РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Н. М. Новикова, И. И. Поспелова

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2000

УДК 519.85

Ответственный редактор
академик П.С.Краснощеков

Поставлена задача формализации значения векторного максиминимакса в модели двухэтапного принятия решений в условиях неопределенности. Описаны возможные способы формализации, в том числе в виде максимума от минимакса и максимина от максимума, которые приводят к новым понятиям — максимума и максимина точечно-множественных отображений. Для определения соответствующих значений потребовалось детальное исследование и систематизация различных вариантов информированности в процессе принятия решений, изучение связи информационных условий с трактовкой многокритериальности при использовании гарантированных или защищаемых оценок. Попутно проведена классификация определений векторного минимакса, позволившая выделить два типа значений: с точки зрения информированного и с точки зрения неинформированного игрока. В итоге удалось доказать, что все корректные подходы приводят в качестве слейтеровского значения векторного максиминимакса к одному и тому же множеству, совпадающему с определением, построенным на базе гибко понимаемого принципа гарантированности результата Ю.Б.Гермейера.

Работа поддержана грантами по проектам:
№/№ 98-01-00233 и 99-01-01192 Российского фонда фундаментальных исследований, №/№ 00-15-96141 и 00-15-96118 “Научные школы”, а также INTAS 97 – 1050.

Рецензенты: А.В. Лотов,
В.В. Морозов

Научное издание

§1. Предварительные сведения

1. Постановка задачи. Задача принятия решения состоит в выборе одной из множества альтернатив, называемых стратегиями. Этот выбор производит лицо, принимающее решение (ЛПР) и стремящееся к достижению определенных целей. ЛПР сравнивает стратегии по предпочтительности не непосредственно, а с помощью некоторого критерия эффективности, и, таким образом, стремление ЛПР к достижению определенной цели математически означает стремление к увеличению (или уменьшению) величины критерия эффективности. В классической теории исследования операций [1] предполагается наличие одной функции, характеризующей эффективность стратегий. Однако по различным причинам ЛПР не всегда может заранее задать однозначно эту функцию, и ему проще сначала указать несколько функций, а потом сравнивать альтернативные оптимальные решения. В этом случае предпочтительность стратегий определяется векторной функцией, называемой векторным критерием [2]. Неоднозначность в выборе критерия эффективности трактуется как субъективная неопределенность и приводит в качестве решения к множеству стратегий, одну из которых в конечном счете выбирает ЛПР.

Итак, задачи принятия решений с многими критериями возникают в исследовании операций при моделировании сложных систем, эффективность функционирования которых не удается заранее описать одним показателем. Но кроме этого, функционирование сложных систем, как правило, происходит в условиях объективной неопределенности — незнания ряда внешних факторов, влияющих, тем не менее, на эффективность [1, 3, 4]. Чтобы получить в таких условиях информативные (наилучшие гарантированные) оценки эффективности, ставят минимаксные или максиминные задачи векторной оптимизации [2, 5, 6]. Множество, определяющее гарантированное значение соответствующего векторного минимакса или максимина, характеризует живучесть исследуемой системы (при адекватной корректировке формальных определений).

Принятие управляющих решений в сложных системах в условиях неопределенности зачастую оказывается двухэтапным. Ряд параметров приходится фиксировать *a priori* — до поступления информации о значениях неопределенных факторов, а остальные (корректирующее управление) — можно выбрать потом. И те, и другие суть стратегии оперирующей стороны. Предположив, что оперирующая сторона интересуется максимизацией векторного критерия, придем к задаче на векторный максиминимакс и к проблеме формализации ее решения на основе принципа наилучшего гарантированного результата [7].

Задачи такого типа возникают, в частности, при исследовании живучести сетевых систем и при синтезе многопродуктовых сетей по критерию живучести. Действительно, качество функционирования многопользовательской сетевой системы определяется мультипотоком — вектором z одновременно пропускаемых по сети потоков заявок пользователей (тяготеющих пар, или видов продуктов). Поэтому для сети с заданным вектором u пропускной способности ребер ставится задача векторной максимизации z [8]. При исследовании живучести сетевой системы учитывается, что исходный вектор u пропускной способности может неконтролируемо уменьшаться в известных пределах. Обозначим результирующий вектор через w. Тогда гарантированная оценка качества функционирования сети [9] дается гарантированным значением векторного минимакса

$$\operatorname*{Min}_{w \in W(u)} \operatorname*{Max}_{z \in Z(w)} z.$$

Этот минимакс зависит от u, и в предположении, что $u \in U$ выбирается с целью повышения живучести, приходим к проблеме максимизации минимакса, т.е. к поиску

$$\operatorname*{Max}_{u \in U} \operatorname*{Min}_{w \in W(u)} \operatorname*{Max}_{z \in Z(w)} z.$$

Ограничения и целевая функция для сетевых систем линейны, а в общем случае получаем задачу

$$\operatorname*{Max}_{u \in U} \operatorname*{Min}_{w \in W(u)} \operatorname*{Max}_{z \in Z(w)} \Phi(z, w, u). \qquad (1)$$

(Для упрощения изложения опускаем зависимость Z от u.)

Значение (1) до недавнего времени не определялось [7]. В случае единственного критерия гарантированный подход в двухэтапной максимизации приводит к скалярной задаче на максиминимакс, рассмотренной, в частности, в [10, 11].

Мы видим несколько возможных способов определения значения (1): последовательное применение операций Max, Min, Max к объединению соответствующих множеств аналогично [12]; применение Max к значению векторного минимакса, подробно изученного в [13]; обобщение понятия векторного максимина на случай точечно-множественных отображений и применение полученного определения к множеству $\operatorname*{Max}_{z \in Z(w)} \Phi(z, w, u)$.

В дальнейшем будет описан каждый из этих способов, но до этого нам придется провести более детальное, чем имеется в литературе, исследование минимаксных задач векторной оптимизации с целью выявления соотношений между различными определениями и их связи с наилучшим гарантированным результатом оперирующей стороны (см. §2). Формализация значения оптимума точечно-множественных отображений будет предложена в §3, она также позволяет обобщить введенные конструкции на случай многоэтапного принятия решений в условиях неопределенности (в частности, определить кратный векторный минимакс) по предложенной схеме. Значение (1) будет определено в §4, где мы покажем, что все перечисленные способы, когда их применение корректно, приводят к одному и тому же множеству, совпадающему с построенным с позиций принципа гарантированности результата [7]. Однако для начала изложим основные понятия векторной оптимизации.

2. Векторная оптимизация. Задачи многокритериальной оптимизации представляют большой интерес и уже достаточно хорошо изучены. Они предусматривают выбор из исходного множества альтернатив $V \subset \mathbb{R}^n$ подмножества, являющегося решением задачи и состоящего из оптимальных (эффективных) стратегий. Предполагается, что на V заданы числовые функции $\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_Q(\cdot)$, при помощи которых и определяется предпочтительность той или иной стратегии $v \in V$. Эти функции называются частными критериями и образуют векторный критерий $\Phi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_Q(\cdot))$. Считается, что каждая стратегия v полностью характеризуется соответствующим вектором $\Phi(v)$. Задачи, в которых каждый критерий желательно максимизировать, называются задачами многокритериальной или векторной, максимизации. Если же каждый критерий желательно минимизировать, то такая задача называется задачей векторной минимизации. (Ясно, что заменой знака критерия можно перейти от максимума к минимуму и наоборот.)

Возьмем для примера задачу максимизации. Тогда стратегия v не хуже, чем v', если $\Phi(v) \geq \Phi(v')$. Здесь и далее стандартные знаки неравенств для векторов понимаются в смысле покомпонентных соответствующих неравенств. Если хотя бы одно из неравенств строгое, то говорят, что вектор $\Phi(v) \geq \Phi(v')$ *доминирует* $\Phi(v')$. (Для задачи на минимум берутся противоположные неравенства.) Множество недоминируемых векторов называется *множеством Парето*, и его естественно рассматривать в качестве оптимума в многокритериальной оптимизации. В данной работе под решением задачи векторной оптимизации будем понимать множество Парето либо некоторое его расширение — *множество Слейтера*. Укажем, что существуют и другие определения оптимальных множеств (см. [2]), но мы на них останавливаться не будем.

Введем необходимые обозначения и дадим формальные определения. Обозначим через $D = \Phi(V)$ множество всевозможных значений векторного критерия Φ на множестве альтернатив V. Тогда значение $\operatorname{Max} D$ ($\operatorname{Min} D$) для $D \subset \mathbb{R}^Q$ определяется как множество всех максимальных (минимальных) векторов из D следующим образом [1, 2].

Определение 1. Вектор $d^0 \in D$ называется максимальным по отношению $\geq$ ($>$) в множестве D, если не существует такого вектора $d \in D \setminus \{d^0\}$, что $d \geq d^0$ ($d > d^0$).

Определение 2. Вектор $d^0 \in D$ называется минимальным по отношению $\leq$ ($<$) в множестве D, если не существует такого вектора $d \in D \setminus \{d^0\}$, что $d \leq d^0$ ($d < d^0$).

Определение 3. Вектор, максимальный (минимальный) по $\geq$ ($\leq$), называется эффективным, или оптимальным по Парето (Парето-оптимальным), или просто паретовским. Вектор, максимальный (минимальный) по $>$ ($<$), называется оптимальным по Слейтеру, или слейтеровским.

Множество всех Парето-оптимальных точек из D образует множество Парето $P(D)$, а все точки множества D, оптимальные по Слейтеру, образуют множество Слейтера $S(D)$. При этом стратегии, отвечающие оптимальным значениям векторного критерия, также называются оптимальными и образуют соответствующие множества — решения (реализации оптимумов) $P_\Phi(V)$ и $S_\Phi(V)$:

$$P_\Phi(V) \subseteq V, \;\; \Phi(P_\Phi(V)) = P(D), \quad S_\Phi(V) \subseteq V, \;\; \Phi(S_\Phi(V)) = S(D).$$

В дальнейшем нас будет интересовать оптимизация в значениях векторного критерия, а не непосредственно в решениях.

Из определений имеем $P(D) \subseteq S(D)$, $P(S(D)) = P(D)$. Так что множество Слейтера, являясь некоторым расширением множества Парето, содержит все решения исходной многокритериальной задачи (оно удобней для аппроксимации и поэтому является достаточно распространенным). Существенную роль играет также следующее множество, обладающее аналогичными свойствами.

Определение 4 [14]. Оболочкой по Эджворту и Парето (ПЭ-оболочкой) множества $D \subset \mathbb{R}^Q$ называется множество $\{\xi \in \mathbb{R}^Q |\ \exists d \in D\colon\ \xi \leq d\}$ в задаче на максимум или множество $\{\psi \in \mathbb{R}^Q |\ \exists d \in D\colon\ \psi \geq d\}$ в задаче на минимум. И то, и другое будем обозначать через $\operatorname{eph} D$, предполагая соответствующую согласованность типа оптимума и знака неравенства.

Множество $\operatorname{eph} D$ содержит вместе со всеми паретовскими и слейтеровскими векторами из D еще и все доминируемые ими векторы из $\mathbb{R}^Q$, причем

$$P(\operatorname{eph} D) = P(D), \qquad S(\operatorname{eph} D) \supseteq S(D). \tag{2}$$

Далее под $\operatorname{Max} D$ и $\operatorname{Min} D$ будем понимать как множество Парето, так и множество Слейтера. Случаи, в которых под оптимальным множеством будет пониматься только одно из них, будут оговариваться особо.

Задача векторной оптимизации может быть переписана следующим образом: $\operatorname*{Max}_{v \in V} \Phi(v) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcup\limits_{v \in V} \Phi(v) = \operatorname{Max} D$ и $\operatorname*{Min}_{v \in V} \Phi(v) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Min} \bigcup\limits_{v \in V} \Phi(v) = \operatorname{Min} D$, или

$$\operatorname*{Opt}_{v \in V} \Phi(v) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Opt} \bigcup_{v \in V} \Phi(v) = \operatorname{Opt} \Phi(V) = \operatorname{Opt} D, \tag{3}$$

если ввести единое обозначение Opt для Max и Min.

Содержательно наличие векторного критерия в исследовании операций означает неопределенность целей [1]. Однако такая неопределенность в отличие от неконтролируемых факторов трактуется как внутренняя для оперирующей стороны (субъективная), поскольку в конечном счете ЛПР, являясь частью оперирующей стороны, выберет, пусть неявно, целевую функцию, не противоречащую данному вектору критериев, т.е. некоторую неубывающую свертку компонент φ_i. Но его выбор не известен исследователю операций заранее. (В этом смысле ЛПР сродни противнику.) Так что исследователь должен рассчитывать на все возможные варианты и предоставить ЛПР для выбора множество решений — отсюда множественность значения векторного оптимума.

Указанная множественность не позволяет напрямую формально распространить введенные понятия для определения векторного максимина или минимакса, а тем более максиминимакса или кратного минимакса. Действительно, если, как в скалярном случае, записать $\operatorname*{Min}_{y\in Y}\operatorname*{Max}_{x\in X}\Phi(x,y)$ в виде $\operatorname*{Min}_{y\in Y}\left\{\operatorname*{Max}_{x\in X}\Phi(x,y)\right\}$, т.е. $\operatorname*{Min}_{y\in Y}D(y)$, где $D(y)=\operatorname*{Max}_{x\in X}\Phi(x,y)$, то в силу множественности значения $\operatorname*{Max}_{x\in X}\Phi(x,y)$ при фиксированном y приходим к необходимости определить новое понятие

$$\operatorname*{Min}_{v\in V} D(v) \quad \text{для} \quad D\colon\ V\to 2^{\mathbb{R}^Q}. \tag{4}$$

Для точечно-множественных отображений трактовка значения $\operatorname*{Min}_{v\in V}D(v)$, как и $\operatorname*{Max}_{v\in V}D(v)$, не очевидна. Это объясняется тем, что если одно множество не принадлежит ПЭ-оболочке другого, то они не сравнимы по отношению $\leq$ ($<$) или $\geq$ ($>$).

Например, на рис. 1 приведены значения точечно-множественного отображения $D(v)$, $v\in\{v^1,v^2\}$. Границы ПЭ-оболочек в задаче на Max для каждого из множеств $D(v^1)$, $D(v^2)$ состоят из самих $D(v^1)$, $D(v^2)$, выделенных жирной линией, и соответствующих пунктирных линий. Видно, что нельзя определить, какое из множеств $D(v^1)$, $D(v^2)$ лучше, поскольку в каждом из них есть векторы как большие, так и меньшие векторов другого множества, ибо $\operatorname{eph} D(v^1) \not\subseteq \operatorname{eph} D(v^2)$ и $\operatorname{eph} D(v^2) \not\subseteq \operatorname{eph} D(v^1)$. Выбор в качестве значения Max (или Min) совокупности $\{D(v^1), D(v^2)\}$, состоящей в данном случае из всех значений точечно-множественного отображения, способен только затруднить анализ. Именно потому возникает разнобой в определениях векторного максимина/минимакса, что не ясно, как выбрать максимальное (минимальное) по отношениям $\leq$ ($\geq$) или $<$ ($>$) из множеств.

Одним из возможных вариантов определения $\operatorname*{Opt}\limits_{v \in V} D(v)$ для точечно-множественного отображения является аналог рассмотренной для вектор-функций формулы (3)

$$\operatorname*{Opt}_{v \in V} D(v) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Opt} \bigcup_{v \in V} D(v) = \operatorname{Opt} D(V). \tag{5}$$

По-видимому, подобный подход использовался авторами [5] при определении значений векторных максимина и минимакса, и для ряда постановок он оправдан (см. далее в § 2). При этом ясно, что формула (5) для значения минимума в (4) неправомерна, если $d \in D(v)$ оказывается неконтролируемым фактором (соответствующие примеры также см. в § 2). Общий набор постановок задач оптимизации точечно-множественных отображений будет исследован в § 3. А здесь отметим одно полезное свойство операций Max и Min по Слейтеру.

Утверждение 1. *Справедливы равенства*

$$\operatorname{Max} D(V) = \operatorname{Max} \bigcup_{v \in V} \operatorname{Max} D(v), \quad \operatorname{Min} D(V) = \operatorname{Min} \bigcup_{v \in V} \operatorname{Min} D(v). \tag{6}$$

Для Max и Min по Парето равенство выполняется не всегда, и в этом случае можно говорить лишь о включениях

$$\operatorname{Max} \bigcup_{v \in V} \operatorname{Max} D(v) \subseteq \operatorname{Max} D(V), \quad \operatorname{Min} \bigcup_{v \in V} \operatorname{Min} D(v) \subseteq \operatorname{Min} D(V).$$

3. Векторная оптимизация множеств оценок. В силу специфики неопределенности для многокритериальных постановок мы будем рассматривать также задачи оптимизации множества оценок векторного критерия, или, другими словами, *оптимизацию в оценках*. При этом нас будут интересовать не столько сами значения критериев, сколько их оценки в критериальном пространстве. Подчеркнем, что термин "оценка" в данной работе отличается от используемого в [2], где значение вектора критериев называется "векторной оценкой" стратегии.

