (c, d).

дется $\Delta > 0$, для которого $d'_i > \Delta \ \forall i \in M$. Обозначим через $\mathcal{P}$ класс $(c', d') \in \mathcal{P}'$, удовлетворяющих указанному условию, а также условию конечности c'. Тогда $\forall (c, d) \in \mathcal{P}$ может быть выбрана общая константа Липшица K в (4.3) (см. доказательство теоремы 2 в [22, 23]). Таким образом, функция θ_0 оказывается липшицевой по (c, d) на $\mathcal{P}$ и также теорема 2 и ее следствия оказываются на $\mathcal{P}$ справедливыми равномерно по всем $(c, d) \in \mathcal{P}$.

Что касается множества $X_0(c, d)$ конкурентных решений $(\mathbf{f}^0, z^0)$, то из (4.3) вытекает, что при возмущении векторов c и d — пропускных способностей и требований — не возникнет крайних точек конкурентного множества, далеких от крайних точек конкурентного множества исходной задачи. Кроме того, из липшицевости θ_0 можно вывести также Липшиц-непрерывность множества $E(X_0(c, d))$, т.е. Липшиц-полунепрерывность сверху и снизу для отображения $(c', d') \mapsto E(X_0(c', d'))$, тем самым доказывая, что и вблизи любого крайнего конкурентного решения $(\mathbf{f}^0, z^0)$ исходной задачи найдется крайняя точка конкурентного множества возмущенной. Действительно, множество $X_0(c, d)$ можно представить в виде $\{(\mathbf{f}, z) \in X(c) | \ z_i \geq \theta_0(c, d) d_i, i = 1, \ldots, m\}$, когда возмущениям подвергается только правая часть линейной системы. С учетом липшицевости по (c, d) правой части получаем Липшиц-непрерывность по (c, d) множества крайних решений системы на основании его Липшиц-непрерывности по правой части (см., например, в [24, 23]).

В случае ограниченности $X(c)$, т.е. при $c < \infty$, полученная Липшиц-непрерывность $E(X_0(c, d))$ влечет за собой Липшиц-непрерывность множества $X_0(c, d)$ конкурентных решений. Так что это множество является устойчивым во всех смыслах.

4.2. Устойчивость суперконкурентных распределений потоков. Рассмотрим теперь сверх- и суперконкурентные решения. В [25] исследуется общая линейная лексикографическая задача и вводится определение устойчивости этой задачи по вектору критериев. Оно означает, что оптимальные значения всех частных критериев при малых возмущениях исходных данных будут меняться мало. В той же работе доказано, что задача устойчива тогда и только тогда, когда устойчива задача максимизации первого критерия и все множества оптимумов, соответствующие последующим критериям, совпадают. С помощью (2.8) последовательность задач (2.5)–(2.7), $l = 0, \ldots, L-1$, сводится к лексикографической последовательности задач ЛП. Таким образом, очевидно, что условие [25] является по крайней мере достаточ-

Однако, в контексте задачи (2.5)–(2.7) это условие означает равенство $M_0 = M$ и простейшие примеры показывают нереалистичность такого предположения.

В [26, 27] для общей лексикографической задачи с кусочно-линейными критериями предлагается метод регуляризации, но с вычислительной точки зрения эта процедура довольно трудоемка. Так что устойчивость (2.5)–(2.7), $l = 0, \ldots, L-1$, при $L > 0$ требует отдельного исследования, учитывающего специфику задачи. Эта специфика, в частности, связана с априорными ограничениями, налагаемыми на класс возмущений, в то время как утверждение [25] об устойчивости верно, когда каждый элемент матрицы ограничений, правой части и матрицы критериев подвергается произвольным возмущениям. В задаче (2.5)–(2.7) возмущениям могут подвергаться векторы c, d; остальные элементы — $\{0, +1, -1\}$ — определяют ее общую структуру (структуру графа сети), которая предполагается неизменной.

Для всех $(c', d') \in \mathcal{P}'$ возмущенную задачу (2.5)–(2.7) (с параметрами c', d') будем обозначать $(2.5)'$–$(2.7)'$. Информация, получаемая в процессе решения $(2.5)'$–$(2.7)'$, также будет зависеть от конкретного возмущения. Поэтому вместо $X(c)$, $X_j(c,d)$, M_j, θ_j $\forall j = 0, 1, \ldots, L$, для возмущенных задач введем обозначения X', X'_j, M'_j, θ'_j $\forall j = 0, 1, \ldots, L'$, где для L' выполнено: $M'_0 \cup \ldots \cup M'_{L'} = M$. Соответствующие величины суперконкурентной обеспеченности требований обозначим через $\eta'_i = \eta_i(c', d') = z_i'^{L'}(d')/d'_i$, $i \in M$.

