РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А. ДОРОДНИЦЫНА

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Я.И. РАБИНОВИЧ

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ЭФФЕКТИВНЫХ ВЕКТОРНЫХ ОЦЕНОК И ЗАДАЧА СРАВНЕНИЯ АППРОКСИМАЦИЙ

ВЦ РАН

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А. ДОРОДНИЦЫНА РАН
МОСКВА 2012

УДК 519.6:519.8

Ответственный редактор
канд. физ.- матем. наук Л.Л. Вышинский

Рассматривается задача многокритериальной (векторной) оптимизации при предположениях, стандартных для классической задачи отыскания условного экстремума функции. С помощью метода ε – возмущений в пространстве значений частных критериев эффективности строится такая последовательность аппроксимирующих множеств (аппроксимаций), что отклонение множества эффективных векторных оценок от аппроксимации и отклонение аппроксимации от множества слабо эффективных векторных оценок с ростом номера аппроксимации стремятся к нулю. Для сравнения аппроксимаций, полученных с помощью различных численных методов, предложена скалярная функция, устанавливающая бинарное отношение предпочтения, согласно которому аппроксимации, от которых множество эффективных векторных оценок отклоняется незначительно, оказываются предпочтительнее любых других. Для актуальных многокритериальных задач большой размерности (при большом числе частных критериев эффективности) предлагается подход, основанный на декомпозиции и вторичной параметризации.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, эффективные векторы, аппроксимирующие множества, большая размерность, декомпозиция.

Рецензенты: В.В. Морозов,
М.Г. Фуругян

Научное издание

Введение

При рассмотрении важных с практической и теоретической точки зрения экстремальных задач методами исследования операций принципиальным является то обстоятельство, что решение, как правило, приходится принимать в условиях неопределенности. Неопределенность может быть вызвана прямым противодействием противника либо воздействием неконтролируемых природных факторов; возникает она и тогда, когда адекватно оценить эффективность принимаемых решений удается лишь с помощью нескольких критериев эффективности, а не одного единственного (скалярного) критерия.

В сравнении с классической задачей условной оптимизации возникающая задача многокритериальной (векторной) оптимизации представляет для исследователя существенно более трудную проблему, поскольку разные критерии обычно противоречивы, и не существует, как правило, решения, доставляющего наилучшие значения всем критериям эффективности одновременно. При решении многокритериальных задач можно указать на следующие два основополагающих подхода.

Существует такой конечный набор элементарных способов свертывания векторного критерия в скалярный, что комбинация сверток из набора позволяет с наперед заданной точностью аппроксимировать любой скалярный критерий, являющийся непрерывной функцией векторного [1]. Полученный методом свертки скалярный критерий зависит как от критериев эффективности, так и от неопределенных весовых коэффициентов (коэффициентов важности частных критериев эффективности). Суть первого подхода заключается в том, что после процедуры уточнения коэффициентов, которая может включать экспертный опрос, имитационное моделирование и т.п., в распоряжении исследователя оказывается единый скалярный критерий эффективности, не содержащий неопределенных параметров, и в качестве наилучшего решения можно рассматривать решение, доставляющее экстремум единого критерия эффективности. Для его отыскания теперь можно корректно применять весь спектр существующих методов математического программирования. Однако «дьявол скрывается в деталях», и качество решений при таком подходе существенным образом зависит от качества неформальных процедур уточнения неопределенных коэффициентов.

Второй подход заключается в построении удовлетворительной аппроксимации множества эффективных векторных оценок (т.е. множества таких векторных оценок, каждую из которых нельзя улучшить по любому из частных критериев, не ухудшив по одному из оставшихся), которая затем предъявляется лицу, принимающему решение для последующего анализа и отбора [2]. Генерирование множества эффективных векторных оценок может быть сведено [1] к отысканию всевозможных максимумов некоторой параметрической функции минимума взвешенных частных критериев – скалярной свертки

$$f_\lambda(x) = \min_{1 \le k \le m,\, \lambda_k > 0} \frac{w_k(x)}{\lambda_k} \xrightarrow[x \in X]{} \max, \quad \lambda \in \Lambda$$

вектора частных критериев эффективности

$$w(x) = \begin{pmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_m(x) \end{pmatrix},$$

если каждая из m его компонент положительна, и ее желательно увеличивать на допустимом множестве $X \subset \mathbf{R}^s$, где $\mathbf{R}^s$ – евклидово пространство размерности s. При подобном подходе построение множества эффективных векторных оценок, вообще говоря, требует решения континуума оптимизационных задач, поскольку неопределенный параметр (вектор весовых коэффициентов λ) принадлежит внутренности $(m-1)$ – мерного стандартного симплекса:

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1, \quad \lambda \geq 0 \right\},$$

где m – число частных критериев эффективности. Приходится ограничиваться некоторой δ – сетью на таком многомерном множестве параметров, и хотя подобные эвристические методы [2] на практике зачастую дают хорошие результаты, без предъявления дополнительных требований к частным критериям эффективности и наложенным ограничениям они не могут гарантировать получения удовлетворительной аппроксимации множества эффективных векторных оценок.

В основу настоящей работы положен второй подход. Не прибегая к строгому анализу в рамках теории сложности алгоритмов [3], нетрудно усмотреть, что при втором подходе задача многокритериальной оптимизации представляется принципиально более сложной, чем классическая задача оптимизации скалярной функции, так как здесь решение многокритериальной задачи сводится к решению задачи скалярной оптимизации в каждой точке бесконечного многомерного множества параметров. Разница в сложности не была бы принципиальной, если бы это многомерное множество, стандартный симплекс Λ, удалось корректно разделить на конечное множество подмножеств, а соответствующую задачу скалярной оптимизации можно было решать одну для всех значений параметров, входящих в конкретное подмножество. Достичь этого в общем случае не удается, однако можно сформулировать [4] итеративную процедуру построения множества эффективных векторных оценок, в каждой доминируемой опорной точке кото-

рой, для каждого из $2^m - 1$ непересекающихся непустых подмножеств Λ_J стандартного $(m-1)$ – го симплекса

$$\Lambda = \bigcup_{\varnothing \neq J \subset \{1,2,\ldots m\}} \Lambda_J \subset \mathbf{R}^m$$

наибольшее значение линейной части приращения каждой из функций семейства

$$f_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda_J$$

достигается на одном и том же возможном единичном направлении h^J (наилучшее гарантирующее направление), если выполняются обычные предположения о дифференцируемости и выпуклости соответствующих критериальных функций и функциональных ограничений. Этот результат связан с наличием у функции минимума f_λ производной по направлению [5] и служит указанием на то, что перспектива решения континуума оптимизационных задач при построении множества эффективных векторных оценок не является фатальной.

Вместе с тем использование наилучших гарантирующих направлений для приближения к множеству эффективных векторных оценок может оказаться затруднительным, поскольку по такому направлению не всегда удается сделать шаг конечной величины. Ситуация напоминает так называемую проблему «заклинивания», возникающую при решении классической задач условной оптимизации методом возможных направлений [6, 7, 8]. Изначально метод возможных направлений «не чувствует» близость к функциональному ограничению, отчего величина шага начинает мельчиться, и такое «заклинивание» преодолевают с помощью метода возмущений, требуя, чтобы невязка функциональных ограничений в каждой опорной точке была не меньше текущего положительного значения ε – параметра возмущения. В нашем же случае к «заклиниванию» приводит так же близость к границе между соседними подмножествами Λ_J стандартного симплекса. В этой связи представляется целесообразным решать проблему «заклинивания» в комплексе, модифицируя процедуру построения множества эффективных векторных оценок методом возмущений, вводя параметр возмущения также и в разбиение стандартного симплекса.

В первой главе настоящей работы введены основные определения, сформулированы необходимые и достаточные условия существования слабо эффективного решения и получен ряд предварительных и вспомогательных результатов. Показано, что для любого доминируемого решения существует конечное множество наилучших гарантирующих направлений

$$h^J\ ,\quad \varnothing \neq J \subset \{k | 1 \le k \le m\}$$

поиска слабо эффективных решений, а определение каждого из направлений h^J сводится к решению задачи квадратичного программирования.

Во второй главе дано опирающееся на метод ε – возмущений формальное описание и теоретическое обоснование численного метода, порождающего последовательность аппроксимаций множества эффективных векторных оценок. При предположениях, стандартных для классической задачи отыскания условного экстремума функции, доказана основная теорема о сходимости метода к множеству эффективных векторных оценок и его устойчивости к вычислительным погрешностям. Поскольку в согласии с предложенным численным методом построение множества эффективных векторных оценок представляет собой ветвящуюся процедуру, приводится оценка наибольшей степени ветвления.

При решении практической многокритериальной задачи в распоряжении исследователя может оказаться несколько отличающихся друг от друга аппроксимаций одного и того же множества эффективных векторных оценок (например, полученных с помощью различных численных методов, в том числе эвристических). Возникает непростая проблема сравнения не-

совпадающих аппроксимаций по качеству: одна аппроксимация может оказаться лучшим приближением некоторого подмножества эффективных векторных оценок, а другая – его дополнения. Этой проблеме посвящена третья глава, где предложена интегральная функция сравнения, устанавливающая на множестве аппроксимаций такое бинарное отношение предпочтения, что аппроксимации, от которых множество эффективных векторных оценок отклоняется незначительно, оказываются предпочтительнее любых других. Для вычисления значений функции сравнения методами численного интегрирования, в третьей главе решена задача разбиения области интегрирования (стандартного симплекса $\Lambda \subset \mathbf{R}^m$) равномерной кубической сеткой, что позволяет рассматривать введенную функцию сравнения в качестве подходящего инструмента оценки качества аппроксимирующих множеств. Дано обоснование альтернативного подхода к оценке качества аппроксимаций с помощью интегральной функции полезности.

Четвертая глава посвящена многокритериальным задачам большой размерности, когда число частных критериев эффективности может быть велико $(m > 7 \div 10)$. Такие задачи естественным образом возникают в иерархических процедурах решения сложных экономических и научно технических проблем. При большом числе частных критериев построение удовлетворительной аппроксимации множества эффективных векторных оценок сопряжено со значительными вычислительными трудностями, для преодоления которых предлагается использовать методы иерархической декомпозиции, взаимных уступок и вторичной параметризации. Для оценки сокращения степени ветвления (по сравнению со стандартной вычислительной процедурой) используется вероятностный подход.