Идея оптимизации в оценках векторного критерия в силу свойств (2) имеет простую аналогию со скалярным случаем: значение, например, максимума функции $\varphi(x)$ на множестве X равно наибольшему числу χ из оценивающих $\varphi(x)$ снизу при всех $x \in X$, т.е. $\max\limits_{x \in X} \varphi(x) = \max\{\chi \in \mathbb{R}^1 | \ \exists x \in X: \ \chi \leq \varphi(x)\}$. Поясним подробнее, что будет пониматься под оценкой для векторного критерия.

Для начала рассмотрим ситуацию без объективной неопределенности. Пусть оперирующая сторона выбирает свои стратегии из множества V, а ее предпочтения задаются векторной функцией Φ: $V \to \mathbb{R}^Q$, $\Phi(v) = (\varphi_1(v), \ldots, \varphi_Q(v))$. Если целью операции является максимизация векторного критерия $\Phi(\cdot)$, то при каждом значении аргумента любой вектор из $\mathbb{R}^Q$, не превышающий значения векторного критерия, будет служить гарантированной оценкой (снизу), т.е. можно сказать, что результирующий выигрыш при данном значении аргумента гарантированно не меньше величины оценки векторного критерия при этом же значении аргумента. Гарантированность здесь понимается в смысле субъективной неопределенности, а именно, какой бы монотонной сверткой частных критериев φ_i ни руководствовалась в конечном счете оперирующая сторона (ЛПР), значение этой свертки будет не меньше, чем соответствующая свертка компонент оценки. Аналогично каждое значение векторного критерия при его минимизации оценивается сверху.

Кроме гарантированных, будем, следуя [2], рассматривать "защищаемые" оценки. Для этого введем отношения $\stackrel{=}{<}$ (и $\stackrel{=}{>}$) среди векторов, означающие наличие $\leq$ (или $\geq$) хотя бы по одной компоненте, т.е.

$$\psi \stackrel{=}{<} \psi' \iff \psi \not> \psi', \quad \text{а} \quad \psi \stackrel{=}{>} \psi' \iff \psi \not< \psi'.$$

Векторы $\psi \stackrel{=}{<} \Phi(v)$ будем называть защищаемыми оценками для $\Phi(v)$ снизу, а $\psi' \stackrel{=}{>} \Phi(v)$ — сверху. Для любой защищаемой оценки можно утверждать, что хотя бы по одной компоненте вектор критериев даст не худшее значение. Тем самым, защищаемые оценки показательны только при таком отношении к субъективной неопределенности, когда оперирующая сторона интересуется оптимизацией не всех компонент вектора критериев, а хотя бы одной, не важно какой. Указанный подход не характерен для векторной оптимизации, но и он в принципе возможен. Кроме того, введенный тип оценок оказывается полезным для дальнейшего. Ниже будут получены соотношения между оптимальными множествами гарантированных и защищаемых оценок, которые помогут прояснить содержательный смысл термина "защищаемый" (см. также в § 2).

Таким образом, при каждом значении аргумента $v \in V$ можно определить следующие множества оценок вектора $\Phi(v)$: $\{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \leq \Phi(v)\}$ и $\{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \stackrel{=}{<} \Phi(v)\}$ в задаче на максимум, $\{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \geq \Phi(v)\}$ и $\{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \stackrel{=}{>} \Phi(v)\}$ в задаче на минимум, Вообще говоря, возможны и промежуточные конструкции (между гарантированными и защищаемыми оценками), но они не понадобятся для исследования векторных максиминов и минимаксов. Условие принадлежности $\mathbb{R}^Q$ будем иногда опускать.

При описании множества оценок всех значений векторного критерия естественно пользоваться какой-то одной оценкой для всех значений аргумента (если же при разных значениях аргумента применить разные оценки, то исходную задачу можно разбить на несколько и использовать в каждой из них только один тип оценок). Предположим для определенности, что рассматривается задача на максимум и при всех значениях аргумента $v \in V$ выбраны гарантированные оценки значения $\Phi(v)$ векторной функции $\Phi(\cdot)$, т.е. $\{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \le \Phi(v)\}$. Теперь в зависимости от содержательной постановки задачи есть два формальных варианта для множества V.

Первый, с которого мы и начали рассмотрение в этом пункте, когда V описывает множество стратегий оперирующей стороны, т.е. предполагается возможным осуществлять выбор элемента $v \in V$. Тогда в качестве множества максимизируемых гарантированных оценок следует взять их объединение по всем $v \in V$, получим $\bigcup\limits_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \le \Phi(v)\}$.

Второй вариант возникает в задаче оценивания возможностей противника (или природы), которая ставится оперирующей стороной (например, с целью оценки эффективности примененной стратегии), если выбор $v \in V$ не является управлением оперирующей стороны (например, $\Phi(v) = \bar{\Phi}(x, v)$, где $\bar{\Phi}$ есть вектор критериев оперирующей стороны, x — примененная стратегия, а v — неконтролируемые факторы). Тогда необходимо учесть сразу все возможные варианты значений неконтролируемых факторов, и множеством гарантированных оценок векторного критерия $\Phi(v)$ по отношению ко всем $v \in V$ будет $\bigcap\limits_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \le \Phi(v)\}$ (когда оперирующая сторона заинтересована в максимизации Φ). Укажем, что здесь термин "гарантированный" используется сразу в двух смыслах. В традиционном — по отношению к объективной неопределенности (к неконтролируемым факторам, включающим действия природы или противника) — было взято пересечение по $v \in V$. И в специфическом — по отношению к субъективной неопределенности (в критериях) — были выбраны гарантированные оценки, что предполагает для исследователя операций важность всех критериев, а не какого-нибудь произвольно взятого.

Рассуждая аналогично для других видов оценок, получим по четыре способа оценивания значения векторного критерия для задач максимизации и для задач минимизации. На рис. 2 приведены различные множества оценок одного и того же критерия (на рис. 2, а, в, д, ж показаны оценки в задачах максимизации, на рис. 2, б, г, е, з — минимизации). Множество любых оценок включает и недостижимые значения, в частности бесконечные. Само множество $\Phi(V)$ достижимых значений векторного критерия будем записывать для единообразия в форме $\bigcup\limits_{v\in V}\{\psi|\psi = \Phi(v)\}$, на рис. 2 оно выделено жирной линией.

Множество оптимальных значений векторного критерия как по Парето, так и по Слейтеру, вообще говоря, отличается от множества оптимальных оценок. В зависимости от типа оценки и от того, за кого из игроков построено множество оценок, возможны разные варианты соотношения множества оптимальных значений векторного критерия и множества его оптимальных оценок. В ситуациях на рис. 2, а, б, ж, з Парето-оптимальные значения векторного критерия и оценок совпадают, а множество оценок, оптимальных по Слейтеру, содержит дополнительно бесконечные лучи. На рис. 2, в, г, д, е и паретовские, и слейтеровские множества для значений векторного критерия и для его оценок различны. При этом на рис. 2, в, г векторный критерий целиком содержится во множестве оценок, а на рис. 2, д, е оптимальные оценки хуже значений критерия (что согласуется с принципом гарантированности результата в условиях объективной неопределенности).

Тем не менее ясно, что

$$\bigcup_{v\in V}\{\psi \in \mathbb{R}^Q|\psi = \Phi(v)\} \subseteq \bigcup_{v\in V}\{\psi \in \mathbb{R}^Q|\psi \leq \Phi(v)\},$$

поскольку множество справа совпадает с ПЭ-оболочкой множества в левой части, и нетрудно доказать следующее

Утверждение 2. *Справедливо включение*

$$\operatorname{Max} \bigcup_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi = \Phi(v)\} \subseteq \operatorname{Max} \bigcup_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \leq \Phi(v)\},$$

причем если Max *понимается в смысле Парето, то выполняется равенство.*

Доказательство.[1] Пусть Max понимается в смысле Парето (отличия в доказательстве включения для Max по Слейтеру приведены в квадратных скобках). Выберем произвольный вектор $\psi^0 \in \operatorname{Max} \Phi(V)$. Это значит, что $\exists v^0 \in V$, для которого $\psi^0 = \Phi(v^0)$, т.е. $\psi^0 \in \bigcup_{v \in V} \{\psi | \psi \leq \Phi(v)\}$, и пусть $\psi^0 \notin \operatorname{Max} \bigcup_{v \in V} \{\psi | \psi \leq \Phi(v)\}$, т.е. $\exists \psi' \in \bigcup_{v \in V} \{\psi | \psi \leq \Phi(v)\}$, $\psi' \neq \psi^0$, такой, что $\psi' \geq \psi^0$ $\left[\psi' > \psi^0\right]$, $\exists v' \in V$: $\psi' \leq \Phi(v')$. Следовательно, $\psi^0 \leq \Phi(v')$ $\left[\psi^0 < \Phi(v')\right]$, но так как $\Phi(v') \in \Phi(V)$, значит, $\psi^0 \notin \operatorname{Max} \Phi(V)$. Полученное противоречие доказывает, что

$$\operatorname{Max} \bigcup_{v \in V} \{\psi | \psi = \Phi(v)\} \subseteq \operatorname{Max} \bigcup_{v \in V} \{\psi | \psi \leq \Phi(v)\}.$$

Теперь возьмем произвольный $\psi^0 \in \operatorname{Max} \bigcup_{v \in V} \{\psi | \psi \leq \Phi(v)\}$, следовательно, $\exists v^0 \in V$: $\psi^0 \leq \Phi(v^0)$. Если бы $\exists i : \psi_i < \varphi_i(v^0)$, то $\exists \psi = \Phi(v^0) \geq \psi^0$, $\psi \neq \psi^0$, т.е. $\psi^0 \notin \operatorname{Max} \bigcup_{v \in V} \{\psi | \psi \leq \Phi(v)\}$. Поэтому $\psi^0 = \Phi(v^0)$, откуда $\psi^0 \in \Phi(V)$. Пусть $\psi^0 \notin \operatorname{Max} \Phi(V)$, тогда $\exists \psi' \in \Phi(V)$ такой, что $\psi' \geq \psi^0$, $\psi' \neq \psi^0$. Поскольку $\psi' \in \bigcup_{v \in V} \{\psi | \psi \leq \Phi(v)\}$, то $\psi^0 \notin \operatorname{Max} \bigcup_{v \in V} \{\psi | \psi \leq \Phi(v)\}$. Пришли к противоречию, значит,

$$\operatorname{Max} \bigcup_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \leq \Phi(v)\} \subseteq \operatorname{Max} \bigcup_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi = \Phi(v)\}.$$

[1] Доказательство также может быть построено на основании результатов из [2], касающихся ПЭ-оболочек. Для наглядности здесь приведено прямое доказательство.

Точно так же для Min выполнено

$$\bigcup_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi = \Phi(v)\} \subseteq \bigcup_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \geq \Phi(v)\},$$

$$\mathrm{Min} \bigcup_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi = \Phi(v)\} \subseteq \mathrm{Min} \bigcup_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \geq \Phi(v)\}.$$

Заметим, что утверждение 2 справедливо только для гарантированных оценок. Для защищаемых оценок множество Парето-оптимальных элементов может быть пустым, поскольку множество защищаемых оценок снизу для произвольного вектора не содержит максимальных по Парето точек, а множество защищаемых оценок сверху для произвольного вектора не содержит точек, минимальных по Парето. Кроме того, множество слейтеровских оптимумов векторного критерия может не входить в множество оптимальных по Слейтеру защищаемых оценок (рис. 2, в, г). Поэтому можно говорить только об очевидных включениях

$$\bigcup_{v \in V} \{\psi | \psi = \Phi(v)\} \subseteq \bigcup_{v \in V} \{\psi | \psi \leq \Phi(v)\} \subseteq \bigcup_{v \in V} \{\psi | \psi \mathrel{\underset{<}{=}} \Phi(v)\},$$

$$\bigcup_{v \in V} \{\psi | \psi = \Phi(v)\} \subseteq \bigcup_{v \in V} \{\psi | \psi \geq \Phi(v)\} \subseteq \bigcup_{v \in V} \{\psi | \psi \mathrel{\underset{>}{=}} \Phi(v)\}.$$

Соотношение между оптимумами множеств гарантированных и защищаемых оценок устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. *Для* Max *и* Min *в смысле Слейтера*

$$\mathrm{Max} \bigcup_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \leq \Phi(v)\} = \mathrm{Min} \bigcap_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \mathrel{\underset{>}{=}} \Phi(v)\},$$

$$\mathrm{Max} \bigcap_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \leq \Phi(v)\} = \mathrm{Min} \bigcup_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \mathrel{\underset{>}{=}} \Phi(v)\},$$

$$\mathrm{Max} \bigcup_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \mathrel{\underset{<}{=}} \Phi(v)\} = \mathrm{Min} \bigcap_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \geq \Phi(v)\},$$

$$\mathrm{Max} \bigcap_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \overset{=}{<} \Phi(v)\} = \mathrm{Min} \bigcup_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \geq \Phi(v)\}.$$

Доказательство. Все эти равенства доказываются аналогично, поэтому приведем доказательство только для первого из них (доказательство для последнего см. в [16]). Положим

$$G_1 \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \leq \Phi(v)\}, \qquad G_2 \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{v \in V} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \overset{=}{>} \Phi(v)\}.$$

Возьмем произвольный вектор ψ, принадлежащий $\mathrm{Max}\, G_1$ и, следовательно, принадлежащий самому множеству G_1. Это означает существование $v^0 \in V$ такого, что выполнено неравенство $\psi_i \leq \varphi_i(v^0) \ \ \forall i = \overline{1, Q}$. Поскольку $\psi \in \mathrm{Max}\, G_1$, то ψ не меньше любого вектора $\psi' \in G_1$, т.е. $\psi_i \geq \psi'_i$ для некоторого i. Это верно, в частности, и для $\psi' = \Phi(v')$, $v' \in V$, т.е. при всех $v' \in V$ существует i, для которого $\varphi_i(v^0) \geq \psi_i \geq \varphi_i(v')$. Если v' совпадает с v^0, то, значит, $\psi_i = \varphi_i(v')$ для некоторого i. Таким образом, выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \exists v^0 \in V\colon \ \forall i \quad \psi_i &\leq \varphi_i(v^0), \\ \exists j\colon \ \psi_j &= \varphi_j(v^0), \\ \forall v' \in V \ \ \exists i\colon \ \psi_i &\geq \varphi_i(v'). \end{aligned} \tag{7}$$

Теперь возьмем произвольный вектор ψ, удовлетворяющий условиям (7). Из (7) следует, что существует $v^0 \in V$ такой, что $\psi \leq \Phi(v^0)$, т.е. $\psi \in G_1$. Для любого другого $\psi' \in G_1$ существует $v' \in V$, для которого $\psi' \leq \Phi(v')$. Если $v' = v^0$, то для некоторого j выполнено $\psi_j = \varphi_j(v^0) = \varphi_j(v') \geq \psi'_j$, т.е. ψ не меньше ψ'. Если $v' \neq v^0$, то найдется j, для которого $\psi_j \geq \varphi_j(v') \geq \psi'_j$, т.е. в этом случае также ψ не меньше ψ'. Следовательно, $\psi \in \mathrm{Max}\, G_1$.

Покажем, что условия (7) определяют еще и множество минимальных элементов в G_2. Возьмем произвольный вектор ψ, удовлетворяющий (7). Для любого $v \in V$ найдется i, для которого $\psi_i \geq \varphi_i(v)$, т.е. $\psi \in G_2$. Теперь возьмем произвольный вектор $\psi' \in G_2$, это значит, что для любого $v \in V$ найдется такой индекс i, что $\psi'_i \geq \varphi_i(v)$. Поскольку это условие выполняется для любого $v \in V$, то и для $v^0 \in V$ из (7), т.е. для некоторого i выполнено $\psi_i \leq \varphi_i(v^0) \leq \psi'_i$ либо $\psi_i = \varphi_i(v^0) \leq \psi'_i$. Значит, вектор ψ, удовлетворяющий (7), не больше любого из векторов $\psi' \in G_2$, т.е. $\psi \in \operatorname{Min} G_2$.