Определение 1. Лексикографическая последовательность задач (2.5)–(2.7), $l = 0, \ldots, L-1$, устойчива по критериям, если величины η'_i обеспеченности требований тяготеющих пар МП-сети при суперконкурентном распределении потоков Липшиц-непрерывны на $\mathcal{P}$.

В силу задания класса $\mathcal{P}$ определение 1 эквивалентно липшицевости на $\mathcal{P}$ вектора $z'^{L'}$ суперконкурентного мультипотока.

Определение 2. Лексикографическая последовательность задач (2.5)–(2.7), $l = 0, \ldots, L-1$, устойчива по решению, если многозначное отображение

$$(c', d') \mapsto E(X'_{L'})$$

Липшиц-непрерывно на $\mathcal{P}'$ в точке (c, d) (и на $\mathcal{P}$ равномерно).

Как и для конкурентных решений (см. п.4.1), из устойчивости по критериям следует устойчивость по решению. Для доказательства достаточно представить множество суперконкурентных решений в виде

$$\{(\mathbf{f}, z) \in X(c) |\ z_i \geq \eta_i(c,d) d_i \quad \forall i = 1, \ldots, m\},$$

возмущаемые параметры входят лишь в правую часть, из чего выводим липшицевость множества суперконкурентных крайних точек на $\mathcal{P}$ (и на $\mathcal{P}$ равномерно).

Определение 3. Лексикографическая последовательность задач (2.5)–(2.7), $l = 0, \ldots, L-1$, устойчива, если многозначное отображение

$$(c', d') \mapsto X'_{L'}$$

Липшиц-непрерывно на $\mathcal{P}'$ в точке (c, d) (и на $\mathcal{P}$ равномерно).

Легко показать, что, если множества $X'_{L'}$ ограничены в совокупности на $\mathcal{P}'$, то устойчивость по решению (в смысле определения 2) влечет за собой устойчивость в смысле определения 3. Таким образом, устойчивость суперконкурентных решений во всех смыслах обосновывает

Теорема 3. *Лексикографическая последовательность задач (2.5)–(2.7), $l = 0, \ldots, L-1$, устойчива по критериям.*

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится ряд построений и утверждений, представляющих также самостоятельный интерес.

4.3. Обоснование устойчивости. Рассмотрим произвольное разбиение множеств $M_0, \ldots, M_L$ на непустые непересекающиеся подмножества $N_t \subseteq M$

$$M_0 = \bigcup_{t=0}^{n_0} N_t,\ M_1 = \bigcup_{t=n_0+1}^{n_0+n_1} N_t,\ \ldots,\ M_L = \bigcup_{t=n_0+\ldots+n_{L-1}+1}^{n_0+\ldots+n_L} N_t.$$

Выпишем последовательность задач ЛП:

$$\Theta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(\mathbf{f},z)\in\mathcal{X}_0} \theta\ (= \theta_0), \tag{4.4}$$

где $\mathcal{X}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{f}, z) \in X(c) |\ -z_i + \theta d_i \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$,

$$\Theta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(\mathbf{f},z)\in\mathcal{X}_1} \theta\ (= \theta_0 \text{ или } \theta_1), \tag{4.5}$$

где $\mathcal{X}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{f}, z) \in X(c) |\ \Theta_0 d_i - z_i = 0,\ i \in N_0,\ \theta d_i - z_i \leq 0,\ i \notin N_0\}$,

$$\Theta_{t+1} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(\mathbf{f},z)\in\mathcal{X}_t} \theta\ (= \theta_0 \text{ или } \theta_1 \text{ или } \ldots \text{ или } \theta_{t+1}), \tag{4.6}$$

где $\mathcal{X}_t \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{f}, z) \in X(c) |\ -z_i + \Theta_j d_i = 0,\ \ i \in N_j,\ j = 0, 1, \ldots, t,$
$-z_i + \theta d_i \leq 0,\ i \notin N_0 \cup \ldots \cup N_t\}$,
$t = 1, 2, \ldots, T \stackrel{\text{def}}{=} n_0 + \ldots + n_L - 1$.

Из формулировки задач (2.5)–(2.7), (4.4)–(4.6) легко вытекает *обеспеченности требований i-й тяготеющей пары η_i равно Θ_t, $\forall i \in M$.*

Из утверждения 1 следует, что множество оптимальных решений подзадачи (4.6) при $t = T$ совпадает с $X_L(c,d)$, т.е.

$$X_L(c,d) = \operatorname{Arg} \max_{(\mathbf{f},z)\in\mathcal{X}_T} \theta,$$

где $\mathcal{X}_T \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{f},z) \in X(c) | \ -z_i + \Theta_j d_i = 0,\ i \in N_j,\ j = 1,2,\ldots,T,\ -z_i + \theta d_i \leq 0,\ i \notin N_0 \cup \ldots \cup N_T\}$. Следовательно, задача (4.4)–(4.6) с $t = 1,2,\ldots,T$ эквивалентна (1.1), (2.5)–(2.7) с $l = 0,1,\ldots,L$.