В заключении сформулированы основные результаты исследования и дана оценка перспектив развития предложенного подхода.

Автор признателен Ю. А. Флерову за поддержку и неизменный интерес к работе и благодарит А.С. Антипина, А.И. Голикова, В.Г. Жадана, А.В. Лотова и В.В. Морозова за плодотворные обсуждения.

ГЛАВА 1

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И НАИЛУЧШИЕ ГАРАНТИРУЮЩИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ПОИСКА СЛАБО ЭФФЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ

§1. Основные определения и предварительные результаты

Пусть в s – мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^s$ задана n – мерная вектор–функция

$$v(x) \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

первые m компонент которой образуют вектор частных критериев эффективности

$$w(x) \in \mathbf{R}^m, \quad m < n, \quad w_k(x) = v_k(x), \quad 1 \le k \le m, \tag{2}$$

причем каждую его компоненту $w_k(x)$ желательно увеличивать на непустом компактном множестве допустимых решений (допустимом множестве)

$$X = \left\{ x \in \mathbf{R}^s \middle| v_k(x) \ge 0, \quad m+1 \le k \le n \right\}, \tag{3}$$

и пусть в каждой точке $x \in \mathrm{conv}X$ все частные критерии эффективности принимают положительные значения, $w(x) > 0$, так что, с учетом (1)–(3), справедливы соотношения

$$\begin{gathered} w(x) \in w(X) \subset \operatorname{int} \mathbf{R}_+^m, \\ w(X) = \left\{ u \in \mathbf{R}^m \middle| u = w(x), \ x \in X \right\}, \quad \mathbf{R}_+^m = \left\{ u \in \mathbf{R}^m \middle| u \ge 0 \right\}, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\mathrm{conv}X$ – выпуклая оболочка множества X, $w(X)$ – множество достижимых (на допустимом множестве X) векторных оценок, $\mathbf{R}_+^m$ – неотрицательный ортант в $\mathbf{R}^m$, $\operatorname{int} A$ – внутренность множества A, размерность m векторного критерия w не превосходит размерности s пространства решений $\mathbf{R}^s$, $m \le s$. Всюду далее утверждение $A \subset B$ (множество A вложено в множество B) будем понимать в нестрогом смысле, так что $A \subset A$.

Определение 1. Вектор $w \in w(X)$ называется *эффективным (слабо эффективным)*, если для всякого вектора $u \in w(X)$ система неравенств $u \ge w$ несовместна при условии, что хотя бы одно неравенство строгое (все неравенства строгие).

Вектор $w \in w(X)$ называется *доминируемым*, если существует вектор $u \in w(X)$, $u > w$.

Следствие 1. Всякий эффективный вектор слабо эффективен. Всякий вектор $w \in w(X)$ либо слабо эффективен, либо является доминируемым.

Замечание 1. Всякое допустимое решение $x \in X$, доставляющее эффективное (слабо эффективное, доминируемое) значение вектора $w(x)$, называется эффективным (слабо эффективным, доминируемым) решением.

В согласии с определением 1, следствием 1 и замечанием 1, множество эффективных (X_e), слабо эффективных (X_0) и доминируемых (X_∂) решений из множества допустимых решений (X) удовлетворяют соотношениям

$$w(X_e) \subset w(X_0) \subset w(X),$$

$$w(X_0) \cap w(X_\partial) = \varnothing, \quad w(X) = w(X_0) \cup w(X_\partial)$$

где $\varnothing$ – пустое множество, $w(X_e)$, $w(X_0)$, $w(X_\partial)$, $w(X)$ – множества эффективных, слабо эффективных, доминируемых и достижимых векторов (векторных оценок) соответственно.

Определим на $\mathbf{R}^s$ параметрическое семейство функций минимума

$$f_\lambda(x) = \min_{\alpha \in A_\lambda} < w(x), \alpha >, \quad \lambda \in \Lambda,$$

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}_+^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1 \right\}, \quad A_\lambda = \left\{ \alpha \in \mathbf{R}_+^m \,\middle|\, \langle \lambda, \alpha \rangle = 1 \right\}, \tag{5}$$

где множество $\Lambda \subset \mathbf{R}^m$ – стандартный симплекс в $\mathbf{R}^m$, $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов в $\mathbf{R}^m$.

В условиях (1)–(4) всякая функция f_λ семейства (5) при любых значениях $x \in \mathrm{conv}X$, $\lambda \in \Lambda$ удовлетворяет соотношениям

$$0 < f_\lambda(x) = \frac{w_k(x)}{\lambda_k}, k \in I_\lambda(x), \quad \lambda_k f_\lambda(x) < w_k(x), k \in I \setminus I_\lambda(x),$$

$$I = \{k | 1 \le k \le m\}, \quad I_\lambda(x) = \left\{ k \in I \,\middle|\, \frac{\lambda_k}{w_k(x)} = \max_{i \in I} \frac{\lambda_i}{w_i(x)} \right\} \ne \varnothing, \tag{6}$$

где $I \setminus J$ – теоретико–множественная разность множеств I и J. Согласно (5), (6), стандартный симплекс $\Lambda \subset \mathbf{R}^m$ представляет собой множество коэффициентов важности λ в скалярных свертках f_λ векторного критерия w из (1)–(4).

Ю.Б. Гермейеру принадлежит известная теорема [1], согласно которой построение множества эффективных векторных оценок может быть сведено к отысканию всевозможных максимумов параметрической функции минимума f_λ семейства (5) при дополнительном условии $\lambda > 0$ положительности весовых коэффициентов.

Приведем доказательство этой теоремы в следующей формулировке.

Теорема 1. *Если подмножество* $X_0 \subset X$ *является множеством допустимых решений, слабо эффективных по векторному критерию* w *из* (1)–(4), *то его можно представить в виде*

$$X_0 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Arg}\max_{x\in X} f_\lambda(x),$$

$$\operatorname{Arg}\max_{x\in X} f_\lambda(x) = X_\lambda = \left\{ x\in X \,\middle|\, f_\lambda(x) = \max_{y\in X} f_\lambda(y) \right\}, \quad \lambda\in\Lambda, \tag{7}$$

где $\bigcup$ *– символ объединения множеств, функция* f_λ *и стандартный симплекс* Λ *определены в* (5), (6).

Доказательство. Для всякого слабо эффективного вектора $w^0 = w(x^0)$, $x^0 \in X_0$, ввиду включения $X_0 \subset X$ и (4) выполняется неравенство $w^0 > 0$, так что, согласно (5), (6) для нормированного вектора ω выполняются соотношения

$$\omega = \frac{w^0}{\sum_{k=1}^m w_k^0} \in \Lambda, \quad I_\omega(x^0) = I, \quad f_\omega(x^0) = \sum_{k=1}^m w_k^0.$$

Поскольку вектор w^0 слабо эффективен, для любого фиксированного $x\in X$ найдется номер $i\in I$ такой, что $w_i(x) \le w_i^0$. Тогда вектор

$$\alpha\in\mathbf{R}^m; \quad \alpha_i = \frac{1}{\omega_i} = \frac{1}{w_i^0}\sum_{k=1}^m w_k^0, \quad \alpha_k = 0,\ k\in I\setminus\{i\},$$

удовлетворяет в (5) соотношениям

$$\alpha\in A_\omega = \left\{\alpha\in\mathbf{R}_+^m \,\middle|\, \langle\omega,\alpha\rangle = 1\right\},$$

$$f_\omega(x) \le \langle w(x),\alpha\rangle = \frac{w_i(x)}{w_i^0}\sum_{k=1}^m w_k^0 \le \sum_{k=1}^m w_k^0 = f_\omega(x^0)$$

при любом $x\in X$. По определению подмножеств X_λ в (7) это влечет включение $x^0\in X_\omega$, как только $x^0\in X_0$, так что справедливо включение $X_0 \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

Остается доказать включение $X_0 \supset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Действительно, пусть задано произвольное фиксированное решение $x\in X\setminus X_0$, т.е. вектор $w(x)$ доминируемый; тогда найдется решение $x^*\in X$ такое, что вектор $w^* = w(x^*) > w(x)$, и в (4) справедливо соотношение

$$f_\lambda(x^*) = \langle w^*, \alpha^*(\lambda)\rangle > \langle w(x), \alpha^*(\lambda)\rangle \ge f_\lambda(x), \quad \lambda\in\Lambda,$$

где $\alpha^*(\lambda)\in A_\lambda$ реализует в (5) минимум функции $f_\lambda(x^*)$. По определению множества X_λ в (7) из последних соотношений следует утверждение: $x\notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ как только $x\in X\setminus X_0$, так что справедливо включение $X_0 \supset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Множества эффективных и слабо эффективных векторов удовлетворяют соотношениям*

$$w(X_e) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_e} w(x^\lambda) \subset \bigcup_{\lambda\in\operatorname{ri}\Lambda} w(x^\lambda) \subset w(X_0),$$

$$x^\lambda \in \operatorname{Arg}\max_{x\in X} f_\lambda(x),$$

где множество

$$\Lambda_e = \bigcup_{w\in w(X_e)} \left\{ w\left(\sum_{k=1}^m w_k\right)^{-1} \right\} \subset \operatorname{ri}\Lambda,$$

а относительная внутренность $(m-1)$ *– мерного стандартного симплекса*

$$\operatorname{ri}\Lambda = \left\{ \lambda\in\mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1, \quad \lambda > 0 \right\}.$$

Доказательство. Второе включение в утверждении следствия справедливо по теореме 1; докажем оставшуюся часть утверждения.