Докажем, что из включения $\psi \in \operatorname{Min} G_2$ следует выполнение условий (7) для этого ψ. Зафиксируем произвольный $\psi \in \operatorname{Min} G_2$. Поскольку $\psi \in G_2$, то для любого $v \in V$ существует i, для которого $\psi_i \geq \varphi_i(v)$. Это неравенство не может быть строгим для всех $v \in V$, так как в этом случае вектор $\psi' = \psi - \epsilon$, принадлежащий G_2, будет строго меньше ψ, что противоречит выбору ψ. Значит, существует $v^0 \in V$, для которого найдется индекс j такой, что $\psi_j = \varphi_j(v^0)$. Если при этом значении v^0 существует хотя бы один i, для которого $\psi_i > \varphi_i(v^0)$, тогда вектор $\psi' = (\varphi_i(v^0), \psi_k - \epsilon | k \neq i)$, принадлежащий G_2, меньше вектора ψ. Это противоречит выбору вектора ψ, т.е. для любого $\psi \in \operatorname{Min} G_2$ выполнено (7).

Таким образом, если $\psi \in \operatorname{Max} G_1$, то выполнено (7) и, значит, $\psi \in \operatorname{Min} G_2$. И наоборот, если $\psi \in \operatorname{Min} G_2$, то выполнено (7) и $\psi \in \operatorname{Max} G_1$, значит, $\operatorname{Max} G_1 = \operatorname{Min} G_2$. Теорема доказана.

Теорема 1 имеет вспомогательный характер — будет использоваться для получения соотношений между различными определениями векторного минимакса. Тем не менее из нее можно сделать определенные содержательные выводы. Мы видим, что, к примеру, в задаче максимизации на множестве оценок снизу вектор-функции $\Phi(v)$, $v \in V$, когда оперирующая сторона выбирает v и использует гарантированные оценки, то это дает тот же результат, как если бы решалась задача минимизации оценок сверху (в полном соответствии со скалярным случаем), но при неконтролируемости фактора v и применении защищаемых оценок. Такая смена типа оценки, т.е. отношения к субъективной неопределенности, в связи со сменой отношения к объективной неопределенности (v перестает быть управлением) оказывается по теореме 1 характерной для векторного случая и проясняет смысл рассмотрения именно такой пары оценок. Основываясь на первом равенстве теоремы 1, можно говорить о защищаемости при наличии противника (выбирающего v), что несколько объясняет термин "защищаемый", введенный в [15, 2].

Следует отметить, что доказанные в теореме 1 равенства не являются векторным аналогом свойства двойственности скалярных задач на минимум и максимум, это, скорее, можно определить как свойство дополнительности. Действительно, из доказательства видно (см. также доказательства теорем в [16]), что образующие пару максимизируемое и минимизируемое множества разбивают пространство $\mathbb{R}^Q$ на две части G_1 и G_2: $\operatorname{Max} G_1 = \operatorname{Min} G_2 = G_1 \bigcap G_2$, $G_1 \bigcup G_2 = \mathbb{R}^Q$. При этом в обозначениях, к примеру, рассмотренного случая имеем $\forall \xi \in \mathbb{R}^Q \setminus G_2$ $\exists \zeta \in G_2$: $\zeta > \xi$, поскольку $\mathbb{R}^Q \setminus G_2 = \bigcup\limits_{v \in V} \{\psi | \psi < \Phi(v)\}$. Если обозначить последнее множество через G_1^0 (заменив нестрогую оценку строгой), то получим $\operatorname{Max} G_1 = G_1 \setminus G_1^0 = G_1 \bigcap G_2$.

Указанный результат допускает обобщение на случай произвольной конечной (длины s) последовательности операций пересечения и объединения. А именно, обозначим через $\mathbf{S}_a$ такую последовательность относительно переменных $a = (a_1, \ldots, a_s)$, например $\mathbf{S}_a = \bigcap\limits_{a_1 \in A_1} \bigcup\limits_{a_2 \in A_2} \ldots \bigcup\limits_{a_{s-1} \in A_{s-1}} \bigcap\limits_{a_s \in A_s}$ и т.п.

Утверждение 3. *Пусть критерий* Φ: $A_1 \times \ldots \times A_s \to \mathbb{R}^Q$,

$$G_1 = \mathbf{S}_a \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \ \psi \leq \Phi(a)\}, \quad G_1^0 = \mathbf{S}_a \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \ \psi < \Phi(a)\}.$$

Тогда $\operatorname{Max} G_1 = G_1 \setminus G_1^0 = \operatorname{Min}\{\mathbb{R}^Q \setminus G_1^0\}$.

Доказательство. Для любого $\xi \in G_1^0$ по определению найдется $\Phi(a^0) \in G_1$: $\Phi(a^0) > \xi$. Поэтому $\operatorname{Max} G_1 \subseteq G_1 \setminus G_1^0$. Если $\zeta \in G_1 \setminus \operatorname{Max} G_1$, то $\exists \psi \in G_1$: $\psi > \zeta$, причем $\exists \Phi(a') \in G_1$: $\psi \leq \Phi(a')$, т.е. $\Phi(a') > \zeta$ и $\zeta \in G_1^0$. Таким образом, $\operatorname{Max} G_1 = G_1 \setminus G_1^0$.

Обозначим $G_2 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^Q \setminus G_1^0$. Тогда $G_2 = \bar{\mathbf{S}}_a\{\psi|\psi \nless \Phi(a)\}$, где $\bar{\mathbf{S}}_a$ отличается от $\mathbf{S}_a$ заменой операций пересечения и объединения. Введем $G_2^0 \overset{\text{def}}{=} \bar{\mathbf{S}}_a\{\psi|\psi \nleq \Phi(a)\} = \mathbb{R}^Q \setminus G_1 \subset G_2$. Для любого $\xi \in G_2^0$ найдется $\Phi(a^0) \in G_2$: $\Phi(a^0) < \xi$. Следовательно, $\xi \notin \operatorname{Min} G_2$, так что $\operatorname{Min} G_2 \subseteq G_2 \setminus G_2^0 = G_2 \bigcap G_1$. Если $\zeta \in G_2 \setminus \operatorname{Min} G_2$, то $\exists \psi \in G_2$: $\psi < \zeta$, при этом $\exists \Phi(a') \in G_2$: $\psi \nless \Phi(a')$, а значит, $\zeta \nleq \Phi(a')$ (действительно, при $\zeta \leq \Phi(a')$ и $\psi < \zeta$ получили бы $\psi < \Phi(a')$). Отсюда $\zeta \in G_2^0$. В результате $\operatorname{Min} G_2 = G_2 \setminus G_2^0 = G_2 \bigcap G_1 = G_1 \setminus G_1^0 = \operatorname{Max} G_1$. Утверждение доказано.

Аналогично для $G_1' = \mathbf{S}_a\{\psi|\psi \geq \Phi(a)\}$ выполнено равенство $\operatorname{Min} G_1' = \operatorname{Max}\{\mathbb{R}^Q \setminus {G_1'}^0\}$, где ${G_1'}^0 = \mathbf{S}_a\{\psi|\psi > \Phi(a)\}$.

Нетрудно видеть, что из этих результатов вытекают соответствующие равенства для защищаемых оценок. Таким образом, теорема 1 может быть доказана на основе утверждения 3. Полученные соотношения будут использоваться и в дальнейшем при исследовании векторных задач с неопределенностью.

§2. Векторные минимакс и максимин

Задачи оптимизации векторного критерия при наличии неопределенных факторов (природы или противника), понимаемые как задачи поиска максимина или минимакса векторного критерия, были по-разному формализованы в [15, 2, 12, 6, 17, 18]. Поэтому сначала приведем и систематизируем результаты, полученные в этих работах, а затем установим соотношения между указанными определениями.

В [15, 2] предложены два подхода к определению решений многокритериальных задач с неопределенным фактором — гарантированный и защищаемый. Авторы вводят для оперирующей стороны и для противника множества гарантированных выигрышей (не ухудшаемых ни по одной компоненте) и множества защищаемых выигрышей (не ухудшаемых сразу по всем компонентам).

Как уже указывалось, с содержательной точки зрения концепция гарантированности соответствует тому, что оперирующая сторона заинтересована в оптимизации по всем имеющимся у нее критериям, а концепция защищаемости — тому, что достаточной является оптимизация хотя бы одного из критериев. Концепция защищаемости не является характерной для задач многокритериальной оптимизации, так как большинство из них предполагает, что все критерии являются существенными. Например, для задач оптимизации многопользовательских сетей концепция защищаемости соответствует стремлению улучшить связь какой-нибудь абонентской пары, — все равно какой. Для задач, в которых оперирующая сторона интересуется всеми частными критериями, множество защищаемых оценок оказывается слишком широким, а потому менее информативным. Однако, как будет показано ниже, это не означает, что данное множество надо исключить из рассмотрения.

В основе определений векторного максимина и минимакса, предлагаемых в [12, 19, 5], по-видимому, лежит непосредственное последовательное применение операций Max и Min (либо наоборот) с учетом приведенной в § 1, п. 2 формулы (5) оптимума для отображений. Тем не менее последняя формула адекватна не для всех постановок (см. § 3). Трактовка определений из [12, 19, 5] в качестве решений векторных задач с неопределенностью окажется допустимой лишь при условии информированности оперирующей стороны о значениях неопределенных факторов к моменту принятия решения.

Следует отметить, что в задачах с векторным критерием в отличие от скалярных постановок существенным является не только порядок действий оперирующей стороны и противника, но и то, за какого из игроков проводится исследование, т.е. чьи интересы представляет оперирующая сторона. В дальнейшем будем различать максимин (минимакс) за максимизирующего и за минимизирующего игрока, обозначая их соответственно

$\overline{\mathrm{Max}}\,\mathrm{Min}$ ($\mathrm{Min}\,\overline{\mathrm{Max}}$) и $\mathrm{Max}\,\overline{\mathrm{Min}}$ ($\overline{\mathrm{Min}}\,\mathrm{Max}$). В первом случае считаем, что оперирующая сторона стремится к максимизации, а во втором — к минимизации вектора критериев. При оптимизации в оценках будем пользоваться в задачах за максимизирующего игрока оценками снизу, а за минимизирующего — оценками сверху (см. § 1, п. 3).

Для удобства сравнения всегда будет рассматриваться один и тот же векторный критерий $\Phi(x,y) \in \mathbb{R}^Q$, где $x \in X$ — переменная максимизации, а $y \in Y$ — минимизации. При этом если исследуется задача за максимизирующего игрока, то оперирующая сторона контролирует выбор $x \in X$, а выбор $y \in Y$ является управлением противника или реализацией природной неопределенности. Для задачи за минимизирующего игрока — наоборот. Кроме того, будем далее употреблять термины *информированный* и *неинформированный* игрок в зависимости от порядка ходов. Так, когда речь идет о максимине, то максимизирующий игрок оказывается неинформированным, делает свой ход (выбирает $x \in X$) первым, а минимизирующий — информированным, он ходит (выбирает $y \in Y$) вторым, уже зная конкретную реализацию $x \in X$. В задачах на минимакс — наоборот. Подчеркнем, что данная терминология не связана с тем, за какого из игроков проводится исследование.

1. Векторный минимакс. Задача на векторный минимакс за максимизирующего игрока была подробно изучена в [6, 17, 13]. В этих работах на основе концепции гарантированности [15, 2] предложено несколько вариантов формализации значения $\mathop{\mathrm{Min}}\limits_{y\in Y}\mathop{\overline{\mathrm{Max}}}\limits_{x\in X}\Phi(x,y)$, которые (если убрать ограничения на используемые оценки) приводят к следующему определению:

$$\mathop{\mathrm{Min}}\limits_{y\in Y}\mathop{\overline{\mathrm{Max}}}\limits_{x\in X}\Phi(x,y) = F_{\leq} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Max}\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{x\in X}\{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \leq \Phi(x,y)\}.$$

Такое определение соответствует оптимизации множества гарантированных оценок векторного критерия. (Поскольку в рассматриваемом случае исследования проводятся за максимизирующего игрока, то векторный критерий задает верхнюю границу его возможностей.) Определение $\operatorname*{Min}_{y\in Y}\overline{\operatorname*{Max}_{x\in X}}\Phi(x,y)$, не предполагающее перехода к оценкам, имеет вид

$$\operatorname*{Min}_{y\in Y}\overline{\operatorname*{Max}_{x\in X}}\Phi(x,y) = F_{=} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max}\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{x\in X}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi=\Phi(x,y)\}.$$

Но это определение применимо только в тех случаях, когда известно, что множество $\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{x\in X}\{\psi|\psi=\Phi(x,y)\}$ не является пустым (см. [17]). Концепция защищаемости из [2] в задаче поиска минимакса векторного критерия за максимизирующего игрока приводит к определению

$$\operatorname*{Min}_{y\in Y}\overline{\operatorname*{Max}_{x\in X}}\Phi(x,y) = F_{\overline{\overline{<}}} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max}\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{x\in X}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\mathrel{\overline{\overline{<}}}\Phi(x,y)\}.$$

Отметим, что в исходных работах [15, 2] все определения были даны за неинформированного игрока (хотя авторы этого явно не указывали) и потому значения $F_{\leq}$, $F_{\overline{\overline{<}}}$ не рассматривались. Тем не менее предложенный в [15, 2] подход допускает обобщение и для постановок за информированного игрока, что было проведено в [6, 17].

В [12] векторный минимакс введен следующим образом:

$$\operatorname*{Min}_{y\in Y}\overline{\operatorname*{Max}_{x\in X}}\Phi(x,y) = F'_{=} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Min}\bigcup_{y\in Y}\operatorname{Max}\bigcup_{x\in X}\{\psi|\psi=\Phi(x,y)\}.$$

Это определение получено путем распространения определения минимакса скалярной функции. Авторы не дают никаких пояснений к тому, за какого игрока проводится исследование. Однако исходя из принципа гарантированного результата, являющегося основным при решении задач с объективной неопределенностью, для $F'_{=}$ можно сказать, что такое определение корректно только за информированного игрока (в данном случае это — максимизирующий игрок). Обсудим сказанное.

На рис. 3 показан пример двухкритериальной задачи с целевой функцией $\Phi(x,y)=\{\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)\}$ (ее значения выделены на рисунке жирной линией). Множество стратегий противника состоит из двух элементов, $Y=\{y^1,y^2\}$. После того, как противник сделал свой выбор, оперирующая сторона выбирает стратегию $x\in X$. В результате действий обоих игроков реализуется точка (x,y), которой соответствует значение векторной функции $\Phi(x,y)$. Множество $\bigcap\limits_{y\in Y}\bigcup\limits_{x\in X}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\le\Phi(x,y)\}$ выделено “клеточкой”, видно, что Max этого множества $F_{\le}$ состоит из точки B в случае, когда Max понимается в смысле Парето, а в слейтеровском случае к точке B добавляются лучи, исходящие из нее в $-\infty$. Значению $F_=$ соответствует точка H как в паретовском, так и в слейтеровском случае, значению $F'_=$ соответствует множество, состоящее из отрезков a и b (они оптимальны как по Парето, так и по Слейтеру).

С содержательной точки зрения $F_=$ определяет множество, каждая точка которого является достижимой для оперирующей стороны при любых действиях противника. Множество $F_{\le}$ показывает, на какую величину каждого частного критерия оперирующая сторона может наверняка рассчитывать. При этом подразумевается, что в конечном счете реализуется ситуация, соответствующая либо $\Phi(x,y^1)$, либо $\Phi(x,y^2)$, и по какой-то из компонент векторного критерия оперирующая сторона получит больше (в общем случае не меньше по всем компонентам), чем то, что гарантирует $F_{\le}$. Множество, определяемое $F'_{=}$, объединяет все достижимые оценки в расчете, что в результате действий оперирующей стороны и противника реализована будет одна из них.

Хотя $F'_{=}$ дает наиболее точное описание возможных значений $\operatorname*{Min}_{y\in Y}\overline{\operatorname*{Max}_{x\in X}}\Phi(x,y)$, оно имеет один существенный недостаток с точки зрения возможности для ЛПР принятия решения на основе этого множества. Действительно, при таком определении нарушается структура зависимости множества стратегий оперирующей стороны от выбора противника, поскольку результатом является одно множество, а не набор множеств, соответствующий различным стратегиям противника. Определение $F'_{=}$ также не рассчитано на случай связанных ограничений, когда при некотором выборе противника $y \in Y$ допустимой является не любая стратегия оперирующей стороны $x \in X$.