В дальнейшем, любой такой набор $\{N_t\}_{t=1}^T$ будем называть *допустимым разбиением* в задаче (4.4)–(4.6).

В частности, рассмотрим в качестве N_0 произвольное непустое подмножество $\mathcal{N}_0$ индексов тех ограничений $-z_i + \theta d_i \leq 0$, которым соответствуют положительные компоненты некоторого вектора оптимального решения задачи, двойственной к (4.4) (этот вектор может быть получен в результате работы стандартной процедуры симплекс-метода). Из условия дополняющей нежесткости следует, что для всякой такой компоненты соответствующее ограничение будет выполняться как равенство для любого оптимального решения (4.4). Из структуры матрицы ограничений (4.4) следует, что $\mathcal{N}_0 \neq \emptyset$. Если $\Theta_1 > \Theta_0$, то $\mathcal{N}_0 = M_0$, иначе $\mathcal{N}_0 \subset M_0$. Определим множество $\mathcal{N}_1$ как произвольное непустое подмножество индексов тех ограничений $-z_i + \theta d_i \leq 0,\ i \notin \mathcal{N}_0$, которым соответствуют положительные компоненты некоторого вектора оптимального решения задачи, двойственной к (4.5), и положим в (4.6) $N_1 = \mathcal{N}_1$. Далее определим множество $\mathcal{N}_2$ как произвольное непустое подмножество индексов тех ограничений $-z_i + \theta d_i \leq 0,\ i \notin \mathcal{N}_0 \cup \mathcal{N}_1$, которым соответствуют положительные компоненты некоторого вектора оптимального решения задачи, двойственной к (4.6) с $t = 1$, положим в (4.6) $N_2 = \mathcal{N}_2$ и т.п. Для первого номера q, такого что $\Theta_q > \Theta_0$, получим $M_0 = \mathcal{N}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{N}_{q-1}$. Остальные M_l пересчитываются аналогично. Таким образом, последовательность $\mathcal{N}_0,\ \mathcal{N}_1,\ldots$ является допустимым разбиением.

Исследуем общую задачу поиска

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(\mathbf{f},z,\theta)\in W} \theta, \tag{4.7}$$

в которой W задается ограничениями $(\mathbf{f},z) \in X(c)$ и

$$\begin{array}{rcl} z_i & = & \xi_j d_i, \quad i \in Q_j,\ j = 0,1,\ldots,l, \\ -z_i + \theta d_i & \leq & 0, \quad i \notin Q_0 \cup \ldots \cup Q_l, \end{array}$$

трицательные числа, такие что $W \neq \emptyset$ и (4.7) имеет решение. Заметим, что в матрице ограничений задачи (4.7) возмущению подвергается единственный столбец, соответствующий переменной θ.

В дальнейшем задачи (4.4)–(4.6), (4.7), ограничения (1.2), множество W и допустимое множество Λ задачи, двойственной к (4.7), которые зависят от возмущенных параметров c', d', ξ'_j, обозначаются, соответственно, $(4.4)'$–$(4.6)'$, $(4.7)'$, $(1.2)'$, W', Λ' или с тем же верхним индексом, что и возмущенные параметры. Будем также считать, что компоненты векторов двойственных решений упорядочены таким образом, что первые m компонент соответствуют последней группе ограничений, определяющих W (или W'), причем для индексов $i \in M$, не входящих в эту группу, соответствующие двойственные переменные полагаем равными нулю.

Введем в рассмотрение вспомогательный класс возмущений $\mathcal{P}_l$ в задаче (4.7), считая, что числа ξ_j, $j = 0, 1, \ldots, l$, также могут подвергаться возмущениям, $\mathcal{P}_l \stackrel{\text{def}}{=} \{(c', d', (\xi'_0, \ldots, \xi'_l)) \in \mathbf{R}^e_+ \times \mathbf{R}^m_+ \times \mathbf{R}^l_+ |\ (4.7')$ разрешима$\}$. Относительно c и d пусть выполнено предположение строгой положительности.

Лемма 1 [19, 22]. *Для задачи (4.7) выполнено достаточное условие Липшиц-непрерывности ξ и Липшиц-полунепрерывности сверху многозначного отображения*

$$(c', d', (\xi'_0, \ldots, \xi'_l)) \mapsto E_{opt}(\Lambda', c')$$

на классе возмущений $\mathcal{P}_l$ в точке $(c, d, (\xi_0, \ldots, \xi_l))$, или на классе $\mathcal{P}_l \cap \mathcal{P}$.