Ввиду включения $X_e \subset X$ и соотношений (4) всякий эффективный вектор $w^0 = w(x^0) > 0$, так что, согласно (5), (6), для нормированного вектора ω выполняются соотношения

$$\omega = \frac{w^0}{\sum_{k=1}^{m} w_k^0} \in \mathrm{ri}\,\Lambda\,, \quad I_\omega(x^0) = I\,, \quad f_\omega(x^0) = \sum_{k=1}^{m} w_k^0\,.$$

Поскольку вектор w^0 эффективен, для любого фиксированного $x \in X$ найдется номер $i \in I$ такой, что $w_i(x) \le w_i^0$. Тогда вектор

$$\alpha \in \mathbf{R}^m\,; \quad \alpha_i = \frac{1}{\omega_i} = \frac{1}{w_i^0}\sum_{k=1}^{m} w_k^0\,, \quad \alpha_k = 0\,, k \in I \setminus \{i\}\,,$$

удовлетворяет в (5) соотношениям

$$\alpha \in A_\omega = \left\{\alpha \in \mathbf{R}_+^m \,\middle|\, \langle \omega, \alpha\rangle = 1\right\},$$

$$f_\omega(x) \le \langle w(x), \alpha\rangle = \frac{w_i(x)}{w_i^0}\sum_{k=1}^{m} w_k^0 \le \sum_{k=1}^{m} w_k^0 = f_\omega(x^0)$$

при любом $x \in X$, так что выполняются равенства

$$\max_{x\in X} f_\omega(x) = f_\omega(x^0) = \sum_{k=1}^{m} w_k^0\,.$$

Но тогда для произвольного вектора

$$x^\omega \in \operatorname{Arg}\max_{x\in X} f_\omega(x)$$

в согласии с (6) выполняются неравенства

$$w_k(x^\omega) \ge \omega_k f_\omega(x^\omega) = \omega_k \sum_{k=1}^{m} w_k^0 = w_k^0\,, \quad k \in I\,,$$

Согласно определению 1, последнее утверждение влечет равенство $w(x^\omega) = w^0$ для всякого эффективного вектора w^0 и произвольного вектора

$$x^\omega \in \operatorname{Arg}\max_{x\in X} f_\omega(x)\,, \quad \omega = \frac{w^0}{\sum_{k=1}^{m} w_k^0} \in \mathrm{ri}\,\Lambda\,,$$

что и доказывает утверждение

$$w(X_e) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_e} w(x^\lambda) \subset \bigcup_{\lambda\in\mathrm{ri}\,\Lambda} w(x^\lambda)\,, \quad x^\lambda \in \operatorname{Arg}\max_{x\in X} f_\lambda(x)\,;$$

следствие доказано.

Определим δ – окрестность множества $X \subset \mathbf{R}^s$

$$U_\delta(X) = \bigcup_{y\in X} U_\delta(y)\,,$$

$$U_\delta(y) = \left\{x \in \mathbf{R}^s \,\middle|\, \|x - y\| \le \delta\right\}, \quad y \in X\,, \quad \delta > 0\,, \tag{8}$$

где $\|\cdot\|$ – норма вектора в пространстве $\mathbf{R}^s$. Множество $U_\delta(X)$ компактно вместе с множеством X, причем $X \subset \mathrm{int}\,U_\delta(X)$.

Дадим, согласно [9], следующее

Определение 2. Функциональные ограничения

$$v_k(x) \ge 0\,, \quad m+1 \le k \le n\,,$$

определяющие в (3) допустимое множество X, регулярны, если существуют $\delta, \Delta > 0$ такие, что при всех $x \in U_\delta(X) \setminus X$ справедливо неравенство

$$\Delta\, d(x, X) + \min_{m+1\le k\le n} v_k(x) \le 0\,, \tag{9}$$

где величина

$$d(x, X) = \min_{y\in X}\|x - y\|\,,$$

– расстояние в $\mathbf{R}^s$ точки x до множества X.

Определим в пространстве $\mathbf{R}^s$ вспомогательное параметрическое семейство функций

$$\varphi_{\lambda\rho}(x) = f_\lambda(x) + \min_{\beta\in B_\rho}\langle u(x),\beta\rangle, \quad \lambda\in\Lambda, \quad \rho\ge 0,$$

$$B_\rho = \left\{\beta\in\mathbf{R}_+^{n-m}\,\middle|\,\sum_{l=1}^{n-m}\beta_l\le\rho\right\}, \quad u_l(x) = v_{l+m}(x),\ 1\le l\le n-m, \tag{10}$$

где $\rho-$ скаляр, семейство функций f_λ, $\lambda\in\Lambda$ задано в (5).

Лемма 1. *Пусть компоненты вектор–функции v из* (1)–(4) *непрерывны вместе со своими ограниченными частными производными на выпуклом компакте,*

$$C = U_\delta(\mathrm{conv}X)\subset\mathbf{R}^s, \quad \delta>0,$$

где $\delta-$ окрестность $U_\delta(\cdot)$ определена в (8)*, компакт X из* (2) *удовлетворяет условию регулярности* (9) *при данном значении $\delta>0$. Тогда для функций f_λ, $\varphi_{\lambda\rho}$ из* (5), (10) *можно указать $\rho_0>0$ такое, что*

$$\max_{x\in X} f_\lambda(x) = \max_{x\in U_\delta(X)}\varphi_{\lambda\rho}(x), \quad \lambda\in\Lambda, \quad \rho>\rho_0>0,$$

причем оба максимума достигаются в одних и тех же точках множества X_λ из (7)*, так что для любых значений $\rho>\rho_0>0$ справедливо утверждение*

$$X_\lambda = \left\{x\in U_\delta(X)\,\middle|\,\varphi_{\lambda\rho}(x) = \max_{y\in U_\delta(X)}\varphi_{\lambda\rho}(y)\right\}, \quad \lambda\in\Lambda. \tag{11}$$

Доказательство. Согласно (3), (10) выполняется равенство

$$\min_{\beta\in B_\rho}\langle u(x),\beta\rangle = 0, \quad x\in X, \quad \rho\ge 0,$$

так что заданные в (5), (10) функции в точках допустимого множества тождественно равны:

$$f_\lambda(x)\equiv\varphi_{\lambda\rho}(x), \quad x\in X, \quad \lambda\in\Lambda, \quad \rho\ge 0,$$

и по определению функций $\varphi_{\lambda\rho}$ в (10) достаточно доказать существование значения $\rho_0>0$ такого, что при всех

$\lambda\in\Lambda$, $\rho>\rho_0$ для всякого вектора $x\in U_\delta(X)\setminus X$ найдется вектор $y\in X$ такой, что выполняется неравенство

$$f_\lambda(y) > f_\lambda(x) + \min_{\beta\in B_\rho}\langle u(x),\beta\rangle. \tag{12}$$

Действительно, в условиях леммы функция f_λ согласно (6),(7) удовлетворяет на выпуклом множестве C условию Липшица

$$|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \le \theta\|x-y\|,$$

где константа Липшица $\theta>0$ не зависит от выбора значений $x, y\in C$, $\lambda\in\Lambda$.

Ввиду замкнутости множества X, для всякого фиксированного вектора $x\in U_\delta(X)\setminus X$ найдется вектор $y\in X$ такой, что

$$\|x-y\| = \min_{z\in X}\|x-z\| = d(x,X),$$

что, с учетом условия Липшица, влечет

$$d(x,X)\ge\theta^{-1}|f_\lambda(x)-f_\lambda(y)|, \quad \lambda\in\Lambda.$$

Подставляя это неравенство в условие регулярности (9), получаем неравенство

$$f_\lambda(y)\ge f_\lambda(x) + \theta\Delta^{-1}\min_{m+1\le k\le n} v_k(x), \quad \lambda\in\Lambda;$$

но для всякого $x\in U_\delta(X)\setminus X$, в силу (3), (10) выполняются соотношения

$$\min_{\beta\in B_\rho}\langle u(x),\beta\rangle = \min_{\beta\in B_\rho}\sum_{l=1}^{n-m}\beta_l v_{l+m}(x) = \rho\min_{m+1\le k\le n} v_k(x) < 0, \quad \rho>0,$$

что и обеспечивает выполнение неравенства (12) при всех $\rho>\rho_0=\theta\Delta^{-1}>0$. Лемма доказана.

В условиях леммы 1 справедлива теорема Данскина – Демьянова [1], [5], согласно которой всякая функция минимума $\varphi_{\lambda\rho}(x)$ семейства (10) имеет в каждой допустимой точке

$x \in X$ на любом направлении $h \in \mathbf{R}^s$ производную по направлению

$$g_{\lambda\rho}(x,h) = \frac{\partial \varphi_{\lambda\rho}(x)}{\partial h} = \min_{p \in P_{\lambda\rho}(x)} \langle p,h \rangle\,, \quad \lambda \in \Lambda\,, \quad \rho \ge 0\,, \tag{13}$$

где, согласно (5), (6), (10), выпуклые многогранники $P_{\lambda\rho} \subset R^s$ определяются соотношениями

$$P_{\lambda\rho}(x) = \left\{ p \in \mathbf{R}^s \middle| p = V^T(x) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},\ \alpha \in A^0_\lambda(x)\,,\ \beta \in B^0_\rho(x) \right\},$$

$$A^0_\lambda(x) = \left\{ \alpha \in A_\lambda \middle| \langle w(x), \alpha \rangle = f_\lambda(x) \right\} = \left\{ \alpha \in A_\lambda \middle| \alpha_k = 0\,, k \in I \setminus I_\lambda(x) \right\},$$

$$B^0_\rho(x) = \left\{ \beta \in B_\rho \middle| \langle u(x), \beta \rangle = 0 \right\} = \left\{ \beta \in B_\rho \middle| \beta_l = 0\,, l \in L \setminus L(x) \right\},$$

$$L = \left\{ l \middle| 1 \le l \le n-m \right\}, \quad L(x) = \left\{ l \in L \middle| u_l(x) = 0 \right\}, \quad V(x) = \nabla v(x)\,; \tag{14}$$

здесь V – матрица Якоби вектор–функций v из (1)–(4), $L(x)$ – множество индексов «активных» в точке $x \in X$ функциональных ограничений из (3), вектор–функции w, u и множества A_λ, I, I_λ, B_ρ определены в (1)–(6),(10), верхний индекс «*т*» – признак транспонирования матрицы.