Можно модифицировать определение $F'_{=}$ для гарантированных оценок векторного критерия, т.е. ввести

$$\operatorname*{Min}_{y\in Y}\overline{\operatorname*{Max}_{x\in X}}\Phi(x,y) = F'_{\le} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Min}\bigcup_{y\in Y}\operatorname{Max}\bigcup_{x\in X}\{\psi\in \mathbb{R}^Q|\psi\le\Phi(x,y)\}.$$

На основе концепции защищаемости придем к модификации

$$\operatorname*{Min}_{y\in Y}\overline{\operatorname*{Max}_{x\in X}}\Phi(x,y) = F'_{\overset{=}{<}} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Min}\bigcup_{y\in Y}\operatorname{Max}\bigcup_{x\in X}\{\psi\in \mathbb{R}^Q|\psi\overset{=}{<}\Phi(x,y)\}.$$

Теперь рассмотрим понятие минимакса векторного критерия с точки зрения минимизирующего игрока: $\overline{\operatorname*{Min}_{y\in Y}}\operatorname*{Max}_{x\in X}\Phi(x,y)$. В случае скалярного критерия такое понятие не рассматривается, поскольку очевидно равенство $\min\limits_{y}\max\limits_{x}\varphi(x,y) =$
$= \min\limits_{y}\max\limits_{x,\psi}\{\psi\in\mathbb{R}^1|\ \psi\le\varphi(x,y)\} = \min\limits_{y,\psi}\{\psi\in\mathbb{R}^1|\ \psi\ge\max\limits_{x}\varphi(x,y)\}$. В векторном же случае по теореме 1 сходное равенство имеет место лишь при смене типа оценки (см. ниже теорему 2). Поэтому понятие минимакса за минимизирующего игрока приходится исследовать отдельно.

Согласно концепции гарантированности [2]

$$\overline{\mathop{\mathrm{Min}}_{y\in Y}}\,\mathop{\mathrm{Max}}_{x\in X}\Phi(x,y) = F_{\geq} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Min}\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\geq\Phi(x,y)\}.$$

Используя концепцию защищаемости, получим такое значение векторного минимакса за минимизирующего игрока:

$$\overline{\mathop{\mathrm{Min}}_{y\in Y}}\,\mathop{\mathrm{Max}}_{x\in X}\Phi(x,y) = F_{\underset{>}{=}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Min}\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\underset{>}{=}\Phi(x,y)\}.$$

Определение из [12, 5] не делает различия между тем, за кого из игроков ведется исследование, и приводит к уже известному $F'_{=}$. Однако для данной постановки это определение не имеет содержательного смысла. Действительно, когда мы рассуждали за максимизирующего игрока, то выбор точки $d\in D(y)$, где $D(y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathop{\mathrm{Max}}_{x\in X}\Phi(x,y)$, являлся контролируемым фактором (неопределенность субъективна) и можно было пользоваться формулой (5) для значения минимума в задаче (4). Но когда исследование проводится с точки зрения минимизирующего игрока, то неправильно минимизировать по всему множеству $D(Y)$, поскольку выбор точки $d\in D(y)$ не является управлением минимизирующей стороны. Покажем это на примере рис. 1. Пусть множество стратегий минимизирующего игрока состоит из двух стратегий $Y=(v^1,v^2)$. Видно, что определению из [12] соответствует нижняя огибающая линий $D(v^1)$ и $D(v^2)$. Естественно, что выигрыш максимизирующего игрока не будет меньше, чем любое из значений этой огибающей, т.е. она представляет гарантированный выигрыш максимизирующего игрока. В то же время минимизирующий игрок не может рассчитывать наверняка ни на одну из точек $D(v^1)\bigcup D(v^2)$ и его гарантированная оценка будет хуже и $D(v^1)$, и $D(v^2)$.

По тем же причинам, модифицируя $F'_{=}$, не получить адекватного определения для гарантированных оценок векторного критерия за минимизирующего игрока. Более того, формально Max в выражении $\mathrm{Min}\bigcup\limits_{y\in Y}\mathrm{Max}\bigcup\limits_{x\in X}\{\psi|\psi\geq\Phi(x,y)\}$ бесконечен, и аналогично для защищаемых оценок. Таким образом, для определения минимакса, предложенного в [12], имеет смысл рассматривать лишь две модификации $F'_{\leq}$ и $F'_{\substack{=\\<}}$ (в гарантированных и защищаемых оценках за максимизирующего игрока).

Сравним данные определения $F_{\leq}$, $F'_{\leq}$, $F_{\geq}$, $F'_{\substack{=\\<}}$, $F_{\substack{=\\<}}$ и $F_{\substack{=\\>}}$ для случая оптимизации по Слейтеру. Применив теорему 1 и утверждение 1, получим $\mathrm{Min}\bigcup\limits_{y\in Y}\mathrm{Max}\bigcup\limits_{x\in X}\{\psi|\psi\leq\Phi(x,y)\}=$

$$=\mathrm{Min}\bigcup_{y\in Y}\mathrm{Min}\bigcap_{x\in X}\{\psi|\psi\overset{=}{>}\Phi(x,y)\}=\mathrm{Min}\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{\psi|\psi\overset{=}{>}\Phi(x,y)\},$$

т.е. $F'_{\leq}=F_{\substack{=\\>}}$, и аналогично $F'_{\substack{=\\<}}=F_{\geq}$.

Справедливы также следующие соотношения между минимаксом за максимизирующего игрока и за минимизирующего.

Теорема 2. *Для слейтеровских значений* Min *и* Max

$$\mathrm{Max}\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{x\in X}\{\psi|\psi\leq\Phi(x,y)\}=\mathrm{Min}\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{\psi|\psi\overset{=}{>}\Phi(x,y)\},$$
$$\mathrm{Max}\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{x\in X}\{\psi|\psi\overset{=}{<}\Phi(x,y)\}=\mathrm{Min}\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{\psi|\psi\geq\Phi(x,y)\},$$

т.е. $F_{\leq}=F_{\substack{=\\>}}$ и $F_{\substack{=\\<}}=F_{\geq}$.

Доказательство очевидно вытекает из утверждения 3 (прямое доказательство см. в [16]).

В итоге для слейтеровских определений оказалось, что

$$F_{\leq}=F_{\substack{=\\>}}=F'_{\leq}\quad\text{и}\quad F_{\geq}=F_{\substack{=\\<}}=F'_{\substack{=\\<}}.\tag{8}$$

Поясним данные результаты. Во-первых, для задачи за информированного игрока: модифицируя определение векторного минимакса из [12] путем перехода от множеств достижимости к гарантированным (или защищаемым) оценкам, получаем в точности определение, построенное в [6] с позиции принципа гарантированности (либо защищаемости) из [2]. А во-вторых, применение защищаемых оценок векторного критерия одним из игроков эквивалентно использованию гарантированных оценок другим. Таким образом, хотя в [2] не исследовались задачи за информированного игрока, эквивалентные определения были построены на базе защищаемых оценок. Отметим также, что равенство $F_{\leq} = F'_{\leq}$ получено не напрямую, а через равенства $F_{\leq} = F_{\geqq}$ и $F_{\geqq} = F'_{\leq}$ путем перехода к защищаемым оценкам. Прямого доказательства указанного равенства не известно. В частности, в [13] оно доказано лишь в предположении определенной регулярности задачи (за счет параметризации обоих множеств с помощью обратной логической свертки). Это проясняет смысл исследования и использования множеств защищаемых оценок.

Для паретовских значений оптимумы в защищаемых оценках, как уже указывалось, могут не достигаться. Однако и для гарантированных оценок равенства $F_{\leq}$ и $F'_{\leq}$ в паретовском случае, вообще говоря, не будет (см. рис. 4).

Действительно на рис. 4 приведен пример двухкритериальной задачи, $\Phi(x,y) = \{\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)\}$, $Y = \{y^1, y^2\}$, в которой равенства $F'_{\leq} = F_{\geqq}$, $F_{\geqq} = F_{\leq}$ и $F'_{\leq} = F_{\leq}$ не выполняются, если понимать Max и Min в смысле Парето. В таком случае множество $F'_{\leq}$ состоит из отрезка a и точки B, множество $F_{\leq}$ состоит из единственной точки A (рис. 4, а), а множество $F_{\geqq}$ пустое (рис. 4, б). Если Max и Min понимаются в смысле Слейтера, то $F'_{\leq} = F_{\geqq} = F_{\leq}$, на рис. 4 этому равенству соответствует множество, состоящее из точки A и исходящих из нее лучей.

2. Векторный максимин. Рассмотрим понятие максимина векторного критерия. Если бы речь шла о скалярном критерии, то отдельного рассмотрения максимина можно было бы не проводить, поскольку $\max\limits_{y} \min\limits_{x} \varphi(x,y) = -\min\limits_{y} \max\limits_{x}(-\varphi(x,y))$. Аналогично и в векторном случае достаточно задать максимин равенствами

$$\begin{aligned} \overline{\mathop{\mathrm{Max}}_{x\in X}} \mathop{\mathrm{Min}}_{y\in Y} \Phi(x,y) &= -\overline{\mathop{\mathrm{Min}}_{x\in X}} \mathop{\mathrm{Max}}_{y\in Y}(-\Phi(x,y)), \\ \mathop{\mathrm{Max}}_{x\in X} \overline{\mathop{\mathrm{Min}}_{y\in Y}} \Phi(x,y) &= -\mathop{\mathrm{Min}}_{x\in X} \overline{\mathop{\mathrm{Max}}_{y\in Y}}(-\Phi(x,y)). \end{aligned} \tag{9}$$

Тем не менее для полноты картины выведем эти определения напрямую и обсудим имеющиеся в литературе.

Как и для минимакса, будем различать максимин за максимизирующего игрока и за минимизирующего, обозначая их соответственно $\overline{\mathop{\mathrm{Max}}_{x\in X}} \mathop{\mathrm{Min}}_{y\in Y} \Phi(x,y)$ и $\mathop{\mathrm{Max}}_{x\in X} \overline{\mathop{\mathrm{Min}}_{y\in Y}} \Phi(x,y)$. Различие между максимином и минимаксом за одного и того же игрока состоит в его информированности о выборе противника (см. п. 4 для сравнения максимина и минимакса).

Следуя концепции гарантированности для оценок векторного критерия $\Phi(x,y)$ [15, 2], определим максимин за максимизирующего игрока формулой

$$\overline{\mathop{\mathrm{Max}}_{x\in X}} \mathop{\mathrm{Min}}_{y\in Y} \Phi(x,y) = f_{\leq} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Max} \bigcup_{x\in X} \bigcap_{y\in Y} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \leq \Phi(x,y)\}.$$

Укажем, что определить аналогичным образом максимин, не переходя к оценкам, в общем случае не удается, так как множество

$\bigcap\limits_{y\in Y}\{\psi|\psi = \Phi(x,y)\}$ может быть пустым для любого $x \in X$. (Но из этого не следует, что нельзя дать гарантированной оценки $f_{\leq}$ результата.) Для множества защищаемых оценок

$$\overline{\operatorname*{Max}_{x\in X}}\operatorname*{Min}_{y\in Y}\Phi(x,y) = f_{\overset{=}{<}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Max}\bigcup_{x\in X}\bigcap_{y\in Y}\{\psi \in \mathbb{R}^Q|\psi \overset{=}{<} \Phi(x,y)\}.$$

В [12, 19, 5] векторный максимин определяется как

$$\operatorname*{Max}_{x\in X}\operatorname*{Min}_{y\in Y}\Phi(x,y) = f'_{=} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Max}\bigcup_{x\in X}\operatorname{Min}\bigcup_{y\in Y}\{\psi|\psi = \Phi(x,y)\}.$$

Модификация этого определения с учетом оптимизации в оценках за максимизирующего игрока формально бессмысленна в силу неограниченности множества оценок снизу (как гарантированных, так и защищаемых). Но и содержательно определение $f'_{=}$ не имеет смысла в задаче за неинформированного игрока по тем же причинам, что обсуждались выше в связи с $F'_{=}$.

На рис. 5 приведен пример двухкритериальной задачи, $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$, в которой оперирующая сторона осуществляет выбор стратегии из двухэлементного множества $X = \{x^1, x^2\}$, и противник также имеет на выбор две стратегии: $Y = \{y^1, y^2\}$. Для этой задачи определим множества $f'_{=}$, $f_{\leq}$, $f_{\overset{=}{<}}$.

На рис. 5 множеству $f_{\leq}$ соответствует линия, содержащая точки A и B (они являются Парето-оптимальными), множество $f'_{=}$

состоит из точек $\Phi(x^1,y^1)$, $\Phi(x^2,y^1)$, $\Phi(x^1,y^2)$, $\Phi(x^2,y^2)$, множество $\bigcup\limits_{x\in X}\bigcap\limits_{y\in Y}\{\psi|\psi \overset{=}{<} \Phi(y,x)\}$ показано на рисунке штриховкой. В случае, когда Max понимается в смысле Слейтера, $f_{\overset{=}{<}}$ состоит из точки C и исходящих из нее лучей. Если же понимать Max в смысле Парето, то $f_{\overset{=}{<}} = \emptyset$.

Существенная разница между $f'_{=}$ и $f_{\leq}$ состоит в том, что $f'_{=}$ содержит только значения векторного критерия, соответствующие конкретным исходам. Естественно, что после действий игроков реализуется какая-то одна из этих точек, но заранее нельзя сказать какая именно, т.е. оперирующая сторона не может положиться наверняка ни на одну точку из $f'_{=}$. В случае зависимости множества допустимых стратегий второго игрока от выбора первого (т.е. $Y = Y(x)$), оперирующая сторона должна также иметь возможность учесть этот факт. В примере, представленном на рис. 5, она может рассчитывать на одну из двух пар значений критерия: $\Phi(x^1,y^1)$ и $\Phi(x^1,y^2)$ или $\Phi(x^2,y^1)$ и $\Phi(x^2,y^2)$; важно то, что эти четыре точки нельзя объединять в одно множество. Поэтому определение максимина в виде $f'_{=}$ может быть в принципе пригодно только в случае независимости множеств стратегий игроков и далее рассматриваться не будет.

Множество $f_{\leq}$ является более приемлемым для априорной оценки результата, поскольку показывает, на какой максимальный вектор выигрышей оперирующая сторона может рассчитывать при любом поведении противника. Множество наилучших защищаемых оценок $f_{\overset{=}{<}}$ оказывается наименее информативным.

Для понятия векторного максимина за минимизирующего игрока выпишем определения того же типа, что и для максимизирующего. Если учесть, что минимизирующая сторона пользуется для вектора критериев оценками сверху, то будем иметь следующие два варианта:

$$\underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\,\overline{\underset{y\in Y}{\mathrm{Min}}}\,\Phi(x,y) = f_{\geq} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Min}\bigcap_{x\in X}\bigcup_{y\in Y}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\geq\Phi(x,y)\},$$

$$\operatorname*{Max}_{x\in X}\overline{\operatorname*{Min}_{y\in Y}}\Phi(x,y) = f_{\underset{>}{=}} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Min}\bigcap_{x\in X}\bigcup_{y\in Y}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi \underset{>}{=} \Phi(x,y)\}.$$

Заметим, что для определения максимина из [12] за минимизирующего игрока уже можно использовать определение $f'_{=}$ и его модификации с оценками (это связано с тем, что фактически, как объяснялось в п. 1 для $F'_{=}$, все определения в [12] построены в расчете на информированного игрока). Получаем еще

$$\operatorname*{Max}_{x\in X}\overline{\operatorname*{Min}_{y\in Y}}\Phi(x,y) = f'_{\geq} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max}\bigcup_{x\in X}\operatorname{Min}\bigcup_{y\in Y}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi \geq \Phi(x,y)\},$$

$$\operatorname*{Max}_{x\in X}\overline{\operatorname*{Min}_{y\in Y}}\Phi(x,y) = f'_{\underset{>}{=}} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max}\bigcup_{x\in X}\operatorname{Min}\bigcup_{y\in Y}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi \underset{>}{=} \Phi(x,y)\}.$$

Сравнивая все приведенные определения для векторного максимина, аналогично тому, как это было сделано для минимакса в теореме 2, придем в слейтеровском случае к равенствам $f'_{\geq} = f_{\underset{<}{=}}$, $f'_{\underset{>}{=}} = f_{\leq}$, $f_{\geq} = f_{\underset{<}{=}}$, $f_{\underset{>}{=}} = f_{\leq}$, т.е.

$$f_{\geq} = f_{\underset{<}{=}} = f'_{\geq} \quad \text{и} \quad f_{\leq} = f_{\underset{>}{=}} = f'_{\underset{>}{=}}. \tag{10}$$

3. Определение значения максимина (минимакса) векторного критерия путем сведения к задаче на Max (Min). Рассмотрим еще один подход к определению максимина и минимакса векторного критерия, основанный на известном и широко используемом сведении задачи поиска максимина скалярной функции к задаче на максимум [20, 1, 10, 11]. В скалярном случае задачу отыскания максимина $\max\limits_{x\in X}\min\limits_{y\in Y}\varphi(x,y)$ можно записать согласно [20] как задачу математического программирования с бесконечным числом ограничений

$$\max_{x\in X,\ b\in B(x)} b,$$

где $B(x) = \{b \in \mathbb{R}^1 | b \leq \varphi(x,y) \quad \forall y \in Y\}$, b — вспомогательная переменная. Задачу на векторный максимин $\operatorname*{Max}_{x\in X} \operatorname*{Min}_{y\in Y} \Phi(x,y)$ можно формально переписать аналогичным образом:

$$\operatorname*{Max}_{x\in X,\ b\in B(x)} b, \tag{11}$$

где $b = (b_1, \ldots, b_Q)$. Множество $B(x)$ в силу специфики задач векторной оптимизации определяется неоднозначно, поскольку неоднозначно осуществляется сравнение векторов.