Доказательство теоремы 3.

Рассмотрим подзадачу (4.4). Она является частным случаем (4.7) при $Q_0 = \ldots = Q_l = \emptyset$. Поэтому класс возмущений $\mathcal{P}'$ является частным случаем $\mathcal{P}_l$. Обозначим через Λ_0 и Λ'_0 допустимые множества задач, двойственных к (4.4) и $(4.4)'$, соответственно. По лемме 1 для класса возмущений $\mathcal{P}'$, получаем Липшиц-полунепрерывность сверху многозначного отображения

$$(c', d') \mapsto E_{\text{opt}}(\Lambda'_0, c')$$

на $\mathcal{P}'$ в точке (c, d) (и на $\mathcal{P}$ равномерно), где $E_{\text{opt}}(\Lambda'_0, c')$ — множество оптимальных крайних точек задачи, двойственной к $(4.4)'$. Тогда для любого достаточно малого $\delta > 0$, для любых $(c', d') \in \mathcal{P}'$, $\rho\{(c', d'), (c, d)\} < \delta$, и всякого $\lambda' \in E_{\text{opt}}(\Lambda'_0, c')$ найдется λ из $E_{\text{opt}}(\Lambda_0, c)$ такое, что

$$\|\lambda' - \lambda\| \leq K\delta. \tag{4.8}$$

$$\mathcal{N}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{i = 1, 2, \ldots, m |\ \lambda_i > 0\} \neq \emptyset,$$

$$\mathcal{N}'_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{i = 1, 2, \ldots, m |\ \lambda'_i > 0\} \neq \emptyset.$$

Из (4.8) следует, что для любого достаточно малого $\delta > 0$ будет $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}'_0$. Кроме того, по лемме 1 функция Θ'_0 Липшиц-непрерывна на $\mathcal{P}'$ в точке (c, d) и на $\mathcal{P}$ равномерно. Обозначим $N_0 = \mathcal{N}_0$ и перейдем к подзадаче (4.5).

Предположим, что проделано s шагов, построена последовательность $N_0, \ldots, N_s$ непустых непересекающихся подмножеств из M, $N_0 \cup \ldots \cup N_s \neq M$, а также определены векторы значений $\Xi'_s = (\Theta'_0, \ldots, \Theta'_s)$ и $\Xi_s = (\Theta_0, \ldots, \Theta_s)$ подзадач $(4.4)'$–$(4.6)'$ и (4.4)–(4.6), соответственно (при $t \leq s-1$), такие что вектор-функция Ξ'_s Липшиц-непрерывна на $\mathcal{P}_{s-1}$ в точке (c, d, Ξ_{s-1}) и на $\mathcal{P}_{s-1} \cap \mathcal{P}$ равномерно.

Рассмотрим подзадачу вида (4.6) (при $t = s$), совпадающую с (4.7) при $Q_j = N_j,\ \xi_j = \Theta_j,\ j = 0, 1, \ldots, l,\ l = s$. Поскольку значения Θ'_l соответствуют решению задач $(4.6)'$ с $t = l-1$, то формально можно считать, что тройки (c', d', Ξ'_s) являются элементами класса возмущений $\mathcal{P}_s$. Тем самым применима лемма 1, которая дает на классе возмущений $\mathcal{P}_s \cap \mathcal{P}$ $(\mathcal{P}_s)$ Липшиц-полунепрерывность сверху (в точке (c, d, Ξ_s)) многозначного отображения

$$(c', d', \Xi'_s) \mapsto E_{\text{opt}}(\Lambda'_s, c'),$$

где Λ'_s и $E_{\text{opt}}(\Lambda'_s, c')$ — допустимое множество и множество оптимальных крайних точек задачи, двойственной к $(4.6)'$. Как и для подзадачи (4.4), строим множества

$$\mathcal{N}_{s+1} \stackrel{\text{def}}{=} \{i \notin N_0 \cup \ldots \cup N_s | \lambda_i > 0\},$$

$$\mathcal{N}'_{s+1} \stackrel{\text{def}}{=} \{i \notin N_0 \cup \ldots \cup N_s | \lambda'_i > 0\},$$

выбирая элементы $\lambda' \in E_{\text{opt}}(\Lambda'_s, c')$ и $\lambda \in E_{\text{opt}}(\Lambda_s, c)$ удовлетворяющими (4.8), так чтобы $\mathcal{N}_{s+1} \subseteq \mathcal{N}'_{s+1}$, и получаем (по лемме 1 для класса возмущений $\mathcal{P}_s$), что функция Θ'_{s+1} Липшиц-непрерывна на $\mathcal{P}_s$ в точке (c, d, Ξ_s) и на $\mathcal{P}_s \cap \mathcal{P}$ равномерно. Положив $N_{s+1} = \mathcal{N}_{s+1}$, продолжим процедуру с $s := s + 1$, если $N_0 \cup \ldots \cup N_s \neq M$.