§2. Необходимые и достаточные условия существования слабо эффективного решения

В произвольной точке $x \in X$ определим семейство многогранных множеств $P_\lambda(x) \subset \mathbf{R}^s$:

$$P_\lambda(x) = \left\{ p \in \mathbf{R}^s \middle| p = V^T(x) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix};\ \alpha \in A^0_\lambda(x)\,,\ \beta \in B(x) \right\}, \quad \lambda \in \Lambda\,, \tag{15}$$

$$B(x) = \left\{ \beta \in \mathbf{R}^n_+ \middle| < u(x), \beta >= 0 \right\} = \left\{ \beta \in \mathbf{R}^n_+ \middle| \beta_l = 0\,, l \in L \setminus L(x) \right\},$$

что согласно (10), (14) влечет включение

$$P_{\lambda\rho}(x) \subset P_\lambda(x)\,, \quad x \in X\,, \quad \lambda \in \Lambda\,, \quad \rho \ge 0\,. \tag{16}$$

Всюду далее в главе 1 полагаем условия леммы 1 выполненными.

Теорема 2. *Допустимое решение* $x \in X$ *слабо эффективно по векторному критерию* $w(x)$*, определенному соотношениями* (1)–(4)*, при необходимом условии*

$$0 \in P(x)\,, \tag{17}$$

где, согласно (10), (14), *многогранное множество*

$$P(x) = \left\{ p \in \mathbf{R}^s \middle| \begin{array}{l} p = V^T(x) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha \ge 0, \quad \beta \ge 0, \\ \langle w(x), \alpha \rangle = \sum_{k=1}^m w_k(x),\ \langle u(x), \beta \rangle = 0 \end{array} \right\}. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть решение $x \in X$ слабо эффективно. Тогда, по теореме 1, найдется вектор $\lambda \in \Lambda$ такой, что $x \in X_\lambda$, и, согласно лемме 1, найдется $\rho_0 > 0$ такое, что выполняется соотношение

$$\varphi_{\lambda\rho}(x) = \max_{y \in U_\delta(X)} \varphi_{\lambda\rho}(y)\,, \quad \rho > \rho_0 > 0\,.$$

Но ввиду (7), (8) выполняются включения

$$X_\lambda \subset X \subset \operatorname{int} U_\delta(X)\,,$$

и точка максимума $x \in X_\lambda$ – внутренняя точка множества $U_\delta(X)$, так что при всех $\rho > \rho_0 > 0$ производная (13) функции $\varphi_{\lambda\rho}$ в точке x неположительна по любому единичному направлению в пространстве $\mathbf{R}^s$:

$$0 \ge \min_{p \in P_{\lambda\rho}(x)} \langle p,h \rangle\,, \quad \|h\| = 1\,, \quad h \in \mathbf{R}^s.$$

Предположим от противного, что $0 \notin P_\lambda(x)$. Согласно (14)–(16), это влечет утверждение $0 \notin P_{\lambda\rho}(x)$, $\rho > \rho_0 > 0$. Тогда, ввиду сильной отделимости замкнутого выпуклого множества ($P_{\lambda\rho}(x)$) и точки ($p=0$), внешней по отношению к нему [10], существует единичный вектор $h^{\rho} \in \mathbf{R}^s$ такой, что для каждого $\rho > \rho_0 > 0$ выполняется неравенство

$$0 < \min_{p \in P_{\lambda\rho}(x)} \langle p, h^{\rho} \rangle ,$$

что противоречит установленному выше нестрогому неравенству и доказывает включение $0 \in P_{\lambda}(x)$.

Согласно (5), (6), (14), (15), всякий вектор $p \in P_{\lambda}(x)$ можно представить в виде

$$p = V^T(x)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \quad \langle w(x), \alpha \rangle = f_{\lambda}(x), \quad \langle u(x), \beta \rangle = 0, \quad \alpha, \ \beta \ge 0.$$

Рассмотрим с учетом $w(x) > 0$, $f_{\lambda}(x) > 0$ вектор

$$q = \sigma p, \quad \sigma = [f_{\lambda}(x)]^{-1} \sum_{k=1}^{m} w_k(x) > 0 ,$$

так что, по определению векторов q, p, выполняются соотношения

$$q = V^T(x)\begin{pmatrix}\sigma\alpha\\ \sigma\beta\end{pmatrix},$$

$$\langle w(x), \sigma\alpha \rangle = \sum_{k=1}^{m} w_k(x), \quad \langle u(x), \sigma\beta \rangle = 0, \quad \sigma\alpha \ge 0, \ \sigma\beta \ge 0,$$

и, согласно (18), для всякого вектора $p \in P_{\lambda}(x)$ соответствующий вектор $q = \sigma p \in P(x)$. Но тогда из установленного выше включения $0 \in P_{\lambda}(x)$ следует включение $0 \in P(x)$. Теорема доказана.

Следствие 3. Если в допустимой точке $x \in X$ условие (17) не выполняется, $0 \notin P(x)$, то справедливо соотношение

$$0 \notin P_{\lambda}(x), \ \lambda \in \Lambda ,$$

где множества Λ, P_{λ} заданы в (5), (15).

Замечание 2. Проверка необходимого условия (17) сводится к отысканию проекции начала координат на многогранное множество (18), т.е. к задаче квадратичного программирования [10].

Замечание 3. Подобные (17) необходимые условия существования слабо эффективного решения, в отличных от (9) условиях регулярности, установили Да-Канха, Полак, Джоффрион [11].

Определение 3. Дифференцируемая на выпуклом множестве D функция $f(x)$ называется *псевдовогнутой* на D, если для любых $x, y \in D$ неравенство

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \le 0$$

влечет неравенство $f(x) \ge f(y)$.

Вектор–функция $w(x)$ псевдовогнута, если все ее компоненты псевдовогнуты.

Теорема 3. *Пусть в условиях леммы* 1 *допустимое множество* X *из* (3) *– выпуклый компакт, определенная соотношениями* (1)–(4) *вектор–функция* $w(x)$ *псевдовогнута на* X . *Тогда необходимое, по теореме* 2, *условие* (17) *является достаточным условием слабой эффективности допустимого решения* $x \in X$ *по критерию* $w(x)$.

Доказательство. Поскольку множество слабо эффективных решений $X_0 \subset X$, то для всякого доминируемого решения $x \in X \setminus X_0$ найдется решение $y \in X$, доминирующее x, так что

$$0 < w(x) < w(y),$$

что ввиду псевдовогнутости вектор–функции w влечет соотношения

$$\langle \nabla w_k(x), h \rangle > 0, \ 1 \le k \le m, \quad h = \frac{y - x}{\|y - x\|}. \qquad (19)$$

Ввиду (3), (14), с учетом $x, y \in X$ и выпуклости допустимого множества X выполняются соотношения

$$[x, y] \subset X\ ;\quad \langle \nabla v_l(x), h\rangle \geq 0\ ,\ l \in L(x), \tag{20}$$

а с учетом (4)–(6) в (13), (14) выполняются условия

$$\omega = [\sum_{k=1}^{m} w_k(x)]^{-1} w(x) \in \Lambda\ ,\quad I_\omega(x) = I\ ,\quad A_\omega^0(x) = A_\omega\ ,$$

что ввиду (4), (5), (14), (20) для производной (13) на направлении h из (19) при любых значениях $\rho \geq 0$ приводит к соотношению

$$g_{\omega\rho}(x,h) = \min_{\alpha \in A_\omega} \langle \alpha, \nabla w(x) h\rangle = \\ = \sum_{k=1}^{m} w_k(x) \min_{1 \leq k \leq m} \left\{ \frac{\langle \nabla w_k(x), h\rangle}{w_k(x)} \right\} > 0\ . \tag{21}$$

Предположим от противного: $x \in X \setminus X_0$, $0 \in P(x)$. По определению вектора ω, согласно (5), (14), (15), (18), это предположение влечет утверждение

$$0 = V^T(x)\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix},\quad \alpha \in A_\omega\ ,\quad \beta \in B(x),$$

так что, согласно (13), (14), при условии $\rho = \sum_{l=1}^{n-m} \beta_l \geq 0$ для любых направлений $h \in R^S$ выполняются соотношения

$$0 \in P_{\omega\rho}(x)\ ,\quad g_{\omega\rho}(x,h) = \min_{p \in P_{\omega\rho}(x)} \langle p,h\rangle \leq 0\ ,$$

что противоречит утверждению (21). Теорема доказана.

§.3. Наилучшие гарантирующие направления поиска слабо эффективных решений

Полученные выше необходимые и достаточные условия существования слабо эффективного решения не только сами по

себе представляют определенный теоретический интерес; они, как и следовало ожидать, оказываются полезны при отыскании слабо эффективных решений.

Сформулируем понятия конуса, а также выпуклых, двойственных и многогранных конусов.

Определение 4. Множество $K \subset \mathbf{R}^s$ называется:

1) *конусом*, если $\sigma h \in K$ при всех $h \in K$, $\sigma \geq 0$;
2) *выпуклым конусом*, если $\sigma_1 h^1 + \sigma_2 h^2 \in K$ при всех $h^1, h^2 \in K$, $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$;
3) *конусом, двойственным конусу* $N \subset \mathbf{R}^s$, если $$K = N^+ = \{h \in \mathbf{R}^s \,|\, \langle p,h\rangle \geq 0\ ,\ p \in N\};$$
4) *многогранным конусом*, если $$K = \{h \in \mathbf{R}^s \,|\, Hh \geq 0\}, \tag{22}$$

где H – произвольная матрица размерности $m \times s$.

Замечание 4. Двойственный конусу $K \subset \mathbf{R}^s$ конус K^+ является [5] замкнутым выпуклым конусом.

Многогранный конус $K \subset \mathbf{R}^s$ является [10] замкнутым выпуклым конусом.