Если сравнивать векторы по отношению $\leq$, то

$$B(x) = B_{\leq}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in \mathbb{R}^Q | b \leq \Phi(x,y) \ \ \forall y \in Y\}.$$

Если же в качестве отношения порядка использовать $\overset{=}{<}$, то

$$B(x) = B_{\overset{=}{<}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in \mathbb{R}^Q | b \overset{=}{<} \Phi(x,y) \ \ \forall y \in Y\}.$$

(Очевидно, что $B_{\leq}(x) \subseteq B_{\overset{=}{<}}(x)$.) Заметим, что

$$B_{\leq}(x) = \bigcap_{y\in Y} \{b | b \leq \Phi(x,y)\}, \quad B_{\overset{=}{<}}(x) = \bigcap_{y\in Y} \{b | b \overset{=}{<} \Phi(x,y)\}.$$

Кроме того, задача (11) может быть переписана в виде

$$\operatorname*{Max}_{x\in X,\ b\in B(x)} b = \operatorname{Max}\{b \in \mathbb{R}^Q |\ b \in \bigcup_{x\in X} B(x)\} = \operatorname{Max} \bigcup_{x\in X} B(x).$$

Таким образом, процедура сведения в зависимости от выбранного отношения порядка среди векторов приводит задачу на векторный максимин к поиску

$$\operatorname{Max} \bigcup_{x\in X} \bigcap_{y\in Y} \{b \in \mathbb{R}^Q | b \leq \Phi(x,y)\} = f_{\leq} \quad \text{либо}$$

$$\operatorname{Max} \bigcup_{x\in X} \bigcap_{y\in Y} \{b \in \mathbb{R}^Q | b \overset{=}{<} \Phi(x,y)\} = f_{\overset{=}{<}}.$$

Точно так же можно привести задачу на векторный минимакс $\operatorname*{Min}_{y\in Y}\operatorname*{Max}_{x\in X}\Phi(x,y)$ к задаче на минимум

$$\operatorname*{Min}_{y\in Y,\ c\in C(y)} c,$$

где $c=(c_1,\ldots,c_Q)$, а точечно-множественное отображение $C(\cdot)$ определяется выбором отношения порядка и имеет вид

$$C(y)\stackrel{\mathrm{def}}{=}C_{\geq}(y)=\{c\in\mathbb{R}^Q|c\geq\Phi(x,y)\ \ \forall x\in X\}\quad \text{либо}$$

$$C(y)\stackrel{\mathrm{def}}{=}C_{\geqq}(y)=\{c\in\mathbb{R}^Q|c\geqq\Phi(x,y)\ \ \forall x\in X\}.$$

Ясно, что $C_{\geq}(y)\subseteq C_{\geqq}(y)$ и

$$C_{\geq}(y)=\bigcap_{x\in X}\{c|c\geq\Phi(x,y)\},\quad C_{\geqq}(y)=\bigcap_{x\in X}\{c|c\geqq\Phi(x,y)\},$$

а также

$$\operatorname*{Min}_{y\in Y,\ c\in C(y)} c=\operatorname{Min}\{c\in\mathbb{R}^Q|\ c\in\bigcup_{y\in Y}C(y)\}=\operatorname{Min}\bigcup_{y\in Y}C(y).$$

Поэтому задача на векторный минимакс аналогично максимину в зависимости от выбора отношения порядка может быть определена как

$$\operatorname{Min}\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{c\in\mathbb{R}^Q|c\geq\Phi(x,y)\}=F_{\geq}\quad \text{либо}$$

$$\operatorname{Min}\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{c\in\mathbb{R}^Q|c\geqq\Phi(x,y)\}=F_{\geqq}.$$

Получили, что применение векторного аналога сведения максиминных (минимаксных) задач к задачам на максимум (минимум) приводит к определениям, построенным с помощью других подходов. Необходимо отметить, что процедура сведения применяется к задаче поиска оптимума за неинформированного игрока, поэтому таким образом напрямую нельзя вывести определения за информированного. Но в свете равенств (8), (10) можно сказать, что путем сведения максимина и минимакса к задачам на максимум и минимум (соответственно) можно получить любое из множеств, которые в дальнейшем будут использоваться для определения векторного максиминимакса.

4. Соотношения для максимина и минимакса. Таким образом, для слейтеровских значений имеем всего по два различных определения (8) и (10) для максимина и для минимакса векторного критерия. Они соответствуют гарантированным и защищаемым оценкам либо рассмотрению задач с неопределенностью с позиций разных сторон. Отметим, что равенства (9) также оказались выполненными. В частности,

$$\operatorname{Max} \bigcup_{x\in X} \bigcap_{y\in Y} \{\psi|\psi \le \Phi(x,y)\} = -\operatorname{Min} \bigcup_{x\in X} \bigcap_{y\in Y} \{\psi|\psi \ge -\Phi(x,y)\},$$

т.е. минимакс за минимизирующего игрока — это то же самое, что максимин за максимизирующего (с учетом смены знака функции). На основании равенств (9) можно сделать вывод, что из имеющихся определений для задач с неконтролируемыми факторами всего два различаются принципиально. Поскольку в дальнейшем нас будет интересовать максимизирующий игрок, то выберем определения (в гарантированных оценках)

$$\operatorname*{Min}_{y\in Y} \operatorname*{\overline{Max}}_{x\in X} \Phi(x,y) = F_{\le} = \operatorname{Max} \bigcap_{y\in Y} \bigcup_{x\in X} \{\psi|\psi \le \Phi(x,y)\}, \qquad (12)$$

$$\operatorname*{\overline{Max}}_{x\in X} \operatorname*{Min}_{y\in Y} \Phi(x,y) = f_{\le} = \operatorname{Max} \bigcup_{x\in X} \bigcap_{y\in Y} \{\psi|\psi \le \Phi(x,y)\}. \qquad (13)$$

Эти определения не сводятся одно к другому заменой игроков, поскольку их различие состоит в информированности игрока, за которого проводится исследование. Так $F_{\le}$ соответствует информированной оперирующей стороне, $f_{\leq}$ — неинформированной, и привести 1-е определение ко 2-му можно лишь перестановкой порядка действий.

Для паретовских значений (результата максимизирующей оперирующей стороны) определения (12), (13) также оказываются наиболее подходящими. Действительно, при оптимизации в защищаемых оценках, как отмечалось в § 1, п. 3, множество Парето, вообще говоря, может быть пустым. Определения из [12] и их модификации в гарантированных оценках, помимо уже указанных недостатков, обладают еще одним: множество Парето (когда Max, Min в $F'_{\leq}$ понимаются в смысле Парето) может в общем случае не включаться в множество Слейтера (когда Max, Min в $F'_{\leq}$ понимаются в смысле Слейтера). Поэтому предлагается в качестве базовых для векторного минимакса и максимина применять определения (12), (13), понимая Max по Слейтеру или Парето в зависимости от трактовки исходной минимаксной (максиминной) задачи. Трактовка осуществляется оперирующей стороной, т.е. тем игроком, за кого проводится рассмотрение (независимо от его информированности).

Замечание 1. На содержательном уровне значения (12), (13) определяют наилучший гарантированный выигрыш оперирующей стороны в задаче векторной максимизации при наличии неопределенности. Формула (12) соответствует постановке, в которой оперирующая сторона рассчитывает на получение информации о конкретном реализовавшемся значении $y \in Y$ неопределенного фактора к моменту выбора своей стратегии $x \in X$, а (13) — случаю отсутствия такой информации. Действительно, в обеих формулах максимизируемое множество является множеством всех гарантированных оценок снизу вектора критериев для соответствующей информационной постановки. А именно, какую ни возьми точку из этого множества, оперирующая сторона может гарантированно обеспечить не меньше по каждому из критериев, и для всякой точки вне множества при любых действиях оперирующей стороны найдется такой сценарий реализации неопределенности в рамках заданной информированности, что хотя бы по одному критерию оперирующая сторона получит меньше. После выбора максимальных элементов указанного множества имеем неулучшаемые гарантированные оценки. Равенства (8) и (10) в этом контексте означают эквивалентность в слейтеровском случае игрового минимаксного подхода (предполагающего наличие противника) и подхода, основанного на принципе гарантированности результата при учете неопределенности. Так что, как и для скалярных задач, гарантированный подход в векторной оптимизации приводит к минимаксным/максиминным постановкам.

Сравним значения (12) и (13). Нетрудно видеть, что

$$\bigcup_{x\in X}\bigcap_{y\in Y}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\le\Phi(x,y)\}\subseteq\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{x\in X}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\le\Phi(x,y)\}$$

$$\left(\text{и также }\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{\psi|\psi\ge\Phi(x,y)\}\subseteq\bigcap_{x\in X}\bigcup_{y\in Y}\{\psi|\psi\ge\Phi(x,y)\}\right),$$

поскольку из условия существования $x'\in X$ такого, что для любого $y\in Y$ $\psi\le\Phi(x',y)$ следует, что для любого $y\in Y$ существует $x'\in X$ (одно для всех y), для которого $\psi\le\Phi(x',y)$. Кроме того, для любых двух множеств D, D', если $D\subseteq D'$, то

$$P(D)\subseteq S(D)\subseteq \operatorname{eph}S(D')=\operatorname{eph}P(D').$$

Действительно, пусть для определенности $S(\cdot)$, $P(\cdot)$ — множества максимальных элементов по Слейтеру и Парето соответственно (для минимальных аналогично). Первое включение и последнее равенство следуют непосредственно из определений множеств Парето и Слейтера. Докажем второе включение. Возьмем произвольный $d\in S(D)$. Если существует $d'\in D'$: $d'\ge d$, то $d\in\operatorname{eph}S(D')$. Если же не существует такого $d'\in D'$, что $d'\ge d$, то поскольку $d\in D'$, имеем $d\in S(D')$, а значит, $d\in\operatorname{eph}S(D')$. (Прямое доказательство см. в [21].)

Таким образом, выполняются включения

$$f_{\leq} \subseteq \operatorname{eph} F_{\leq} \qquad \text{и} \qquad F_{\geq} \subseteq \operatorname{eph} f_{\geq}, \tag{14}$$

причем как для паретовских, так и для слейтеровских значений. По сути полученные включения означают, что в векторной постановке игровой задачи, как и в скалярном случае, наилучший гарантированный результат информированного игрока не может быть хуже, чем у неинформированного. Проиллюстрируем этот факт на примере задачи с рис. 5 (см. рис. 6).

Наилучший гарантированный результат неинформированного максимизирующего игрока при максимизации по Парето состоит из точек A и B (в слейтеровском случае —это ломаная, содержащая точки A и B и исходящие из них лучи), а множество Парето информированного максимизирующего игрока включает дополнительно точку D (множество Слейтера состоит из ломаной ADB и лучей, исходящих из точек A и B). Для минимизирующего игрока в случае его неинформированности множество минимальных по Парето элементов состоит из точек E, G, H (множество Слейтера содержит ломаную EGH и лучи с началом в точках E и H), а для информированного игрока паретовской является точка C, строго лучшая точки G и нестрого лучшая точек E и H (минимум по Слейтеру состоит из лучей с вершиной в точке C).

Равенство (12) и (13) выигрышей информированного и неинформированного о противнике максимизирующего игрока, подробно изучавшееся в [21], представляется векторным аналогом условия существования решения игры (в скалярном случае см. [22]). И также для минимизирующего игрока.

Утверждение 4. *Равенство $f_{\leq} = F_{\leq}$ $(F_{\geq} = f_{\geq})$ выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\bigcup_{x\in X}\bigcap_{y\in Y}\{\psi|\psi \leq \Phi(x,y)\} = \bigcap_{y\in Y}\bigcup_{x\in X}\{\psi|\psi \leq \Phi(x,y)\}$$

$$\left(\bigcup_{y\in Y}\bigcap_{x\in X}\{\psi|\psi \geq \Phi(x,y)\} = \bigcap_{x\in X}\bigcup_{y\in Y}\{\psi|\psi \geq \Phi(x,y)\}\right).$$

Доказательство. Достаточность очевидна, покажем необходимость, например, для 1-го равенства (доказательство для 2-го абсолютно аналогично). Пусть $f_{\leq} = F_{\leq}$. Предположим, что $\exists\psi \in \bigcap\limits_{y\in Y}\bigcup\limits_{x\in X}\{\psi|\psi \leq \Phi(x,y)\}$, $\psi \notin \bigcup\limits_{x\in X}\bigcap\limits_{y\in Y}\{\psi|\psi \leq \Phi(x,y)\}$. Это значит, что ψ не может принадлежать $F_{\leq}$, следовательно, существует $\psi' \in F_{\leq}$: $\psi' \geq \psi$ для максимума по Парето (для максимума по Слейтеру $\psi' > \psi$), $\psi' \in f_{\leq}$, значит, в силу свойства оценок $\psi \in \bigcup\limits_{x\in X}\bigcap\limits_{y\in Y}\{\psi|\psi \leq \Phi(x,y)\}$.

Отметим, что указанные равенства, в частности равенство (12) и (13), не включены авторами [2] в предлагаемые варианты распространения понятия седловой точки на векторный случай. (В цитируемой работе вообще рассматривается только неинформированный игрок.) Взамен в [2] введены различные седловые пары в качестве векторных аналогов седловых точек скалярных задач: множества

$$f_{\leq} \bigcap F_{\geq}, \quad f_{\leq} \bigcap F_{\substack{= \\ >}}, \quad f_{\substack{= \\ <}} \bigcap F_{\geq} \tag{15}$$

названы множествами сильных, сильно-слабых, слабо-сильных седловых пар соответственно.

С учетом (8) 2-е пересечение в (15) эквивалентно пересечению (12) и (13). И аналогично с учетом (10) 3-е пересечение в (15) равно $f_{\geq} \bigcap F_{\geq}$. Так что непустота этих пересечений является ослаблением рассмотренных в утверждении 3 равенств, но не следует из доказанных включений (14). Смысл непустоты пересечения, например, (12) и (13) можно пояснить на рис. 6, где оно включает точки A и B (в паретовском варианте). Если максимизирующий игрок ориентируется на одну из этих точек, то для него не важно, кто делает 1-й ход, он или противник, что соответствует концепции существования решения игры. Если же надеяться на точку D, то 2-й ход для него предпочтительней. Но поскольку для минимизирующего игрока лучше точка C, то тогда возникает борьба за 2-й ход.

Непустота 1-го пересечения в (15) или не рассмотренного в [2] $f_{\geq} \bigcap F_{\leq}$ означает совпадение некоторых наилучших гарантированных оценок выигрышей максимизирующего и минимизирующего игроков одного уровня информированности. На рис. 6 и $f_{\leq} \bigcap F_{\geq}$, и $f_{\geq} \bigcap F_{\leq}$ пусты. По-видимому, интерпретация в качестве решения игры возможна лишь для общей точки, если она имеется, всех четырех пересечений — $f_{\leq} \bigcap F_{\geq}$, $f_{\geq} \bigcap F_{\leq}$, $f_{\geq} \bigcap F_{\geq}$, $f_{\leq} \bigcap F_{\leq}$ (или, что то же самое, у трех из (15)), т.е. если $f_{\geq} \bigcap F_{\leq} \bigcap f_{\leq} \bigcap F_{\geq} \neq \emptyset$. Заметим, что в скалярном случае существование такой точки следует из непустоты хотя бы одного из пересечений. Это еще раз подчеркивает различие скалярных и векторных минимаксных задач и говорит о трудности принятия решений в условиях неопределенности для многокритериального подхода.

§3. Оптимумы точечно-множественных отображений

1. Максимум точечно-множественного отображения. При определении $F'_{\leq}$, $F'_{=}$ и прочих помеченных штрихом значений мы, не указывая этого явно, вводили оптимум для точечно-множественных отображений. Действительно, значением, к примеру, $\operatorname*{Max}_{x \in X} \Phi(x, y)$ при фиксированном y является множество $D(y)$, а мы, следуя [5], подменяли $\operatorname*{Min}_{y \in Y} D(y)$ значением $\operatorname{Min} D(Y)$ по аналогии с (3).