Построенная процедура конечна, и пусть S — номер ее последнего шага. Тогда $N_0 \cup \ldots \cup N_S = M$, последовательность $N_0, \ldots, N_S$ будет допустимым разбиением (см. утверждение 1) как в задаче (4.4)–(4.6), так и в задаче $(4.4)'$–$(4.6)'$. Отсюда $\forall i \in M\ \exists j$: $i \in N_j$ и, пользуясь выше относительно Θ'_j функция η'_i Липшиц-непрерывна на $\mathcal{P}'$ в точке (c,d) или на $\mathcal{P}$ равномерно. Переход от класса возмущений $\mathcal{P}_S$ к $\mathcal{P}'$ осуществлен в результате проектирования на множество векторов (c',d') (зависимость от $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_S$ нас уже не интересует). Теорема 3 доказана.

4.4. Об устойчивости сверхконкурентных распределений потоков. Из доказательства теоремы 3 (выбрав $0 < s < S$) легко видеть, что отображение числовых параметров МП-сети в множество крайних точек сверхконкурентных решений является Липшиц-полунепрерывным сверху на $\mathcal{P}'$ в точке (c,d), или на $\mathcal{P}$ равномерно. Тем не менее, когда множество l-сверхконкурентных решений $X_l(c,d)$ не является множеством конкурентных или суперконкурентных решений $(0 < l < L)$, оно не обязательно будет полунепрерывным снизу и непрерывность множества сверхконкурентных крайних точек не гарантируется. Это происходит из-за незавершенности лексикографической поцедуры “дожимания” возможностей МП-сети при сверхконкурентном распределении потоков.

Действительно, рассмотрим снова пример, изображенный на рис.2 (п.3), и добавим к этой сети еще два отдельно стоящих ребра физического и логического графов, т.е. две пары новых вершин, соединяющие их физические ребра и связывающие их тяготеющие пары (см. рис. 3).

Рис. 3.

Пусть пропускная способность новых ребер $c_4 = 20$, $c_5 = 25$, а требования на новых информационных направлениях d_4, d_5 равны 25. Заметим, что данные направления являются независимыми и их требования могут обеспечиваться без ущерба для других (но из всех конкурентных распределений потоков — для рассмотренных ранее вариантов требований остальных тяготеющих пар — требования 5-й обеспечиваются лишь при суперконкурентном решении). Теперь возьмем вектор гда множество сверхконкурентных мультипотоков для этой МП-сети равно

$$\{z^1|\, (\mathbf{f}^1, z^1) \in X_1(c,d),\ \frac{z_1^1}{d_1} = \frac{z_2^1}{d_2} = \frac{z_3^1}{d_3} = \theta_0 = 0.75,\ \frac{z_4^1}{d_4} = \theta_1 = 0.8,\ \frac{z_5^1}{d_5} \geq 0.8\},$$

а возмущенное множество при $c' = c,\ d_2' > d_2,\ d_i' = d_i\ \forall i \neq 2$, будет

$$\{z'^1|\, (\mathbf{f}'^1, z'^1) \in X_1(c', d'),\ \frac{z_1'^1}{d_1} = \frac{z_2'^1}{d_2'} = \theta_0'(< 0.75),\ \frac{z_3'^1}{d_3} = \theta_1'\ (> 0.75),$$

$$0.8 \geq \frac{z_4'^1}{d_4} \geq \theta_1',\ \frac{z_5'^1}{d_5} \geq \theta_1'\},$$

т.е. существенно шире (из-за отсутствия непрерывности индексных множеств M_l). В этом — определенный недостаток сверхконкурентных решений. Однако, если оперировать с ними, не ориентируясь на номер уровня, а лишь на достигнутые значения потоков для тяготеющих пар, то указанного недостатка можно избежать. Так, в случае определения последнего уровня лексикографии через достижение единичной обеспеченности требований (или любой другой заданной величины θ^*)

$$L^* \stackrel{\text{def}}{=} \min\{l|\ \theta_l \geq \theta^* \ \text{ или } \ M_0 \cup \ldots \cup M_l = M\}$$

получим Липшиц-непрерывность $X_{L^*(c,d)}(c, d'$ на $\mathcal{P}$. Действительно, множество $X_{L^*(c,d)}(c,d)$ может быть представлено в виде

$$\{(\mathbf{f}, z) \in X(c)|\ z_i \geq \min[\theta^*, \eta_i(c,d)d_i] \ \ \forall i = 1, \ldots, m\},$$

где параметры входят лишь в правую часть, а функция минимума непрерывна.