Двойственным многогранному конусу K из (22) является, согласно теореме Фаркаша, [10], многогранный конус

$$K^+ = \{h \in \mathbf{R}^s \,|\, h = H^T \gamma\ ,\ \gamma \geq 0\}. \tag{23}$$

Теорема 4. *Если в пространстве* $\mathbf{R}^s$ *определена единичная сфера*

$$S = \{h \in \mathbf{R}^s \,|\, \|h\| = 1\}, \tag{24}$$

замкнутое выпуклое множество G *и замкнутый выпуклый конус* K, *удовлетворяющие условиям*

$$0 \notin G + K^+\ ,\quad G + K^+ = \overline{G + K^+}, \tag{25}$$

то положительное значение

$$\|p^0\| = \min_{p\in G+K^+}\|p\| = \max_{h\in S\cap K}\inf_{p\in G}\langle p,h\rangle > 0 \tag{26}$$

достигается на единичном наилучшем гарантирующем направлении

$$h^0 = \frac{p^0}{\|p^0\|} \in S\cap K\ , \tag{27}$$

где $A\cap B$, $A+B$ *– пересечение и векторная сумма множеств* $A, B\subset \mathbf{R}^m$ *соответственно,* $\overline{A}$ *– замыкание множества* $A\subset \mathbf{R}^{m\mathbf{m}}$.

Доказательство. В условиях теоремы справедлива теорема о минимаксе [12], так что выполняются соотношения

$$Z = \max_{h\in S_0}\ \inf_{p\in G+K^+} < p,h > \ = \inf_{p\in G+K^+}\ \max_{h\in S_0} < p,h >,$$
$$S_0 = \left\{h\in \mathbf{R}^s \,\middle|\, \|h\|\le 1\right\}, \tag{28)}$$

поскольку единичный шар S_0 – выпуклый компакт, векторная сумма выпуклых множеств $G+K^+$ – выпуклое множество, совпадающее, согласно (25), со своим замыканием.

Ввиду (25) внутренний максимум в (28) при любых $p\in G+K^+$ удовлетворяет соотношениям

$$\max_{h\in S_0} < p,h > = < p, \frac{p}{\|p\|} > = \|p\| > 0\ ,$$

так что, с учетом (24), в (28) выполняются соотношения

$$Z = \min_{p\in G+K^+}\|p\| = \|p^0\| > 0\ , \tag{29}$$

а с учетом (24) положительный результат $Z>0$ доставляет единичный вектор $h^0 = p^0/\|p^0\| \in S$. Следовательно, ввиду (29) в (28) выполняются соотношения

$$Z = \max_{h\in S}\ \inf_{p\in G+K^+}\langle p,h\rangle \ = \min_{p\in G+K^+}\|p\| = \|p^0\| > 0\,. \tag{30)}$$

Справедливо следующее утверждение:

$$\inf_{p\in K^+}\langle p,h\rangle = 0\ ,\ \ h\in K\ ,$$
$$\inf_{p\in K^+}\langle p,h\rangle = -\infty\ ,\ \ h\notin K\ . \tag{31}$$

Действительно, если $h\in K$, из определения двойственного конуса следует, что

$$0\in K^+,\quad \langle p,h\rangle \ge 0\ ,\ \ p\in K^+,$$

а это ввиду равенства $\langle 0,h\rangle = 0$ доказывает первую часть утверждения (31).

Если $h\notin K$, то проекция $h^*\in K$ внешнего вектора h на замкнутый выпуклый конус K существует и обладает [10] следующими свойствами:

$$\langle h^* - h\,, \tilde h - h^*\rangle \ge 0\ ,\quad \tilde h\in K\ ,$$
$$\langle h^* - h\,, \tilde h - h\rangle \ge \|h^* - h\|^2 > 0\ ,\quad \tilde h\in K\ .$$

По определению выпуклого конуса включение $h^*\in K$ влечет

$$h^\varepsilon = (1+\varepsilon)h^*\in K\ ,\quad \varepsilon = \pm 1/2\ ,$$

так что из первого свойства проекций следует утверждение

$$\langle h^* - h\,, h^*\rangle = 0\ ,\quad \langle h^* - h\,, \tilde h\rangle \ge 0\ ,\ \ \tilde h\in K\ ,$$

т.е. вектор $h^* - h\in K^+$ по определению двойственного конуса. По определению конуса выполняется включение $0\in K$, и по второму свойству проекций справедливы неравенства

$$\langle h^* - h\,, h\rangle \le -\|h^* - h\|^2 < 0\,.$$

Но тогда для векторов $p^\sigma = \sigma(h^* - h)$, $\sigma > 1$, согласно определению конуса следует утверждение

$$p^\sigma \in K^+\ ,\quad \langle p^\sigma, h\rangle \le -\sigma^2\|h^* - h\|^2,$$

что, ввиду неравенств $\sigma > 1$, $\left\| h^* - h \right\|^2 > 0$, обеспечивает выполнение второй части утверждения (31).

Для векторной суммы множеств $G + K^+$ справедливо равенство

$$\inf_{p \in G+K^+} \langle p,h \rangle = \inf_{p \in G} \langle p,h \rangle + \inf_{p \in K^+} \langle p,h \rangle , \quad h \in R^s ,$$

что согласно (31) влечет утверждение

$$\inf_{p \in G+K^+} \langle p,h \rangle = \inf_{p \in G} \langle p,h \rangle , \quad h \in S \bigcap K ,$$

$$\inf_{p \in G+K^+} \langle p,h \rangle = -\infty , \quad h \in S , \ h \notin K ;$$

тем самым результат $Z > 0$ в (30) с необходимостью доставляет вектор $h^0 \in S \bigcap K$, причем

$$Z = \max_{h \in S \bigcap K} \ \inf_{p \in G} \langle p,h \rangle ,$$

что с учетом (30) доказывает утверждение (26), (27) теоремы 4. Теорема доказана.

Теорема 4 обобщает теорему, доказанную автором [13].

В согласии с теоремой 1 и замечанием 1, для отыскания слабо эффективных векторов достаточно решить задачу условной оптимизации

$$f_\lambda(x) \underset{x \in X}{\rightarrow} \max , \quad \lambda \in \Lambda \tag{32}$$

в каждой точке $(m-1)$ – мерного стандартного симплекса

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1 , \quad \lambda \geq 0 \right\},$$

для чего, согласно (10), (13), можно воспользоваться существованием у функции минимума (5) производной по направлению

$$\frac{\partial f_\lambda(x)}{\partial h} = g_{\lambda 0}(x,h).$$

Возникает естественное желание таким образом сгруппировать точки симплекса в конечное множество подмножеств, чтобы задачу условной оптимизации (32) можно было решать разом для всех точек соответствующего подмножества симплекса.

Предложить одно подобное разбиение симплекса для всех точек оптимизирующей последовательности не удается, но для всякой *фиксированной* опорной точки $x \in X$ и соответствующей векторной оценки $w(x) \in w(X)$ существует разбиение стандартного симплекса на $2^m - 1$ непересекающихся подмножеств Λ_J :

$$\Lambda = \bigcup_{\varnothing \neq J \subset I} \Lambda_J , \quad I = \{ k | 1 \leq k \leq m \},$$

$$\Lambda_J = \left\{ \lambda \in \Lambda \,\middle|\, \begin{array}{l} \dfrac{\lambda_k}{w_k(x)} = \dfrac{\lambda_j}{w_j(x)}, \ k, j \in J , \\ \dfrac{\lambda_k}{w_k(x)} > \dfrac{\lambda_j}{w_j(x)}, \ k \in J, \, j \in I \setminus J \end{array} \right\}, \ \varnothing \neq J \subset I . \tag{33}$$

В согласии с определением (5) соотношения (6) и разбиение (33) для произвольного фиксированного непустого подмножества индексов $J \subset I = \{ k | 1 \leq k \leq m \}$ и любого значения параметра $\lambda \in \Lambda_J$ влекут соотношения:

$$\begin{gathered} 0 < f_\lambda(x) = \frac{\sum_{k \in J} w_k(x)}{\sum_{k \in J} \lambda_k} = \frac{w_k(x)}{\lambda_k}, \quad k \in J , \\ \lambda_k f_\lambda(x) < w_k(x), \quad k \in I \setminus J, \end{gathered} \tag{34}$$

так что параметрическая функция $f_\lambda(x)$ семейства (5) имеет один и тот же вид во всех точках фиксированного подмножества Λ_J . Подобное утверждение справедливо и для производной по направлению этой функции, поскольку выполняется следующая

Лемма 2. *В каждой фиксированной допустимой точке* $x \in X$ *производная по направлению функции* f_λ *семейства* (5) *на любом направлении* $h \in \mathbf{R}^s$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\frac{\partial f_\lambda(x)}{\partial h} = g_{\lambda 0}(x,h) = f_\lambda(x) \min_{k \in J} \left\{ \frac{\langle \nabla w_k(x), h \rangle}{w_k(x)} \right\}, \quad \lambda \in \Lambda_J, \quad (35)$$

$$\varnothing \neq J \subset I,$$

если вектор–функция w, *производная* $g_{\lambda 0}$ *и множества* X, Λ_J, I *заданы соотношениями* (1)–(4), (13), (33).

Доказательство. Из определения разбиения (33) следует, что в соотношениях (6) для всякого значения $\lambda \in \Lambda_J$, $\varnothing \neq J \subset I$ соответствующее подмножество

$$I_\lambda(x) = \left\{ k \in I \left| \frac{\lambda_k}{w_k(x)} = \max_{i \in I} \frac{\lambda_i}{w_i(x)} \right. \right\} = J.$$

Из этого равенства в согласии с определениями (5), (10), (13), (14) следуют соотношения

$$\frac{\partial f_\lambda(x)}{\partial h} = g_{\lambda 0}(x,h) = \min_{k \in J} \left\{ \frac{\langle \nabla w_k(x), h \rangle}{\lambda_k} \right\}, \quad \lambda \in \Lambda_J, \quad \varnothing \neq J \subset I,$$

что, согласно представлению функции минимума f_λ в (34), влечет утверждение (35). Лемма доказана.