Определение (3) было выписано в предположении однозначности векторного критерия. Вообще говоря, критерий эффективности может быть задан с помощью точечно-множественного отображения (тогда однозначная вектор-функция является частным случаем). Такой подход к описанию цели оптимизации не следует рассматривать просто как формальное обобщение. Например, подобная ситуация возникает, когда при оценке эффективности стратегий неизбежна вычислительная или измерительная погрешность, т.е. значение целевой функции не может быть определено точно (зависит от точности вычислений).

Как уже указывалось в § 1, п. 2, нет единого определения понятий $\operatorname*{Min}_{v \in V} D(v)$ и $\operatorname*{Max}_{v \in V} D(v)$ для точечно-множественных отображений $D\colon\ V \to 2^{\mathbb{R}^Q}$, поскольку применение формулы (5) не всегда корректно (в частности, в приведенном выше примере, когда множественность значения отображения связана с объективной неточностью вычислений). Хотя если выбор $d \in D(v)$, как и $v \in V$, является управлением оперирующей стороны (т.е. неопределенность d субъективна), то формула (5) представляется вполне адекватной. С целью рассмотреть все возможные варианты вхождения неопределенности будем применять для отображений ту же идею оптимизации в оценках, что и для обычных многокритериальных задач (см. § 1, п. 3).

Необходимость перехода к оценкам обусловлена тем, что при неконтролируемости d наилучший гарантированный результат дается максимумом по $v \in V$ пересечения $\bigcap\limits_{d \in D(v)} d$. Очевидно, такое пересечение может быть непустым, только если $D(v) = \{d\}$, т.е. когда отображение $D(\cdot)$ однозначно. Возможны также постановки, в которых выбор $d \in D(v)$ осуществляет максимизирующая оперирующая сторона, но v — неконтролируемые факторы (например, при априорном оценивании эффективности стратегии d). Тогда получим решение в виде $\mathrm{Max} \bigcap\limits_{v \in V} D(v)$, но опять-таки в условиях непустоты пересечения, которые не обязательно выполняются. Отметим, что переход к гарантированным оценкам дает универсальное определение $\mathrm{Max} \bigcap\limits_{v \in V} \mathrm{eph}\, D(v)$. Рассмотрим формально возникающие здесь случаи.

Сначала опишем переход от достижимых значений к оценкам точечно-множественного отображения. Каждая точка множества оценивается максимизирующим игроком снизу, а минимизирующим — сверху, при этом возможен как гарантированный, так и защищаемый подход. Таким образом, для точечно-множественного отображения $D(\cdot)$ оценки со стороны максимизирующего игрока приводят $\forall v \in V$, $\forall d \in D(v)$ к множествам $\{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \leq d\}$ или $\{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \overline{\overline{<}}\, d\}$, а со стороны минимизирующего — $\{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \geq d\}$ или $\{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \overline{\overline{>}}\, d\}$.

Ориентируясь на принцип гарантированности результата, можно сказать, что когда выбор конкретной точки из множества $D(v)$ является управлением оперирующей стороны, то $D(v)$ гарантированно оценивается объединением оценок (гарантированных или защищаемых) всех точек этого множества, а когда выбор $d \in D(v)$ не является управлением оперирующей стороны — пересечением оценок. Далее, в тех случаях, когда выбор $v \in V$ является управлением оперирующей стороны, следует брать объединение по всем v. Если же v оказывается неконтролируемым фактором, то нужно брать пересечение.

Таким образом, при переходе к оценкам задача поиска

$\operatorname*{Max}_{v\in V} D(v)$ в зависимости от типа оценки и от того, чьими стратегиями считать v и d, определяется одним из следующих выражений (в соответствии с конкретной постановкой):

$$\operatorname*{Max}\bigcup_{v\in V}\bigcup_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\le d\},\quad \operatorname*{Max}\bigcup_{v\in V}\bigcap_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\le d\},$$
$$\operatorname*{Max}\bigcap_{v\in V}\bigcup_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\le d\},\quad \operatorname*{Max}\bigcap_{v\in V}\bigcap_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\le d\},$$
$$\operatorname*{Max}\bigcup_{v\in V}\bigcup_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\stackrel{=}{<} d\},\quad \operatorname*{Max}\bigcup_{v\in V}\bigcap_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\stackrel{=}{<} d\},$$
$$\operatorname*{Max}\bigcap_{v\in V}\bigcup_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\stackrel{=}{<} d\},\quad \operatorname*{Max}\bigcap_{v\in V}\bigcap_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\stackrel{=}{<} d\}.$$

Полностью аналогично для задачи поиска $\operatorname*{Min}_{y\in Y} D(y)$ с учетом смены знака неравенств возможны следующие варианты:

$$\operatorname*{Min}\bigcup_{v\in V}\bigcup_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\ge d\},\quad \operatorname*{Min}\bigcup_{v\in V}\bigcap_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\ge d\},$$
$$\operatorname*{Min}\bigcap_{v\in V}\bigcup_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\ge d\},\quad \operatorname*{Min}\bigcap_{v\in V}\bigcap_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\ge d\},$$
$$\operatorname*{Min}\bigcup_{v\in V}\bigcup_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\stackrel{=}{>} d\},\quad \operatorname*{Min}\bigcup_{v\in V}\bigcap_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\stackrel{=}{>} d\},$$
$$\operatorname*{Min}\bigcap_{v\in V}\bigcup_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\stackrel{=}{>} d\},\quad \operatorname*{Min}\bigcap_{v\in V}\bigcap_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\stackrel{=}{>} d\}.$$

Из приведенных выражений половина уже встречалась ранее (см. § 2), и из теоремы 2 и формулы (10) в частном случае вектор-функции Φ, совпадающей со стратегией информированного игрока, вытекают для оптимумов по Слейтеру равенства

$$\operatorname*{Max}\bigcup_{v\in V}\bigcap_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\le d\}=\operatorname*{Min}\bigcap_{v\in V}\bigcup_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\stackrel{=}{>} d\},$$
$$\operatorname*{Max}\bigcap_{v\in V}\bigcup_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\le d\}=\operatorname*{Min}\bigcup_{v\in V}\bigcap_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\stackrel{=}{>} d\},$$
$$\operatorname*{Max}\bigcup_{v\in V}\bigcap_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\stackrel{=}{<} d\}=\operatorname*{Min}\bigcap_{v\in V}\bigcup_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\ge d\},$$
$$\operatorname*{Max}\bigcap_{v\in V}\bigcup_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\stackrel{=}{<} d\}=\operatorname*{Min}\bigcup_{v\in V}\bigcap_{d\in D(v)}\{\psi\in\mathbb{R}^Q|\psi\ge d\}.$$

Подобная связь существует и между оставшимися вариантами.

Теорема 3. *Для* Max *и* Min *по Слейтеру выполнено*

$$\operatorname{Max} \bigcup_{v \in V} \bigcup_{d \in D(v)} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \le d\} = \operatorname{Min} \bigcap_{v \in V} \bigcap_{d \in D(v)} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \stackrel{=}{>} d\},$$
$$\operatorname{Max} \bigcap_{v \in V} \bigcap_{d \in D(v)} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \le d\} = \operatorname{Min} \bigcup_{v \in V} \bigcup_{d \in D(v)} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \stackrel{=}{>} d\},$$
$$\operatorname{Max} \bigcup_{v \in V} \bigcup_{d \in D(v)} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \stackrel{=}{<} d\} = \operatorname{Min} \bigcap_{v \in V} \bigcap_{d \in D(v)} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \ge d\},$$
$$\operatorname{Max} \bigcap_{v \in V} \bigcap_{d \in D(v)} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \stackrel{=}{<} d\} = \operatorname{Min} \bigcup_{v \in V} \bigcup_{d \in D(v)} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \ge d\}.$$

Доказательство аналогично теореме 1 и следует из утверждения 3. Однако для наглядности докажем напрямую, например, последнее равенство. В соответствие утверждению 3 обозначим через G_1 максимизируемое множество, тогда

$$G_1 = \bigcap_{v \in V} \bigcap_{d \in D(v)} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \stackrel{=}{<} d\}, \quad G_2 = \bigcup_{v \in V} \bigcup_{d \in D(v)} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \ge d\}.$$

Возьмем произвольный вектор $\psi^0 \in \operatorname{Min} G_2$, он принадлежит G_2, т.е. найдется $v \in V$, для которого существует $d \in D(v)$ такой, что для любого i справедливо $\psi_i^0 \ge d_i$. При этом нельзя заменить нестрогое неравенство строгим, так как тогда ψ^0 не будет минимальным. Следовательно, для любого $v \in V$, для любого $d \in D(v)$ найдется i: $\psi_i^0 \le d_i$.

Теперь возьмем произвольный вектор $\psi^0 \in \operatorname{Max} G_1$. Поскольку он принадлежит G_1, то, с одной стороны, $\forall v \in V$, $\forall d \in D(v)$ $\exists i$: $\psi_i^0 \le d_i$, а с другой стороны $\exists v \in V$, $d \in D(v)$: $\forall i$ $\psi_i^0 \ge d_i$, так как ψ^0 является максимальным в множестве G_1. Получили, что для любого вектора $\psi^0 \in \operatorname{Max} G_1$ и для любого $\psi^0 \in \operatorname{Min} G_2$ выполняется условие $\psi^0 \in G_1 \bigcap G_2$, т.е.

$$\begin{cases} \forall v \in V, \quad \forall d \in D(v) \quad \exists i: \quad \psi_i^0 \le d_i, \\ \exists v \in V, \quad \exists d \in D(v): \quad \forall i \quad \psi_i^0 \ge d_i. \end{cases} \tag{16}$$

Покажем, что если для некоторого вектора ψ^0 выполнено (16), то $\psi^0 \in \operatorname{Max} G_1$ и $\psi^0 \in \operatorname{Min} G_2$. Очевидно из (16) следует $\psi^0 \in G_1$ и $\psi^0 \in G_2$. Выберем произвольный $\psi' \in G_2$ ($\psi' \neq \psi^0$), это значит, что $\exists v' \in V$, $\exists d' \in D(v')$: $\forall i \ \ \psi'_i \geq d'_i$. Но для $v' \in V$ и $d' \in D(v')$ $\exists i$: $\psi^0_i \leq d'_i \leq \psi'_i$, т.е. для любого вектора $\psi' \in G_2$ существует i, для которого $\psi'_i \geq \psi^0_i$. Таким образом, для ψ^0, удовлетворяющего условию (16), в множестве G_2 не существует такого ψ, что $\psi < \psi^0$, а это по определению минимальности по Слейтеру и означает $\psi^0 \in \operatorname{Min} G_2$. Аналогично $\psi^0 \in \operatorname{Max} G_1$. Теорема доказана.

2. Максимин точечно-множественного отображения. Распространим теперь рассмотренные в § 2 понятия максимина векторных функций на точечно-множественные отображения.

Пусть D: $X \times Y \to 2^{\mathbb{R}^Q}$ — точечно-множественное отображение. Определим $\operatorname*{Max}_{x \in X} \operatorname*{Min}_{y \in Y} D(x, y)$. Поясним специфику такой постановки. В рассмотренных задачах с однозначной вектор-функцией ее значение полностью определяется реализацией неопределенных факторов (действиями противника) и выбором стратегии оперирующей стороны, в состав которой входит и ЛПР, кто фактически осуществляет выбор. В случае точечно-множественных отображений пара стратегий (x, y) задает множество, а дальнейший выбор конкретного элемента из этого множества возможно, никак не связан с действиями сторон. Последний выбирающий, вообще говоря, может представлять интересы оперирующей стороны, противника либо третьей стороны (природы), действия которой приравниваются оперирующей стороной к действиям противника.

Таким образом, задачи на максимин точечно-множественного отображения относятся к двухэтапному принятию решений: сначала действует максимизирующий игрок, затем минимизирующий, а затем игрок, выбирающий $d \in D(x, y)$, цель действий которого совпадает либо с одним игроком, либо с другим, т.е. d

является либо управлением оперирующей стороны, либо управлением противника. Аналогично задачам с векторным критерием будем различать максимин точечно-множественного отображения за максимизирующего и за минимизирующего игрока, используя обозначения $\overline{\mathrm{Max}}_{x\in X}\,\mathrm{Min}_{y\in Y}\, D(x,y)$ и $\mathrm{Max}_{x\in X}\,\overline{\mathrm{Min}}_{y\in Y} D(x,y)$. В каждом случае будем помечать верхним индексом d операцию игрока, ответственного за выбор конкретного $d \in D(x,y)$.

Рассмотрим постановку, в которой управлениями оперирующей стороны являются стратегии x, d. Тогда при фиксированных x, y гарантировано любое значение $d \in D(x,y)$, т.е. формально любой вектор из множества $\bigcup\limits_{d\in D(x,y)} d$. Далее, при каждом фиксированном x можно гарантированно рассчитывать на любой вектор из множества $\bigcap\limits_{y\in Y}\bigcup\limits_{d\in D(x,y)} d$, однако понятно, что оно заведомо непусто при всех (или хотя бы некоторых) $x \in X$ только в специальных ситуациях. В случае непустоты приходим к определению

$$\overline{\mathrm{Max}}^{d}_{x\in X}\,\mathrm{Min}_{y\in Y}\, D(x,y) = \mathrm{Max} \bigcup_{x\in X}\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{d\in D(x,y)} d.$$

Для тех постановок, в которых d не является управлением оперирующей стороны, нельзя заранее гарантировать ни одну из точек $d \in D(x,y)$, потому формальное определение имеет вид

$$\overline{\mathrm{Max}}_{x\in X}\mathrm{Min}^{d}_{y\in Y} D(x,y) = \mathrm{Max} \bigcup_{x\in X}\bigcap_{y\in Y}\bigcap_{d\in D(x,y)} d,$$

при этом ситуация, в которой $\bigcap\limits_{d\in D(x,y)} d \neq \emptyset$, эквивалентна $D(x,y) = \{d\}$, т.е. одноэлементности множества $D(x,y)$.

Также нетрудно выписать определения максимина точечно-множественного отображения в предположении, что оперирующая сторона является информированной, это приведет к аналогичным формулам с тем же недостатком — в общем случае нельзя рассчитывать на непустоту пересечений множеств $D(x,y)$ или их элементов. Можно, вообще говоря, распространить определение векторного максимина из [12] на точечно-множественные отображения. Тогда формально получим

$$\operatorname*{Max}_{x\in X}\overline{\operatorname*{Min}_{y\in Y}}^{d} D(x,y) = \operatorname{Max}\bigcup_{x\in X}\operatorname{Min}\bigcup_{y\in Y} D(x,y). \tag{17}$$

Как уже отмечалось выше, это определение построено за информированного игрока, и в данном случае он же отвечает за выбор $d \in D(x,y)$. Определение (17), с одной стороны, сохраняет все недостатки $f'_{=}$, а с другой — не дает возможности рассмотреть ситуацию, в которой за выбор $d \in D(x,y)$ отвечает противник.