Что касается множеств M_l, то справедлив следующий результат.

Фиксируем последовательность $(c^\kappa, d^\kappa) \to (c,d)$, $\kappa \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — бесконечное индексное множество, и рассмотрим $M_0^\kappa, \ldots, M_{L_\kappa}^\kappa$ — последовательность подмножеств из M, определяемых по аналогии с $M_0, \ldots, M_L$ как

$$M_j^\kappa = \{i \notin M_0^\kappa \cup \ldots \cup M_{j-1}^\kappa|\ z_i = \theta_j^\kappa d_i^\kappa \ \ \forall (\mathbf{f}, z) \in X_j^\kappa \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$= \operatorname{Arg} \max_{(\mathbf{f},z) \in X_{j-1}^\kappa} \ \min_{i \notin M_0^\kappa \cup \ldots \cup M_{j-1}^\kappa} \frac{z_i}{d_i^\kappa}\}, \quad j = 0, 1, \ldots, L_\kappa,$$

формально полагая $M_{-1}^\kappa = \emptyset,\ \ X_{-1}^\kappa = X(c^\kappa)$. Здесь θ_j^κ — значение задачи вида $(2.5)^\kappa$ при $l = j-1$; $\ M_0^\kappa \cup \ldots \cup M_{L_\kappa}^\kappa = M$.

следовательность $M_0^\kappa, \dots, M_{L_\kappa}^\kappa$ *является допустимым разбиением в задаче (4.4)–(4.6).*

Полученное свойство обобщает аналогичный результат для задачи определения θ_0 (утверждение 5 из [10]).

5. Методы поиска суперконкурентного распределения. Для поиска суперконкурентного распределения потоков и мультипотока — решения $(\mathbf{f}^L, z^L)$ лексикографической последовательности задач (1.1), (2.5)–(2.7) с $l = 0, 1, \dots, L$ — применимы методы ЛП. Действительно, согласно результатам предыдущего пункта, указанная последовательность задач сводится к лексикографической последовательности задач ЛП (4.4)–(4.6), которая является устойчивой по отношению к возмущениям вектора требований и вектора пропускной способности. Однако при численном решении указанной задачи могут также возникать неточности при определении значений критериев и решения. Далее предлагается определенная процедура регуляризации, т.е. такой способ решения полученной лексикографической задачи ЛП, который позволяет распространить результат о ее устойчивости на случай возможности вычислительных погрешностей [19, 22].

Рассмотрим процедуру численного поиска суперконкурентного решения задачи о распределении потоков в МП-сети. Для этой цели воспользуемся последовательностью подзадач (4.4)–(4.6). Предположим, что параметры d и c известны не точно, а даны их приближенные значения d' и c', $(c', d') \in \mathcal{P}'$. Кроме этого предположим, что прямое и двойственное решения, а также оптимальное значение каждой t-й подзадачи определяются с погрешностью, не превосходящей $\varepsilon \geq 0$. Обозначим через $\Theta'_t(\varepsilon)$ приближенное значение t-й подзадачи. В качестве множеств N_t возьмем множества $\mathcal{N}'_t(\varepsilon)$ номеров (от 1 до m) тех компонент приближенного двойственного решения $\lambda'(\varepsilon)$ подзадачи t, соответствующих последней группе ограничений в $(4.6)'$ (т.е. от 1 до m), для которых выполнено

$$d'_i \lambda'_i(\varepsilon) \geq (1 - \varepsilon \sum_{i \in I_t} d'_i)/m_t, \quad i \in I_t, \tag{5.1}$$

где $m_t \stackrel{\text{def}}{=} |I_t|$, $I_t \stackrel{\text{def}}{=} M \setminus \bigcup_{j=0}^{t-1} N_j$.

Для двойственных переменных каждой t-й подзадачи $(4.6)'$ справедливо равенство

$$\sum_{i \in I_t} \lambda'_i d'_i = 1, \quad \lambda'_i \geq 0 \ \ \forall i \in M,$$

статочно близких к (c,d), и достаточно малых ε для некоторой компоненты приближенного двойственного решения $\lambda_i'(\varepsilon)$ будет выполнено (5.1), и значит, для всех t имеем $\mathcal{N}_t'(\varepsilon) \neq \emptyset$. Поскольку по построению $\mathcal{N}_l'(\varepsilon) \cap \mathcal{N}_j'(\varepsilon) = \emptyset$ для $l \neq j$, то последовательность решаемых подзадач будет конечной.