Отметим, что, в согласии с определением (14), всякое многогранное множество (15) можно представить в виде векторной суммы выпуклого многогранника и многогранного конуса:

$$P_\lambda(x) = G_\lambda(x) + N^+(x), \quad \lambda \in \Lambda, \quad (36)$$

где, с учетом определения многогранного конуса (22), по теореме Фаркаша из представления (23) следует утверждение:

$$G_\lambda(x) = \left\{ p \in \mathbf{R}^s \left| p = W^T(x)\alpha, \ \alpha \in A_\lambda^0(x) \right. \right\}, \quad \lambda \in \Lambda,$$
$$N(x) = \left\{ h \in \mathbf{R}^s \left| V(x)h \geq 0 \right. \right\},$$
$$N^+(x) = \left\{ p \in \mathbf{R}^s \left| p = V^T(x)\beta, \ \beta \geq 0 \right. \right\}, \quad (37)$$
$$W(x) = \nabla w(x), \quad V^T(x) = \left[\nabla v_{l+m}(x) \right]_{l \in L(x)};$$

здесь $W(x)$ – матрица Якоби вектор–функций w из (1)–(4), матрица $V^T(x)$, по определению множества $L(x)$ в (14), содержит в качестве вектор–столбцов градиенты левых частей "активных" в точке $x \in X$ ограничений из (3). Если допустимое множество X – выпуклый компакт, то многогранный конус $N(x)$ является конусом возможных направлений в точке $x \in X$ [5].

Теорема 5. *Если допустимое решение* $x \in X$ *не удовлетворяет необходимому условию слабой эффективности* (17), $0 \notin P(x)$, *то для любого фиксированного подмножества*

$$\Lambda_J, \quad \varnothing \neq J \subset I$$

в разбиении стандартного симплекса (33) *производная по направлению* (35) *достигает наибольшего положительного значения*

$$\frac{\partial f_\lambda(x)}{\partial h^J} = \max_{h \in S \cap N(x)} \frac{\partial f_\lambda(x)}{\partial h} = \left[\sum_{k \in J} \lambda_k \right]^{-1} \left\| p^J \right\| > 0, \quad \lambda \in \Lambda_J \quad (38)$$

на единичном наилучшем гарантирующем направлении

$$h^J = \frac{p^J}{\left\| p^J \right\|} \in S \cap N(x), \quad \left\| p^J \right\| = \min_{p \in P_{\lambda(J)}(x)} \left\| p \right\|, \quad (39)$$

где вектор

$$\lambda(J) = \frac{\sum_{k \in J} w_k(x) e^k}{\sum_{k \in J} w_k(x)} \in \Lambda_J, \quad (40)$$

e^k *– единичные орты в пространстве* $\mathbf{R}^m$, *вектор–функция* w *и множества* X, $P_\lambda(x)$, $P(x)$, S, $N(x)$ *заданы в* (1)–(4), (15), (18), (24), (37).

Доказательство. Включение $x \in X$ влечет, в согласии с (4), неравенство $w(x) > 0$, и из соотношений (33) следует включение $\lambda(J) \in \Lambda_J$ в (40), причем ввиду (34), (35) справедливо утверждение

$$f_\lambda(x) = \left[\sum_{k\in J}\lambda_k\right]^{-1}\sum_{k\in J} w_k(x),\quad g_{\lambda 0}(x,h) = \left[\sum_{k\in J}\lambda_k\right]^{-1} g_{\lambda(J)0}(x,h), \tag{41}$$

$$\lambda \in \Lambda_J,\quad h \in S \cap N(x).$$

Поскольку необходимое условие слабой эффективности (17) не выполняется, $0 \notin P(x)$, то, согласно следствию 3 из теоремы 2, справедливо утверждение

$$0 \notin P_\lambda(x),\ \lambda \in \Lambda.$$

Справедливо также утверждение

$$P_\lambda(x) + N^+(x) = P_\lambda(x),\ P_\lambda(x) = \overline{P_\lambda(x)},\ \lambda \in \Lambda,$$

так как, по определению в (36), (37), многогранное множество $P_\lambda(x) = G_\lambda(x) + N^+(x)$ совпадает со своим замыканием. Тем самым выполняется условие (25) теоремы 4. С учетом (13), (14), (41) из утверждения (26) теоремы 4 следует утверждение

$$\max_{h\in S\cap N(x)} g_{\lambda 0}(x,h) = \left[\sum_{k\in J}\lambda_k\right]^{-1}\max_{h\in S\cap N(x)} g_{\lambda(J)0}(x,h) =$$

$$= \left[\sum_{k\in J}\lambda_k\right]^{-1}\min_{p\in P_{\lambda(J)}(x)}\|p\| = \left[\sum_{k\in J}\lambda_k\right]^{-1}\|p^J\| > 0,$$

при всех $\lambda \in \Lambda_J$, а согласно утверждению (27) теоремы 4, это значение доставляет единичный вектор h^J из соотношений (39). Но ввиду (35) это значение совпадает со значением в (38). Теорема доказана.

Полученные в условиях главы 1 результаты позволяют утверждать, что для всякого допустимого решения $x^0 \in X$ существуют две возможности.

1. Выполняется условие $0 \in P(x^0)$, необходимое (по теореме 2) и достаточное (по теореме 3) условие слабой эффективности решения $x^0 \in X$.

2. Условие $0 \in P(x^0)$ не выполняется и, в согласии с теоремой 2 и следствием 1, решение $x^0 \in X$ является доминируемым. Тогда для функций семейства

$$f_\lambda(x),\quad \lambda \in \Lambda = \bigcup_{\varnothing \ne J\subset I}\Lambda_J,$$

множество точек максимума которых, по теореме 1, совпадает с множеством слабо эффективных решений, согласно теореме 5 можно утверждать следующее.

Для любого фиксированного непустого подмножества индексов $J \subset I = \{k \mid 1 \le k \le m\}$ наибольшее значение линейной части приращения каждой из функций семейства

$$f_\lambda(x),\quad \lambda \in \Lambda_J$$

в точке $x^0 \in X$ достигается на одном и том же наилучшем гарантирующем направлении $h^J \in S \cap N(x^0)$, которое является возможным направлением, если допустимое множество X – выпуклый компакт. Отыскание каждого из $2^m - 1$ единичных векторов h^J (где m – число частных критериев эффективности) сводится к отысканию проекции начала координат на многогранное множество, то есть к задаче квадратичного программирования.

ГЛАВА 2

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ЭФФЕКТИВНЫХ ВЕКТОРНЫХ ОЦЕНОК МЕТОДОМ ε – ВОЗМУЩЕНИЙ

В предыдущей главе 1 было установлено, что в каждой доминируемой точке $x \in X \setminus X_0$ допустимого множества X прирост значений *всех* функций из параметрического семейства

$$\left\{ f_\lambda(x) \right\}_{\lambda \in \mathrm{ri}\,\Lambda}, \quad \mathrm{ri}\,\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1, \quad \lambda > 0 \right\}$$

можно обеспечить на *конечном* множестве направлений

$$\left\{ h^J \right\}_{\varnothing \neq J \subset I}, \quad I = \left\{ k \middle| 1 \le k \le m \right\}.$$

Этот результат (существование конечного «спектра» наилучших гарантирующих направлений) позволяет надеяться на создание конструктивного численного метода построения множества эффективных векторных оценок $w(X_e)$, поскольку в согласии со следствием 2 из теоремы 1 главы 1, множество

$$w(X_e) = \bigcup_{\lambda \in \mathrm{ri}\,\Lambda} w\left(\mathrm{Arg}\max_{x \in X} f_\lambda(x) \right).$$

Вместе с тем напрямую воспользоваться результатами главы 1 не удается по следующим причинам.

Наилучшее гарантирующее направление h^J, которое, по теореме 5 главы 1, определяется из решения задачи квадратичного программирования, может оказаться хуже «неоптимального» направления h^*, удовлетворяющего соотношениям

$$\langle \nabla w_k(x^0), h^* \rangle > 0, \quad k \in J,$$

если опорная точка $x^0 \in X$ находится вблизи границы, когда мала невязка левых частей функциональных ограничений из соотношений (3) главы 1,

$$0 < \min_{m+1 \le k \le n} v_k(x^0) << 1.$$

В самом деле, хотя линейная часть приращения каждой из функций семейства

$$f_\lambda(x), \quad \lambda \in \Lambda_J$$

в точке $x^0 \in X$ на направлении h^J по крайней мере не меньше, чем на направлении h^*, само приращение может оказаться меньше, если из-за близости границы допустимого множества по направлению h^* можно сделать существенно больший шаг, чем по направлению h^J. Тем самым наилучшие гарантирующие направления $\left\{ h^J \right\}_{\varnothing \neq J \subset I}$ могут оказаться просто плохими.

В более широком смысле, от поведения численного метода построения аппроксимаций вблизи границ допустимого множества существенным образом зависит сходимость метода к решению (множеству эффективных векторных оценок). Уже при скалярном критерии эффективности (m=1) решение задачи условной оптимизации методами, не выводящими за пределы допустимого множества [14], может приводить к так называемому «застреванию» или «заклиниванию», когда измельчение шага вблизи границы препятствует сходимости алгоритма.

Проблема «заклинивания» успешно преодолевается с помощью метода возмущений, если в каждой опорной точке алгоритма $x \in X$ учитывать не только «активные» ограничения (см. соотношения (3), (14) главы 1), номера которых содержатся во множестве

$$L(x) = \left\{ k \middle| \, m+1 \le k \le n, \quad v_k(x) = 0 \right\},$$

но более широкое множество «ε – активных» ограничений:

$$L(x,\varepsilon)=\{k \mid m+1\le k\le n\,,\quad v_k(x)\le\varepsilon\},\quad \varepsilon\ge 0\,,$$

где ε – параметр возмущения.

Подобный подход был успешно реализован при создании метода возможных направлений [6, 7, 8]. В нашем случае интерес к этому методу обуславливает, прежде всего, следующее обстоятельство. При построении множества эффективных векторных оценок развитыми в предыдущей главе методами к «заклиниванию» может приводить не только близость опорных точек к границе допустимого множества, но также и близость вектора весовых коэффициентов к границе между соседними непересекающимися подмножествами Λ_J стандартного симплекса. Поэтому представляется целесообразным решать весь комплекс проблем с единых позиций, модифицируя процедуру построения множества эффективных векторных оценок методом возмущений и вводя параметр возмущения также и в разбиение стандартного симплекса. Предстоит также по-новому сформулировать условия регулярности и несколько изменить требования к дифференциальным свойствам частных критериев эффективности и левых частей функциональных ограничений.