Итак, рассмотренные конструкции на базе множеств достижимости не предлагают адекватного определения максимина точечно-множественного отображения. По этой причине перейдем, как и в предыдущем пункте, к оценкам точечно-множественного отображения. Аналогично максимину векторной функции получим определения

$$\overline{\operatorname*{Max}_{x\in X}}^{d}\operatorname*{Min}_{y\in Y} D(x,y) = f^1_{\leq} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max}\bigcup_{x\in X}\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{d\in D(x,y)}\{\chi\in \mathbb{R}^Q|\chi\leq d\},$$

$$\overline{\operatorname*{Max}_{x\in X}}^{d}\operatorname*{Min}_{y\in Y} D(x,y) = f^1_{\overline{\overline{<}}} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max}\bigcup_{x\in X}\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{d\in D(x,y)}\{\chi\in \mathbb{R}^Q|\chi\overline{\overline{<}}\, d\},$$

$$\overline{\operatorname*{Max}_{x\in X}}\operatorname*{Min}_{y\in Y}^{d} D(x,y) = f^2_{\leq} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max}\bigcup_{x\in X}\bigcap_{y\in Y}\bigcap_{d\in D(x,y)}\{\chi\in \mathbb{R}^Q|\chi\leq d\},$$

$$\overline{\operatorname*{Max}_{x\in X}}\operatorname*{Min}_{y\in Y}^{d} D(x,y) = f^2_{\overline{\overline{<}}} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max}\bigcup_{x\in X}\bigcap_{y\in Y}\bigcap_{d\in D(x,y)}\{\chi\in \mathbb{R}^Q|\chi\overline{\overline{<}}\, d\},$$

$$\operatorname*{Max}_{x\in X}\overline{\operatorname*{Min}_{y\in Y}}^{d} D(x,y) = f^2_{\geq} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Min}\bigcap_{x\in X}\bigcup_{y\in Y}\bigcup_{d\in D(x,y)}\{\chi\in \mathbb{R}^Q|\chi\geq d\},$$

$$\operatorname*{Max}_{x\in X}\,\overline{\operatorname*{Min}_{y\in Y}}^{\,d} D(x,y) = f^2_{\geqq} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Min} \bigcap_{x\in X} \bigcup_{y\in Y} \bigcup_{d\in D(x,y)} \{\chi \in \mathbb{R}^Q | \chi \geqq d\},$$

$$\operatorname*{Max}_{x\in X}{}^{d}\,\overline{\operatorname*{Min}_{y\in Y}} D(x,y) = f^1_{\geq} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Min} \bigcap_{x\in X} \bigcup_{y\in Y} \bigcap_{d\in D(x,y)} \{\chi \in \mathbb{R}^Q | \chi \geq d\},$$

$$\operatorname*{Max}_{x\in X}{}^{d}\,\overline{\operatorname*{Min}_{y\in Y}} D(x,y) = f^1_{\geqq} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Min} \bigcap_{x\in X} \bigcup_{y\in Y} \bigcap_{d\in D(x,y)} \{\chi \in \mathbb{R}^Q | \chi \geqq d\},$$

а также обобщающие $f'_{\geq}$ и $f'_{\geqq}$,

$$\operatorname*{Max}_{x\in X}{}^{d}\,\overline{\operatorname*{Min}_{y\in Y}} D(x,y) = f'^1_{\geq} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Max} \bigcup_{x\in X} \mathrm{Min} \bigcup_{y\in Y} \bigcap_{d\in D(x,y)} \{\chi | \chi \geq d\},$$

$$\operatorname*{Max}_{x\in X}{}^{d}\,\overline{\operatorname*{Min}_{y\in Y}} D(x,y) = f'^1_{\geqq} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Max} \bigcup_{x\in X} \mathrm{Min} \bigcup_{y\in Y} \bigcap_{d\in D(x,y)} \{\chi | \chi \geqq d\},$$

$$\operatorname*{Max}_{x\in X}\,\overline{\operatorname*{Min}_{y\in Y}}^{\,d} D(x,y) = f'^2_{\geq} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Max} \bigcup_{x\in X} \mathrm{Min} \bigcup_{y\in Y} \bigcup_{d\in D(x,y)} \{\chi | \chi \geq d\},$$

$$\operatorname*{Max}_{x\in X}\,\overline{\operatorname*{Min}_{y\in Y}}^{\,d} D(x,y) = f'^2_{\geqq} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Max} \bigcup_{x\in X} \mathrm{Min} \bigcup_{y\in Y} \bigcup_{d\in D(x,y)} \{\chi | \chi \geqq d\}.$$

Следующие равенства показывают связь между всеми интерпретациями максимина точечно-множественного отображения.

Теорема 4. *В слейтеровском случае*

$$f^1_{\leq} = f^1_{\geqq} = f'^1_{\geqq}, \quad f^2_{\leq} = f^2_{\geqq} = f'^2_{\geqq},$$

$$f^1_{\geq} = f^1_{\leqq} = f'^1_{\geq}, \quad f^2_{\geq} = f^2_{\leqq} = f'^2_{\geq}.$$

Доказательство. В каждой паре из этих равенств 1-е является следствием утверждения 3, а 2-е доказывается точно так же, как и для максимина векторной функции. Для примера приведем подробное доказательство того, что $f^1_{\leq} = f^1_{\geqq} = f'^1_{\geqq}$. Обозначим, как в утверждении 3,

$$G_1 = \bigcup_{x\in X} \bigcap_{y\in Y} \bigcup_{d\in D(x,y)} \{\chi | \chi \leq d\}, \quad G_2 = \bigcap_{x\in X} \bigcup_{y\in Y} \bigcap_{d\in D(x,y)} \{\chi | \chi \geqq d\}.$$

Докажем, что $\operatorname{Max} G_1 = \operatorname{Min} G_2$. Возьмем произвольный вектор $\chi^0 \in \operatorname{Max} G_1$, он принадлежит G_1, т.е. существует $x \in X$ такой, что для любого $y \in Y$ найдется вектор $d^0 \in D(x, y)$, для которого при всех i выполнено $\chi_i^0 \leq d_i^0$. Заметим, что здесь нельзя заменить нестрогое неравенство на строгое. Действительно, если $\exists x \in X$: $\forall y \in Y$ $\exists d^0 \in D(x, y)$: $\chi^0 < d^0$, то $d^0 \in G_1$ и $d^0 > \chi$, что противоречит максимальности χ^0 в G_1. Следовательно, $\forall x \in X$ $\exists y \in Y$: $\forall d \in D(x, y)$ $\exists i$: $\chi_i^0 \geq d_i$.

Теперь возьмем произвольный вектор $\chi^0 \in \operatorname{Min} G_2$. Поскольку он принадлежит G_2, то, с одной стороны, $\forall x \in X$ $\exists y \in Y$ такой, что $\forall d \in D(x, y)$ $\exists i$: $\chi_i^0 \geq d_i$, а с другой стороны, $\exists x \in X$: $\forall y \in Y$ $\exists d \in D(x, y)$: $\forall i$ $\chi_i^0 \leq d_i$, поскольку χ^0 является минимальным в G_2. Получили, что для любого вектора $\chi^0 \in \operatorname{Max} G_1$ и для любого $\chi^0 \in \operatorname{Min} G_2$ выполняется условие

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \forall x \in X & \exists y^0 \in Y: & \forall d \in D(x, y^0) & \exists i_0: & \chi_{i_0} \geq d_{i_0}, \\ \exists x^0 \in X: & \forall y \in Y & \exists d^0 \in D(x^0, y) & \forall i: & \chi_i \leq d_i^0. \end{array} \right. \tag{18}$$

Покажем, что если для некоторого вектора χ^0 выполнено (18), то $\chi^0 \in \operatorname{Max} G_1$ и $\chi^0 \in \operatorname{Min} G_2$. Очевидно, что $\chi^0 \in G_1$, $\chi^0 \in G_2$ (отметим, что выполнение (18) является необходимым и достаточным условием того, что $\chi^0 \in G_1 \bigcap G_2$). Выберем произвольный $\chi' \in G_1$ ($\chi' \neq \chi^0$), это значит, что $\exists x' \in X$: $\forall y \in Y$ $\exists d' \in D(x', y)$: $\forall i$ $\chi_i' \leq d_i'$. Для $\chi^0 \in G_1$ согласно условию (18) выполнено: для любого $x \in X$ (в том числе и для x') существует $y^{'} \in Y$ такой, что для любого $d \in D(x, y')$ $\exists i'$: $\chi_{i'}^0 \geq d_{i'}$. Для $x' \in X$ для любого $y \in Y$ (пусть $y = y'$) существует $d' \in D(x', y')$: $\forall i$ $\chi' \leq d_i'$, но для y' для любого $d \in D(x', y')$, т.е. и для d', $\exists i'$: $\chi_{i'}^0 \geq d_{i'}'$. Таким образом, приходим к тому, что найдутся такие $x' \in X$, $y' \in Y$ и $d' \in D(x', y')$, что для некоторого i' выполнено $\chi_{i'}^0 \geq d_{i'}' \geq \chi_{i'}'$. Получили, что для любого $\chi' \in G_1 \setminus \{\chi^0\}$ существует i, для которого $\chi_i' \leq \chi_i^0$, т.е. в множестве G_1 не существует $\chi' > \chi^0$. Это означает, что $\chi^0 \in \operatorname{Max} G_1$

по Слейтеру. Аналогично, из того, что для χ^0 выполнено условие (18), следует, что $\chi^0 \in \operatorname{Min} G_2$.

Теперь докажем, что $f^1_{\leq} = f'^1_{\overline{\overline{>}}}$. В силу (6)

$$\operatorname{Max} \bigcup_{x\in X} \bigcap_{y\in Y} \bigcup_{d\in D(x,y)} \{\chi | \chi \leq d\} = \operatorname{Max} \bigcup_{x\in X} \operatorname{Max} \bigcap_{y\in Y} \bigcup_{d\in D(x,y)} \{\chi | \chi \leq d\},$$

а по теореме 2 при фиксированном $x \in X$

$$\operatorname{Max} \bigcap_{y\in Y} \bigcup_{d\in D(x,y)} \{\chi \in \mathbb{R}^Q | \chi \leq d\} = \operatorname{Min} \bigcup_{y\in Y} \bigcap_{d\in D(x,y)} \{\chi \in \mathbb{R}^Q | \chi \overline{\overline{>}}\, d\},$$

поэтому $f^1_{\leq} = \operatorname{Max} \bigcup_{x\in X} \operatorname{Max} \bigcap_{y\in Y} \bigcup_{d\in D(x,y)} \{\chi \in \mathbb{R}^Q | \chi \leq d\} =$

$$= \operatorname{Max} \bigcup_{x\in X} \operatorname{Min} \bigcup_{y\in Y} \bigcap_{d\in D(x,y)} \{\chi \in \mathbb{R}^Q | \chi \overline{\overline{>}}\, d\} = f'^1_{\overline{\overline{>}}}.$$

Что и требовалось доказать.

Для полноты картины в качестве еще одного примера приведем прямое доказательство того, что $f^2_{\geq} = f^2_{\overline{\overline{<}}} = f'^2_{\geq}$.

Возьмем произвольный вектор $\chi^0 \in f^2_{\geq}$, он принадлежит множеству $\bigcap_{x\in X} \bigcup_{y\in Y} \bigcup_{d\in D(x,y)} \{\chi | \chi \geq d\}$, т.е. для любого $x \in X$ найдется $y \in Y$, для которого существует вектор $d \in D(x,y)$ такой, что для любого i выполнено $\chi^0_i \geq d_i$. При этом нестрогое неравенство нельзя заменить строгим, так как тогда χ^0 не будет минимальным. Следовательно, существует $x \in X$ такое, что для любого $y \in Y$, для любого $d \in D(x,y)$ найдется i: $\chi^0_i \leq d_i$.

Теперь возьмем произвольный вектор $\chi^0 \in f^2_{\overline{\overline{<}}}$. Поскольку он принадлежит $\bigcup_{x\in X} \bigcap_{y\in Y} \bigcap_{d\in D(x,y)} \{\chi | \chi \overline{\overline{<}}\, d\}$, то, с одной стороны, $\exists x \in X$ такой, что $\forall y \in Y$, $\forall d \in D(x,y)$ $\exists i$: $\chi^0_i \leq d_i$, а с другой стороны, $\forall x \in X$ $\exists y \in Y$, $\exists d \in D(x,y)$: $\forall i$ $\chi^0_i \geq d_i$, поскольку

χ^0 является максимальным. Получили, что для любого вектора $\chi^0 \in f^2_{\overset{=}{<}}$ и для любого $\chi^0 \in f^2_{\geq}$ выполняются условия

$$\begin{array}{lllll} \forall x \in X & \exists y^0 \in Y, & \exists d^0 \in D(x, y^0)\colon & \forall i & \chi^0_i \geq d^0_i, \\ \exists x^0 \in X\colon & \forall y \in Y, & \forall d \in D(x^0, y) & \exists i_0\colon & \chi^0_{i_0} \leq d_{i_0}. \end{array} \tag{19}$$

Покажем, что если для некоторого вектора χ^0 выполнено (19), то $\chi^0 \in f^2_{\overset{=}{<}}$ и $\chi^0 \in f^2_{\geq}$. Очевидно, что из (19)

$$\chi^0 \in \bigcap_{x \in X} \bigcup_{y \in Y} \bigcup_{d \in D(x,y)} \{\chi | \chi \geq d\} \quad \text{и} \quad \chi^0 \in \bigcup_{x \in X} \bigcap_{y \in Y} \bigcap_{d \in D(x,y)} \{\chi | \chi \overset{=}{<} d\}.$$

Выберем произвольный $\chi' \in \bigcap\limits_{x \in X} \bigcup\limits_{y \in Y} \bigcup\limits_{d \in D(x,y)} \{\chi | \chi \geq d\}$ $(\chi' \neq \chi^0)$, это значит, что $\forall x \in X$ $\exists y' \in Y$, $\exists d' \in D(x, y')$: $\forall i$ $\chi'_i \geq d'_i$. Но для $x^0 \in X$, для $y' \in Y$ и $d' \in D(x^0, y')$ $\exists i_0$: $\chi^0_{i_0} \leq d_{i_0} \leq \chi'_{i_0}$, т.е. $\chi^0 \in \mathrm{Min} \bigcap\limits_{x \in X} \bigcup\limits_{y \in Y} \bigcup\limits_{d \in D(x,y)} \{\chi \in \mathbb{R}^Q | \chi \geq d\} = f^2_{\geq}$. Аналогично $\chi^0 \in f^2_{\overset{=}{<}}$.

Докажем, что $f^2_{\overset{=}{<}} = {f'}^2_{\geq}$. В силу (6)

$$\mathrm{Max} \bigcup_{x \in X} \bigcap_{y \in Y} \bigcap_{d \in D(x,y)} \{\chi | \chi \overset{=}{<} d\} = \mathrm{Max} \bigcup_{x \in X} \mathrm{Max} \bigcap_{y \in Y} \bigcap_{d \in D(x,y)} \{\chi | \chi \overset{=}{<} d\},$$

а при фиксированном $x \in X$ по теореме 3

$$\mathrm{Max} \bigcap_{y \in Y} \bigcap_{d \in D(x,y)} \{\chi \in \mathbb{R}^Q | \chi \overset{=}{<} d\} = \mathrm{Min} \bigcup_{y \in Y} \bigcup_{d \in D(x,y)} \{\chi \in \mathbb{R}^Q | \chi \geq d\},$$

поэтому $\mathrm{Max} \bigcup\limits_{x \in X} \mathrm{Max} \bigcap\limits_{y \in Y} \bigcap\limits_{d \in D(x,y)} \{\chi \in \mathbb{R}^Q | \chi \overset{=}{<} d\} =$

$$= \mathrm{Max} \bigcup_{x \in X} \mathrm{Min} \bigcup_{y \in Y} \bigcup_{d \in D(x,y)} \{\chi \in \mathbb{R}^Q | \chi \geq d\} = {f'}^2_{\geq}.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Все предложенные в данном пункте определения без труда модифицируются для случая минимакса точечно-множественного отображения (по аналогии с § 2, п. 1), и также модифицируется теорема 4. Это позволяет распространить введенные понятия и на кратный векторный минимакс путем обобщения результатов следующего параграфа.

§4. Определение многокритериального максиминимакса

Теперь мы готовы обсудить возможные определения значения (1) максиминимакса векторного критерия и предложить определение, соответствующее двухэтапной векторной максимизации на основе принципа гарантированности результата.

Определения, построенные с использованием лишь достижимых значений векторного критерия, оказываются применимыми далеко не всегда. Если попросту обобщить $F'_=$, $f'_=$, предложенные в [12], то можно записать $\operatorname*{Max}_{u\in U}\ \operatorname*{Min}_{w\in W(u)}\ \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,u) =$

$$= \operatorname{Max} \bigcup_{u\in U} \operatorname{Min} \bigcup_{w\in W(u)} \operatorname{Max} \bigcup_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,u). \qquad (20)$$

Формула (20) выводится и из построений § 3, если применить $\operatorname*{Max}_{u\in U}$ к точечно-множественному отображению $U \to F'_=(u)$. (При этом учитывается, что исследование проводится за максимизирующего игрока.) Тем не менее определение (20) имеет те же недостатки, что и $F'_=$, $f'_=$ (оно дает неструктурированную информацию, не позволяющую пользоваться принципом гарантированности результата), и потому рассматриваться не будет.

С помощью определения $F_=$, так как точку из $F_=$ выбирает оперирующая сторона, мы получим (с учетом утверждения 1)

$$\operatorname*{Max}_{u\in U}\ \operatorname*{Min}_{w\in W(u)}\ \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,u) = \operatorname*{Max}_{u\in U} F_=(u) = \operatorname{Max} \bigcup_{u\in U} F_=(u) =$$

$$= \operatorname{Max} \bigcup_{u\in U} \operatorname{Max} \bigcap_{w\in W(u)} \bigcup_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,u),$$

что для Max по Слейтеру равно $\operatorname{Max} \bigcup\limits_{u \in U} \bigcap\limits_{w \in W(u)} \bigcup\limits_{z \in Z(w)} \Phi(z, w, u)$.

Однако такой подход возможен только если заранее известно, что $\bigcap\limits_{w \in W(u)} \bigcup\limits_{z \in Z(w)} \Phi(z, w, u) \neq \emptyset$, $u \in U$, а это значительно сужает границы применимости приведенного определения.