Чтобы обеспечить разрешимость каждой t-й подзадачи с учетом погрешности ε вычисления Θ_j', заменим в ее ограничениях равенства

$$z_i = \Theta_j'(\varepsilon) d_i', \quad i \in N_j, \ j = 0, 1, \ldots, t-1,$$

на неравенства и добавим регуляризующую уступку, получим

$$z_i \geq \Theta_j'(\varepsilon) d_i' - \varepsilon d_i', \quad i \in N_j, \ j = 0, 1, \ldots, t-1. \tag{5.2}$$

Формально рассматриваемый класс возмущений $\mathcal{P}_\varepsilon$ можно описать как совокупность троек (c', d', ε) таких, что лексикографическая последовательность задач $(4.4)_\varepsilon'$–$(4.6)_\varepsilon'$, (5.2) с $t = 1, \ldots, T_\varepsilon'$ разрешима, а правая часть неравенства в (5.1) отделена от нуля. В частности $\mathcal{P}_\varepsilon$ содержит множество $\{(c', d') \in \mathcal{P}', \ 0 \leq \varepsilon < 1/(m \max_i d_i)\}$.

Теорема 4. *Функции $\eta_i'^\varepsilon$ как функции c', d', ε Липшиц-непрерывны на $\mathcal{P}_\varepsilon$ в точке $(c, d, 0)$. Многозначное отображение $(c', d', \varepsilon) \mapsto E(X_{L_\varepsilon'}'(\varepsilon))$ Липшиц-непрерывно на $\mathcal{P}_\varepsilon$ в точке $(c, d, 0)$.*

Доказательство. Для рассматриваемой задачи можно повторить все рассуждения, относящиеся к доказательству теоремы 3, с одним отличием — множества $\mathcal{N}_t'(\varepsilon)$ строятся иначе, чем $\mathcal{N}_t'$:

$$\mathcal{N}_t'(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in I_t' | \ d_i' \lambda_i'(\varepsilon) \geq (1 - \varepsilon \textstyle\sum_{i \in I_t'} d_i')/m_t'\} \subseteq \mathcal{N}_t = \{i | \lambda_i > 0\}.$$

Включение обеспечивается выбором достаточно малых ε и δ, а также λ, удовлетворяющих (4.8), и гарантирует, что последовательность $\mathcal{N}_t'(\varepsilon)$, $t = 0, 1, \ldots$, будет допустимым разбиением как в задаче $(4.4)_\varepsilon'$–$(4.6)_\varepsilon'$, (5.2), так и в задаче (4.4)–(4.6). В результате, можем заключить, что функции $\eta_i'^\varepsilon$ Липшиц-непрерывны в точке $(c, d, 0)$. Теперь, выражая, как и ранее, через $\eta_i'^\varepsilon$ множество $X_{L_\varepsilon'}'(\varepsilon)$, получаем, что отображение

$$(c', d', \varepsilon) \mapsto E(X_{L_\varepsilon'}'(\varepsilon))$$

Липшиц-непрерывно в точке $(c, d, 0)$ (в силу Липшиц-непрерывности линейных ограничений по правой части).

В ограниченном случае отсюда вытекает и Липшиц-непрерывность на $\mathcal{P}_\varepsilon \cap \mathcal{P}$ множества $X_{L_\varepsilon'}'(\varepsilon)$ суперконкурентных приближенных решений.

Таким образом, предложенная процедура поиска суперконкурентного распределения потоков является устойчивой по отношению к погрешностям при решении каждой из подзадач ЛП, формирующих лексикографическую последовательность. Тем самым показано, что эти от L до m подобных задач, аналогичных поиску конкурентного равновесия. Их число будет еще меньше, если можно ограничиться сверхконкурентным решением.

Полученный результат также дает возможность использования для поиска суперконкурентного решения приближенных комбинаторных методов [6, 28, 29, 30] следующим образом. Зададимся некоторым $\varepsilon > 0$. На 0-м шаге применяем алгоритм [28, 29] поиска конкурентного решения и определяем множество $\mathcal{N}_0(\varepsilon)$ индексов i продуктов, для которых выполнено неравенство (5.1) для двойственных переменных (поиск приближенных значений двойственных переменных осуществляется с помощью того же алгоритма). После чего на 1-м шаге решаем задачу приближенного поиска конкурентного решения для тяготеющих пар с индексами из $M \setminus \mathcal{N}_0(\varepsilon)$ при наличии бюджетного ограничения (5.2) для $j = 0$. Здесь примени́м алгоритм [30]. И далее аналогично. Тем не менее, за счет необходимости довольно точно определять двойственные переменные (с точностью порядка $1/m$, что требует, согласно [28, 29], порядка m^3 шагов для поиска конкурентного решения) общее число итераций такого алгоритма может оказаться больше, чем для указанного выше последовательного применения методов ЛП.