§1. Формулировка задачи и некоторые свойства разбиений стандартного симплекса

Пусть по-прежнему в s – мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^s$ задана n – мерная вектор–функция

$$v(x)\in\mathbf{R}^n, \tag{1}$$

первые m компонент которой образуют вектор частных критериев эффективности

$$w(x)\in\mathbf{R}^m,\quad m<n\,,\quad w_k(x)=v_k(x),\quad 1\le k\le m, \tag{2}$$

причем каждую его компоненту $w_k(x)$ желательно увеличивать на непустом компактном множестве допустимых решений (допустимом множестве)

$$X=\{x\in\mathbf{R}^s \mid v_k(x)\ge 0,\quad m+1\le k\le n\}, \tag{3}$$

и пусть в каждой точке $x\in X$ все частные критерии эффективности принимают положительные значения, $w(x)>0$, так что, с учетом (1) – (3), справедливы соотношения

$$\begin{gathered} w(x)\in w(X)\subset \operatorname{int}\mathbf{R}^m_+, \\ w(X)=\{u\in\mathbf{R}^m \mid u=w(x),\quad x\in X\},\quad \mathbf{R}^m_+=\{u\in\mathbf{R}^m \mid u\ge 0\}. \end{gathered} \tag{4}$$

Всюду далее, если потребуется, будем полагать, что градиенты

$$\nabla v_k(x),\quad 1\le k\le n \tag{5}$$

компонент вектор–функции v из (1)–(4) существуют на открытом множестве $A\supset \operatorname{conv}X$, удовлетворяют на компакте X условию регулярности

$$\begin{gathered} \sum_{k=m+1}^{n}\gamma_k\nabla v_k(x)\ne 0\,, \\ \sum_{k=m+1}^{n}\gamma_k=1\,,\quad \gamma\ge 0\,,\quad \gamma_k=0\,,\quad k:\ v_k(x)>0\,, \end{gathered} \tag{6}$$

а на выпуклой оболочке допустимого множества $\operatorname{conv}X$ – условию Липшица

$$\begin{gathered} \|\nabla v_k(x)-\nabla v_k(y)\|\le\theta\|x-y\|,\quad 1\le k\le n\,,\quad x,y\in\operatorname{conv}X\,, \\ \theta=\mathrm{const}>0\,. \end{gathered} \tag{7}$$

Параметрическое семейство функций минимума

$$f_\lambda(x)=\min_{1\le k\le m,\,\lambda_k>0}\frac{w_k(x)}{\lambda_k},\quad \lambda\in\Lambda,\quad x\in\mathbf{R}^s,$$
$$\Lambda=\left\{\lambda\in\mathbf{R}^m\,\middle|\,\sum_{k=1}^m\lambda_k=1,\quad \lambda\ge 0\right\},\tag{8}$$

где область значений параметра $\Lambda\subset\mathbf{R}^m$ – стандартный симплекс размерности $m-1$, при любых $\lambda\in\Lambda$, $x\in X$ удовлетворяет соотношениям

$$0<f_\lambda(x)=\frac{w_k(x)}{\lambda_k},\,k\in I_\lambda(x),\quad \lambda_k f_\lambda(x)<w_k(x),\,k\in I\setminus I_\lambda(x),$$
$$I=\{k|1\le k\le m\},\quad I_\lambda(x)=\left\{k\in I\,\middle|\,\frac{\lambda_k}{w_k(x)}=\max_{i\in I}\frac{\lambda_i}{w_i(x)}\right\}\ne\varnothing,\tag{9}$$

Параметрическое семейство (8) совпадает с параметрическим семейством функций (5) главы 1, и для него справедлива теорема 1 главы 1. В согласии со следствием 2 из теоремы 1 главы 1, для отыскания множества эффективных векторных оценок достаточно решить задачу условной оптимизации

$$f_\lambda(x)\underset{x\in X}{\to}\max,\quad \lambda\in\operatorname{ri}\Lambda,$$
$$\operatorname{ri}\Lambda=\left\{\lambda\in\mathbf{R}^m\,\middle|\,\sum_{k=1}^m\lambda_k=1,\quad \lambda>0\right\},$$

в каждой точке множества $\operatorname{ri}\Lambda$ – относительной внутренности $(m-1)$ – мерного стандартного симплекса Λ. На практике это означает, что многомерный стандартный симплекс покрывают более ли менее густой сетью (выбирается конечная δ – сеть $\Lambda_\delta\subset\operatorname{ri}\Lambda$), и задачу условной оптимизации решают в каждом узле сети $\lambda\in\Lambda_\delta$, несколько модифицируя [15] параметрическую функцию f_λ. Выше упоминалось, что подобный подход на практике может быть весьма успешен, например, в автоматизированном проектировании сложных объектов техническо-

го назначения [2, 15]. Для непрерывных на компакте X частных критериев эффективности доказана сходимость описанной процедуры к множеству эффективных векторных оценок при стремлении к нулю параметра сети δ, ее устойчивость к погрешностям вычислений [15, 16]. Вместе с тем число узлов в сети $\Lambda_\delta\subset\mathbf{R}^m$ быстро растет при увеличении числа критериев m и измельчении параметра сети δ, что может служить препятствием в решении ряда сложных практических задач.

В предыдущей главе 1 был намечен другой подход к проблеме построения множества эффективных векторных оценок. Для преодоления возникших трудностей воспользуемся методом ε – возмущений. В каждой точке $x\in X$ допустимого множества (3) определим множество $L(x,\varepsilon)$ номеров «ε – активных» функциональных ограничений:

$$L(x,\varepsilon)=\{k|v_k(x)\le\varepsilon\},\quad \varepsilon\ge 0,\quad K=\{k|\,m+1\le k\le n\},\tag{10}$$

где ε – неотрицательный параметр возмущения. Введем также параметр возмущения в разбиение стандартного симплекса Λ, ограничивающего в соотношениях (8) коэффициенты важности λ частных критериев w в скалярной свертке f_λ. Действительно, всякий вектор w и параметр возмущения ε, удовлетворяющие условиям

$$w\in\operatorname{int}\mathbf{R}^m_+,\quad 0\le\varepsilon<1,\tag{11}$$

порождают 2^m-1 подмножеств Λ_J у $(m-1)$ – мерного стандартного симплекса Λ:

$$\Lambda_J(w,\varepsilon)=\left\{\lambda\in\Lambda\,\middle|\,\frac{\lambda_k}{w_k}\ge(1-\varepsilon)\frac{\sum_{j\in J}\lambda_j}{\sum_{j\in J}w_j}\ge\frac{\lambda_l}{w_l},\ k\in J,\ l\in I\setminus J\right\},\tag{12}$$
$$\varnothing\ne J\subset I,\quad I=\{k|1\le k\le m\}.$$

Лемма 1. *Стандартный симплекс* Λ, *заданный соотношениями* (8), *совпадает с объединением подмножеств* Λ_J, *определенных соотношениями* (11), (12):

$$\Lambda = \bigcup_{\varnothing \neq J \subset I} \Lambda_J(w,\varepsilon). \tag{13}$$

Доказательство. Из определения (12) подмножеств Λ_J следует включение

$$\Lambda \supset \bigcup_{\varnothing \neq J \subset I} \Lambda_J(w,\varepsilon),$$

так что остается доказать противоположное включение

$$\Lambda \subset \bigcup_{\varnothing \neq J \subset I} \Lambda_J(w,\varepsilon). \tag{14}$$

Согласно (8), для всякого фиксированного вектора $\lambda \in \Lambda$ выполняются соотношения

$$\lambda \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1, \tag{15}$$

а ввиду (11) вектор $w > 0$. Расположим отношения λ_k / w_k в порядке убывания, причем без потери общности будем полагать, что выполняются соотношения

$$\lambda_1 > 0, \quad \frac{\lambda_k}{w_k} \geq \frac{\lambda_{k+1}}{w_{k+1}}, \quad 1 \leq k \leq m-1, \tag{16}$$

где первое неравенство следует из последующих при учете (15). Согласно (11), (12), (16) выполняется включение $\lambda \in \Lambda_{\{1\}}(w,0)$, так что при условии $\varepsilon = 0$ включение (14) доказано.

Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Тогда ввиду неравенств $\lambda_1 > 0$, $w > 0$ выполняется неравенство $\lambda_1 w_1 > (1-\varepsilon)\lambda_1 w_1$. Следовательно, можно указать наибольший номер i такой, что справедливо утверждение

$$1 \leq i \leq m, \quad \lambda_k \sum_{j=1}^{i} w_j > (1-\varepsilon) w_k \sum_{j=1}^{i} \lambda_j, \quad 1 \leq k \leq i. \tag{17}$$

и выполняются неравенства

$$\frac{\lambda_k}{w_k} > (1-\varepsilon) \frac{\sum_{j=1}^{i} \lambda_j}{\sum_{j=1}^{i} w_j} > 0, \quad 1 \geq k \geq i. \tag{18}$$

Если в (17), (18) выполняется равенство $i = m$, то согласно (12), (15) выполняется включение $\lambda \in \Lambda_I(w,\varepsilon)$. Покажем при условии $1 \leq i < m$, что справедливо неравенство

$$(1-\varepsilon) w_{i+1} \sum_{j=1}^{i} \lambda_j > \lambda_{i+1} \sum_{j=1}^{i} w_j. \tag{19}$$

Действительно, в противном случае выполняется неравенство $\lambda_{i+1} > 0$ согласно (11), (18), так что ввиду (11), (16)–(18) при всех $k, 1 \leq k \leq i+1$ выполняются неравенства

$$\lambda_k \sum_{j=1}^{i+1} w_j = \lambda_k w_{i+1} + \lambda_k \sum_{j=1}^{i} w_j > (1-\varepsilon)\left(\lambda_{i+1} w_k + w_k \sum_{j=1}^{i} \lambda_j \right) =$$

$$= (1-\varepsilon) w_k \sum_{j=1}^{i+1} \lambda_j,$$

что противоречит утверждению о том, что номер i в соотношениях (17) – наибольший.