По указанной причине задачу на максиминимакс векторного критерия далее будем ставить как задачу оптимизации соответствующего множества оценок этого критерия. Мы рассматриваем задачу на векторный максиминимакс с позиций максимизирующего игрока и будем применять (в соответствии с принципом гарантированности результата) гарантированные оценки, множество которых для каждого значения векторного критерия равно $\{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \leq \Phi(z, w, u)\}$, или $\operatorname{eph} \Phi$.

Отметим, что (за счет транзитивности знака $\leq$) выполнено

$$\operatorname{eph} \{ \bigcup_{z \in Z(w)} \operatorname{eph} \Phi(z, w, u) \} = \bigcup_{z \in Z(w)} \operatorname{eph} \Phi(z, w, u) \quad \text{и}$$

$$\operatorname{eph} \{ \bigcap_{w \in W(u)} \bigcup_{z \in Z(w)} \operatorname{eph} \Phi(z, w, u) \} = \bigcap_{w \in W(u)} \bigcup_{z \in Z(w)} \operatorname{eph} \Phi(z, w, u).$$

Нам понадобится также следующее свойство ПЭ-оболочек:

$$\forall D \subset \mathbb{R}^Q, \text{ если } \operatorname{Max} \operatorname{eph} D \neq \emptyset, \text{ то } \operatorname{eph} \operatorname{Max} \operatorname{eph} D = \operatorname{eph} D, \tag{21}$$

вытекающее из равенства $\operatorname{eph} \operatorname{Max} D = \operatorname{eph} D$ при $\operatorname{Max} D \neq \emptyset$, которое очевидно по определению 4. Условие $\operatorname{Max} D \neq \emptyset$ для максимума по Парето может, вообще говоря, не выполняться. Тем не менее предположим его справедливость для множеств

$$\bigcup_{z \in Z(w)} \operatorname{eph} \Phi(z, w, u) \quad \text{и} \quad \bigcap_{w \in W(u)} \bigcup_{z \in Z(w)} \operatorname{eph} \Phi(z, w, u).$$

(Достаточным условием этого служит непрерывность функции Φ и отображений $Z(\cdot)$, $W(\cdot)$ при компактности всех множеств

$Z(w)$, $W(u)$, U.) В противном случае считаем, что в дальнейших построениях речь идет лишь о слейтеровских значениях оптимумов.

При фиксированном $u \in U$ получаем из (1) задачу на векторный минимакс за максимизирующего игрока, поэтому максимум по $u \in U$ представи́м в виде $\operatorname*{Max}_{u \in U} \left\{ \operatorname*{Min}_{w \in W(u)} \overline{\operatorname*{Max}_{z \in Z(w)}} \Phi(z, w, u) \right\} =$

$$= \operatorname{Max} \bigcup_{u \in U} \operatorname{eph} \operatorname{Max} \bigcap_{w \in W(u)} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \le \Phi(z, w, u)\} \overset{\text{из } (21)}{=}$$

$$= \operatorname{Max} \bigcup_{u \in U} \bigcap_{w \in W(u)} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \le \Phi(z, w, u)\}. \qquad (22)$$

С другой стороны, при каждом значении пары аргументов (u, w) выражение $\operatorname*{Max}_{z \in Z(w)} \Phi(z, w, u) = \operatorname{Max} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi | \psi \le \Phi(z, w, u)\}$ задает множество в $\mathbb{R}^Q$, и можно трактовать векторный максимини-макс как максимин $\overline{\operatorname{Max}}^d \operatorname{Min}$ (за максимизирующего игрока, выбирающего d) точечно-множественного отображения

$$D(\cdot, \cdot) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcup_{z \in Z(\cdot)} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \le \Phi(z, \cdot, \cdot)\}.$$

При фиксированных (u, w) множество оценок для $D(u, w)$ равно

$$\{\chi \in \mathbb{R}^Q | \exists \psi \in \operatorname{Max} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \le \Phi(z, w, u)\} \colon \ \chi \le \psi\} =$$

$= \operatorname{eph} \operatorname{Max} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \le \Phi(z, w, u)\}$. В результате приходим к формуле $\quad \overline{\operatorname*{Max}_{u \in U}}^d \operatorname*{Min}_{w \in W} \left\{ \operatorname*{Max}_{z \in Z} \Phi(z, w, u) \right\} =$

$$= \operatorname{Max} \bigcup_{u \in U} \bigcap_{w \in W} \operatorname{eph} \operatorname{Max} \bigcup_{z \in Z} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \le \Phi(z, w, u)\} =$$

$$= \operatorname{Max} \bigcup_{u \in U} \bigcap_{w \in W} \operatorname{eph} \bigcup_{z \in Z} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \leq \Phi(z, w, u)\},$$

дающей, как и предыдущий подход, определение (22).

Для определения слейтеровского значения векторного макси-минимакса в гарантированных оценках за максимизирующего игрока можно также воспользоваться модификацией значения минимакса из [12]: $\operatorname{Max}_{u \in U} \left\{ \operatorname{Min}_{w \in W(u)} \overline{\operatorname{Max}}_{z \in Z(w)} \Phi(z, w, u) \right\} =$

$$= \operatorname{Max} \bigcup_{u \in U} \operatorname{eph} F'_{\leq}(u) = \operatorname{Max} \bigcup_{u \in U} \operatorname{eph} F_{\leq}(u) \text{ равно } (22).$$

Применение максимина, определенного согласно [12], к

$$\operatorname{Max} \bigcup_{z \in Z} \{\psi \in \mathbb{R}^Q | \psi \leq \Phi(z, w, u)\}$$

невозможно, поскольку, как уже было показано в § 2, определения в [12] построены за информированного игрока. В задаче на максимин это — минимизирующий игрок, а мы определяем векторный максиминимакс за максимизирующего игрока.

Таким образом, все рассмотренные подходы к определению векторного максиминимакса в гарантированных оценках векторного критерия в задаче двухэтапной максимизации приводят к одному и тому же определению (22), на которое мы и будем ориентироваться при решении задачи (1).

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений ни на вектор критериев, ни на множества стратегий, и фактически вопрос о достижимости оптимумов не обсуждался. В дальнейшем функции $\varphi_i(z, w, u)$, $i = \overline{1, Q}$, будем предполагать непрерывными по совокупности аргументов, множества $Z(w)$ $\forall w \in W(u)$, $W(u)$ $\forall u \in U$, U — компактными в евклидовом пространстве, отображения $Z(\cdot)$, $W(\cdot)$ — непрерывными по Хаусдорфу. При этом вектор-функция Φ ограничена. Для определенности будем считать, что векторный критерий не отрицателен, тогда отрицательные оценки эффективности не дают дополнительной информации. Поэтому определение (22) векторного максиминимакса можно привести к виду, предложенному в [7],

$$\operatorname*{Max}_{u\in U}\ \operatorname*{Min}_{w\in W(u)}\ \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,u) =$$

$$= \mathbb{R}^Q_+ \bigcap \operatorname{Max} \bigcup_{u\in U}\ \bigcap_{w\in W(u)}\ \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi\in\mathbb{R}^Q | \psi \le \Phi(z,w,u)\} =$$

$$= \operatorname{Max} \bigcup_{u\in U}\ \bigcap_{w\in W(u)}\ \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi \ge 0 | \psi \le \Phi(z,w,u)\}. \qquad (23)$$

Обозначим через Ψ максимизируемое множество в (23):

$$\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{u\in U}\ \bigcap_{w\in W(u)}\ \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi \ge 0 | \psi \le \Phi(z,w,u)\}.$$

Оно является множеством гарантированных оценок эффективности операции с векторным критерием Φ при двухэтапном принятии решений в условиях неопределенности. Здесь u — базовое (априорное) управление, z — корректирующее, w — неопределенные факторы. Для любой оценки $\psi \in \Psi$ оперирующая сторона может гарантированно рассчитывать на не меньшее ψ значение вектора критериев. А для произвольного $\chi \in \mathbb{R}^Q_+ \setminus \Psi$ при любых действиях оперирующей стороны результирующий выигрыш может по некоторой компоненте оказаться меньше χ. Значение $\Psi^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max}\Psi$, построенное по формуле (23), таким образом, определяет наилучший гарантированный выигрыш оперирующей стороны в рассматриваемой операции.

Отметим, что для сетевых задач $[\Phi(z,w,u) = z]$ выполнено $\bigcup\limits_{z\in Z(w)} \{\psi \ge 0 | \psi \le \Phi(u,w,z)\} = \bigcup\limits_{z\in Z(w)} \Phi(u,w,z)$, что приводит к эквивалентности определений, получаемых на основе оценок, и тех, которые используют лишь достижимые значения вектора критериев. В этом частном случае совпадают также множества (23) и (20) (при определенных предположениях регулярности —

см. условие (26) ниже). Для задачи повышения живучести сетевых систем (см. § 1, п. 1) определение (23) дает максимальную гарантированную оценку живучести в форме

$$\operatorname{Max} \bigcup_{u \in U} \bigcap_{w \in W(u)} Z(w).$$

Итак, задача на векторный максиминимакс (1) свелась к задаче на векторный максимум (23). Методы многокритериальной максимизации широко представлены в научной литературе [2, 14, 23, 24], но для их применения в нашем случае необходимо уметь находить множество Ψ, что, вообще говоря, является совсем не тривиальной проблемой. По этой причине нужны методы непосредственной параметризации и аппроксимации значения векторного максиминимакса.

Традиционно для описания множеств Парето и Слейтера используется метод сверток [1, 2]. Сразу заметим, что множество Ψ оказывается невыпуклым даже для линейных (сетевых) задач (1), и применение линейной свертки частных критериев для параметризации и аппроксимации Ψ^* не оправдано. Далее рассмотрим *обратную логическую* свертку, предложенную в [25, 24] на базе логической свертки из [1].

Обратная логическая свертка предполагает замену вектора $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_Q)$ (в задаче на Max) параметрическим семейством скалярных критериев

$$\min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i, \quad \mu \in M, \tag{24}$$

где $M \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu \geq 0 | \ \sum_{i=1}^{Q} \mu_i = 1\}$ – стандартный симплекс в $\mathbb{R}^Q$, $I(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \{i = 1, 2, \ldots, Q | \ \mu_i \neq 0\}$.

Свертка (24) для задач на векторный максимум подробно изучена в [24 — 26], для задач на векторный минимакс она исследована в [6], а в [27] предложено определять с ее помощью значение векторного максиминимакса.

На основе свертки (24) сведем многокритериальную задачу (1), (23) к параметрическому семейству скалярных задач поиска

$$\theta[\mu] \stackrel{\text{def}}{=} \max_{u \in U} \min_{w \in W(u)} \max_{z \in Z(w)} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w, u) \quad \forall \mu \in M. \tag{25}$$

Отметим, что в сделанных предположениях все минимумы и максимумы в (25) достигаются и являются непрерывными функциями тех векторов z, u и w, от которых зависят (см. [10] или задачи 4.9, 4.10 из [28]).

Обозначим

$$\Psi^0 \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{u \in U} \bigcap_{w \in W(u)} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi > 0 | \psi \leq \Phi(z, w, u)\},$$

и пусть для замыкания Ψ^0 в $\mathbb{R}^Q$ справедливо

$$\overline{\Psi^0} = \Psi. \tag{26}$$

Можно показать, что при выполнении условия (26) (обобщающего условия регулярности из [25, 6, 7]) для слейтеровского значения (1), (23) имеет место представление

$$\Psi^* = \bigcup_{\mu \in M} \theta[\mu] \mu. \tag{27}$$

В отсутствии регулярности не исключено, что $\operatorname{Max} \Psi$ по Слейтеру совпадет со всем Ψ, т.е. не поможет выделить оптимальное подмножество недоминируемых стратегий. При этом формула (27) даст более узкое, чем $\operatorname{Max} \Psi$ по Слейтеру, множество, не приводя к потере паретовских значений [27].

В задаче повышения живучести сетевых систем формула (27) позволяет получить следующее определение:

$$\operatorname*{Max}_{u \in U} \operatorname*{Min}_{w \in W(u)} \operatorname*{Max}_{z \in Z(w)} z = \bigcup_{\mu \in M} \mu \max_{u \in U} \min_{w \in W(u)} \max_{z \in Z(w)} \min_{i \in I(\mu)} \frac{z_i}{\mu_i}.$$

Здесь $\theta[\mu]$ имеет смысл наибольшего гарантированного уровня обеспеченности вектора μ потоковых требований пользователей сетевой системы. Вектор $\theta[\mu]\mu$ — это вектор потоков, которые будут гарантированно пропущены по сети при любых возможных значениях неконтролируемых факторов, в условиях конкурентного распределения потоков в соответствии с требованиями (см. в [8]). Объединению таких векторов по всем вариантам требований (отнормированных к единице) и оказывается равной максимальная гарантированная оценка живучести сети с критерием эффективности — вектором потоков.

Аппроксимация значения (1) с помощью метода сверток предполагает задание некоторой ε-сети на множестве M параметров и решение оптимизационных задач (25) для выбранных μ. Существенное преимущество обратной логической свертки состоит в том, что для линейного случая она позволяет значительно уменьшить число решаемых задач (25). В [24 — 26] получены формулы аналитического пересчета значений $\theta[\mu]$ (в задаче на Max) для всех $\theta[\mu]\mu$, принадлежащих одной слейтеровской грани, по значениям $\theta[\cdot]$ в конечном числе точек, равном размерности грани. Там же разработаны алгоритмы сокращения перебора, базирующиеся на данных формулах. Предложенные алгоритмы модифицированы в [13, 9] для аппроксимации минимакса в сетевом случае. В задаче повышения живучести сети множество Ψ является объединением многогранников, так что несмотря на невыпуклость, аналогичные формулы пересчета значений $\theta[\mu]$ в пределах слейтеровских граней сохраняются и для максиминимаксных постановок. Проблема построения алгоритмов, использующих последнее свойство, представляет безусловный интерес для рассматриваемого класса задач.

Авторы выражают свою признательность и благодарность рецензентам А.В.Лотову и В.В.Морозову за плодотворное обсуждение полученных результатов.

Литература

1. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

2. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

3. *Краснощеков П.С., Петров А.А.* Принципы построения моделей. М.: МГУ, 1983.

4. *Карманов В.Г., Федоров В.В.* Моделирование в исследовании операций. М.: Твема, 1996.

5. *Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е.* Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Мецниереба, 1996.

6. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Векторный минимакс со связанными ограничениями // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. 1996. № 4. С. 45–48.

7. *Новикова Н.М., Поспелова И.И.* Векторный максиминимакс // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. 1999. № 4. С. 33–36.

8. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Модели неопределенности в многопользовательских сетях. М.: УРСС, 1999.

9. *Воробейчикова О.А., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. VI. Задача о допустимости при неслучайных потерях пропускной способности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 3. С.94–103.

10. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.

11. *Novikova N.M.* Iterative Stochastic Methods for Solving Variational Problems of Mathematical Physics and Operations Research // Journal of Math. Sciences (Contemporary Mathematics and Its Applications, Vol.3). New York - London: Plenum Publ. Corp., 1994. № 1. P.1–125.

12. *Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е.* Многокритериальные задачи управления в условиях неопределенности. Тбилиси: Мецниереба, 1991.

13. *Воробейчикова О.А.* Векторный минимакс со связанными ограничениями: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, ф.ВМиК, 1998.

14. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.

15. *Ногин В.Д.* Двойственность в многоцелевом программировании // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977. Т.17. № 1. С. 254–258.

16. *Поспелова И.И.* Классификация задач векторной оптимизации с неопределенными факторами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2000. Т.40. № 6.

17. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Параметризация значения векторного минимакса со связанными ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1997. Т.37. № 12. С. 1467–1477.

18. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Метод сверток в задаче поиска векторного максимина // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. 1998. № 1. С. 24–26.

19. *Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E.* The vector-valued maximin. N.Y.: Academic Press, 1994.

20. *Гермейер Ю.Б.* Приближенное сведение с помощью штрафных функций задачи определения максимина к задаче определения максимума // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969. Т.9. № 3. С. 730–731.

21. *Jentzsch G.* Some thoughts on the theory of cooperative games // Ann. Math. Studies, 1964. V.52. P.407–442.

22. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.

23. *Штоер Р.* Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992.

24. *Смирнов М.М.* Методы аппроксимации граней множества Парето в линейной многокритериальной задаче // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. 1996. № 3. С. 37–43.

25. *Смирнов М.М.* О логической свертке вектора критериев в задаче аппроксимации множества Парето // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1996. Т.36. № 5. С. 62–74.

26. *Смирнов М.М.* Метод обратной логической свертки в задачах векторной оптимизации. М: ВЦ РАН, 1996.

27. *Новикова Н.М., Поспелова И.И.* Параметризация значения векторного максиминимакса с помощью обратной логической свертки // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. 2000. № 3.

28. *Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В.* Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1986.

Содержание