Заключение. Получено решение задачи согласования интересов невзаимозаменяемых пользователей при распределении потоков в многопродуктовых потоковых сетях, не удовлетворяющих условию допустимости. В качестве оптимального распределения, рационально использующего ресурсы сети и не дискриминирующего никого из ее абонентов, предложено суперконкурентное распределение потоков. Исследована устойчивость суперконкурентного распределения по отношению к небольшим изменениям количественных параметров сети. Предложены численные методы его поиска. Показано, что суперконкурентный мультипоток дает информативную характеристику возможностей сети по обслуживанию заданного вектора требований пользователей, однако, в условиях неопределенности требований достаточно ограничиться лишь показателями конкурентного мультипотока.

1. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности // Изв. РАН. Теория и системы управления, 1998. N.1.

2. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

3. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.

4. *Карзанов А.В.* Комбинаторные способы решения разрезных задач о мультипотоках // Труды ВНИИСИ, 1979.

5. *Matula D.W.* Concurrent flow and concurrent connectivity in graphs // Graph Theory and Its Appl. to Algorithms and Comput. Sci. N.-Y.: Wiley-Intersci., 1985.

6. *Shahrokhi F., Matula D.W.* The maximum concurrent flow problem // J. Assoc. Comput. Math., 1990. V.37. N.2.

7. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Потоковые задачи анализа уязвимости многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1989.

8. *Малашенко Ю. Е.* Математические модели анализа потоковых сетевых систем. М.: ВЦ АН СССР, 1993.

9. *Малашенко Ю.Е.* Нормативный подход к анализу многопродуктовых сетей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1988. N.3.

10. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Многокритериальный и максиминный анализ многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1988.

11. *Давидсон М.Р., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. и др.* Математические постановки задач восстановления и обеспечения живучести для многопродуктовых сетей. М.: ВЦ РАН, 1993.

12. *Iri M.* On the extension of the maximum-flow minimum-cut theorem to multicommodity flows // J. Oper. Res. Soc. Japan, 1971. V.13.

13. *Onaga K.* A multicommodity flow theorem // Electronics Commun. Japan, 1970. V.53. N.7.

14. *Biswas J., Matula D.W.* Two flow routing algorithms for the maximum concurrent flow problem // Fall Joint Comput. Conf., Dallas, Tex., Nov.2-6, 1986. Proc. Washington, D.C., 1986.

algorithms for the unit capacity concurrent flow problem with applications to routing and finding sparse cuts // SIAM J. Comput. 1994. V.23, N.3.

16. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

17. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // Ж ВМ и МФ, 1975. Т.15. N.2.

18. *Давидсон М.Р.* Об условной устойчивости крайних точек многогранного множества // Ж ВМ и МФ, 1994. Т.34. N.1.

19. *Давидсон М.Р.* Устойчивость лексикографической максиминной задачи распределения потоков в многопродуктовых сетях // Ж ВМ и МФ, 1995. Т.35. N.3.

20. *Davidson M.R.* Stability of lexicographical multicommodity flow problem // 15th Int. Symp. on Mathematical Programming, Program and Abstracts, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, USA, 1994.

21. *Davidson M.R.* On stability of the extreme points set of a polyhedron // Journal of Optimization Theory and Applications, 1996. V.90, N.2.

22. *Давидсон М.Р.* Условия устойчивости множества крайних точек полиэдра и их применение для исследования многопродуктовых сетевых моделей: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: ВЦ РАН, 1995.

23. *Давидсон М.Р.* Условия устойчивости множества крайних точек полиэдра и их применение в сетевой оптимизации. М.: ВЦ РАН, 1996.

24. *Walkup D., Wets R.J.-B.* A Lipschitzian characterization of convex polyhedra // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V.23.

25. *Клепикова М.Г.* Проблемы устойчивости задач математического программирования: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1986.

26. *Нефедов В.Н.* Регуляризация поиска крайних точек выпуклого полиэдрального множества // Обработка и интерпретация физических экспериментов, вып. 9. Изд-во МГУ, 1980.

жеством стратегий // Вестн. МГУ. Вычисл. матем. и кибернетика, 1981. N 1.

28. *Leighton T., Makedon F., Plotkin S., Stein C., Tardos E., Tragoudas S.* Fast approximation algorithms for multicommodity flow problems // J. Computer and Syst. Sci., 1995. V.50. N.1.

29. *Leong T., Shor P., Stein, C.* Implementation of a combinatorial multicommodity flow algorithm. DIMACS Working paper, 1992.

30. *Grigoriadis M.D., Khachiyan L.G.* Approximate minimum-cost multicommodity flows in $\tilde{O}(\varepsilon^{-2}KNM$ time. Tech. Rep. LCSR-TR-245, Department of Computer Science, Rutgers University, New Brunswick, NJ, May 1995.

Рис.1.

Рис. 2.

Рис. 3.