Согласно (16), (19), выполняются неравенства

$$(1-\varepsilon) w_k \sum_{j=1}^{i} \lambda_j > \lambda_k \sum_{j=1}^{i} w_j, \quad i+1 \leq k \leq m$$

что совместно с неравенствами (18) по определению (12) подмножеств Λ_J влечет утверждение

$$\lambda \in \Lambda_J(w,\varepsilon), \quad J = \{k | 1 \leq k \leq i\}.$$

Поскольку вектор $\lambda \in \Lambda$ был выбран произвольно, это включение доказывает утверждение (14) при условии $0 < \varepsilon < 1$. Лемма доказана.

Следует обратить внимание на то, что в отличие от непересекающихся подмножеств разбиения (33) в главе 1, подмножества $\Lambda_J(w,\varepsilon)$ из разбиения (12), (13) при условии $0<\varepsilon<1$ перекрывают стандартный симплекс $\Lambda\subset\mathbf{R}^m$ «внахлест», с ненулевым «ε – запасом».

Если в разбиении (11), (12) параметр возмущения обращается в нуль, $\varepsilon=0$, то множества Λ, Λ_J из (8), (11)–(13) удовлетворяют соотношениям

$$\Lambda=\bigcup_{\varnothing\neq J\subset I}\Lambda_J(w,0)=\bigcup_{i\in I}\Lambda_{\{i\}}(w,0),$$

$$\Lambda_J(w,0)=\left\{\lambda\in\Lambda\left|\begin{array}{ll}\dfrac{\lambda_k}{w_k}=\dfrac{\lambda_l}{w_l}, & k,l\in J,\\ \dfrac{\lambda_k}{w_k}\geq\dfrac{\lambda_l}{w_l}, & k\in J,\ l\in I\setminus J\end{array}\right.\right\},\ \varnothing\neq J\subset I,\ (20)$$

$$I=\{k|1\leq k\leq m\}.$$

Определенные соотношениями (8), (11)–(13) подмножества Λ_J стандартного симплекса Λ обладают рядом полезных свойств. Сформулируем эти свойства в виде следующих двух лемм.

Лемма 2. *Для любых фиксированных подмножеств J и векторов λ таких, что*

$$\varnothing\neq J\subset I,\quad I=\{k|1\leq k\leq m\},\quad \lambda\in\Lambda_J(w,\varepsilon),$$

выполняются неравенства

$$0<\sum_{j\in J}\lambda_j\leq 1,$$

$$0<\frac{\sum_{j\in M}\lambda_j}{\sum_{j\in M}w_j}\leq\left(1-\varepsilon\frac{\sum_{j\in M\setminus J}w_j}{\sum_{j\in M}w_j}\right)\frac{\sum_{j\in J}\lambda_j}{\sum_{j\in J}w_j},\quad M\neq J\subset M\subset I,\qquad (21)$$

$$0<\lambda_k,\quad \frac{1-\varepsilon}{\sum_{j\in J}w_j}\sum_{j\in J}\lambda_j\leq\frac{\lambda_k}{w_k}\leq\left(\frac{1-\varepsilon}{\sum_{j\in J}w_j}+\frac{\varepsilon}{w_k}\right)\sum_{j\in J}\lambda_j,\quad k\in J.$$

Доказательство. Первое, второе, третье, пятое и шестое неравенства в утверждении (21) следуют из определений множеств Λ, Λ_J в (8), (11), (12). Согласно (8), (12), (13), включение $\lambda\in\Lambda_J(w,\varepsilon)$ при условии $\varnothing, M\neq J\subset M\subset I$ влечет соотношения

$$(1-\varepsilon)\sum_{j\in M\setminus J}w_j\sum_{j\in J}\lambda_j\geq\sum_{j\in J}w_j\sum_{j\in M\setminus J}\lambda_j=\sum_{j\in J}w_j\left(\sum_{j\in M}\lambda_j-\sum_{j\in J}\lambda_j\right),$$

что ввиду

$$0\leq\varepsilon<1,\quad w>0,$$

влечет четвертое неравенство в (21).

Заметим, что при фиксированном значении суммы $\sum_{j\in J}\lambda_j$ для всякого фиксированного номера $k\in J$ величина λ_k максимальна, $\lambda_k=\lambda_k^*$ тогда и только тогда, когда величины λ_i при всех $i\in J\setminus\{k\}$ минимальны, $\lambda_i=\lambda_i^*$. В согласии с (12) и включением $\lambda\in\Lambda_J(w,\varepsilon)$, эти минимальные значения можно вычислить, исходя из равенств

$$\lambda_i^*=(1-\varepsilon)w_i\frac{\sum_{j\in J}\lambda_j}{\sum_{j\in J}w_j},\quad i\in J\setminus\{k\}$$

Суммируя эти равенства по номерам $i \in J \setminus \{k\}$, с учетом равенства $\sum_{j\in J}\lambda_j = \sum_{j\in J}\lambda_j^*$ получим соотношения

$$\sum_{i\in J\setminus\{k\}}\lambda_i^* = (1-\varepsilon)\sum_{i\in J\setminus\{k\}} w_i \frac{\sum_{j\in J}\lambda_j}{\sum_{j\in J} w_j},$$

$$\sum_{j\in J} w_j\left(\sum_{j\in J}\lambda_j - \lambda_k^*\right) = (1-\varepsilon)\left(\sum_{i\in J} w_i - w_k\right)\sum_{j\in J}\lambda_j,$$

так что выполняется равенство

$$\frac{\lambda_k^*}{w_k} = \left(\frac{1-\varepsilon}{\sum_{j\in J} w_j} + \frac{\varepsilon}{w_k}\right)\sum_{j\in J}\lambda_j .$$

Поскольку величина λ_k^* максимальна, из последнего равенства следует седьмое неравенство в (21). Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любых векторов* w, u, *параметров* ε, φ *и множеств* J, I, *удовлетворяющих соотношениям*

$$w, u \in w(X), \quad 0<\varepsilon<1, \quad 1-\varphi\varepsilon \le \frac{u_k}{w_k} \le 1+\varphi\varepsilon, \ 1\le k\le m,$$

$$0 < 2\varphi \le \frac{\min\limits_{x\in X}\min\limits_{1\le k\le m} w_k(x)}{\max\limits_{x\in X}\sum_{k=1}^{m} w_k(x)} \le 1, \quad \varnothing \ne J \subset I, \quad I = \{k | 1\le k\le m\},$$

выполняются включения

$$\Lambda_J(w,\varepsilon) \setminus \bigcup_{\varnothing,\, J\ne M\subset J}\Lambda_M(w,\varepsilon) \subset \bigcup_{J\subset M\subset I}\Lambda_M(u,\varepsilon).$$

Доказательство леммы 3 дано в Приложении 1.

Замечание 1. Если подмножествам Λ_J, Λ_M в разбиении (11)–(13) при условии $M\subset J$ присвоить названия «старшего» и «младшего» подмножества соответственно, то смысл утверждения леммы 3 состоит в следующем: всякая точка стандартного симплекса, принадлежащая подмножеству $\Lambda_J(w,\varepsilon)$, но не прочим «младшим» по отношению к нему подмножествам, принадлежит к объединению подмножеств, «старших» по отношению к подмножеству $\Lambda_J(u,\varepsilon)$, если расстояние между векторами u, w не слишком велико.

§2. Дифференциальные свойства вектор–функции $v(x)$ и конечные приращения ее скалярных сверток

При переходе от опорного решения $x\in X_t$ к решению $y = x+\alpha h \in X_{t+1}$, где $\{w(X_t)\}_{t=1}^{\infty}$ – последовательность аппроксимаций множества эффективных векторов, будем учитывать информацию о градиентах $\nabla v_k(x)$, $1\le k\le n$ частных критериев и левых частей ограничений (в полном соответствии с идеологией методов первого порядка, применяемых для решения задач условной оптимизации).

Рассмотрим в произвольной допустимой точке $x\in X$ проекцию $p(x,J)$ начала координат на выпуклую оболочку

$$\mathrm{conv}\{\nabla v_k(x)\}_{k\in J}$$

градиентов соответствующих компонент вектор–функции $v(x)$ из (1)–(5):

$$p(x,J)\in G(x,J), \quad \|p(x,J)\| = \min_{p\in G(x,J)}\|p\|,$$

$$G(x,J) = \mathrm{conv}\{\nabla v_k(x)\}_{k\in J} =$$

$$= \left\{ p\in \mathbf{R}^s \,\middle|\, p = \sum_{k\in J}\gamma_k \nabla v_k(x), \quad \sum_{k\in J}\gamma_k = 1, \quad \gamma_k \ge 0, \quad k\in J \right\}, \tag{22}$$

$$\varnothing \ne J \subset N, \quad N = \{k | 1\le k\le n\}.$$

Из свойств проекций [10] следуют неравенства

$$\langle p,\, p(x,J)\rangle \ge \|p(x,J)\|^2 , \quad p\in G(x,J); \tag{23}$$

но, по определению в (22) выпуклых оболочек G, выполняются включения

$$\nabla v_k(x)\in G(x,J), \quad k\in J , \tag{24}$$

так что, в согласии с (22)–(24), выполняются неравенства

$$\langle \nabla v_k(x),\, p(x,J)\rangle \ge \|p(x,J)\|^2 \quad k\in J . \tag{25}$$

Лемма 4. *Определенная в* (22) *функция минимума* $\|p(x,J)\|$ *при любых фиксированных непустых подмножествах* $J\subset N$ *непрерывна по* x *в каждой точке* $x\in X$ *, где компакт* X *– допустимое множество из* (3).

Доказательство. Из определений (5), (22) следует, что в каждой точке $x\in \operatorname{conv}X$ выполняются соотношения

$$\|p(x,J)\| = \min_{\gamma\in\Gamma}\left\|\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\nabla v_k(x)\right\|,$$

$$\Gamma=\left\{\gamma\in \mathbf{R}_+^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n}\gamma_k=1, \quad \gamma_k=0, \quad k\in N\setminus J\right\},$$

так что, согласно условию Липшица (7), $\|p(x,J)\|$ – функция минимума на симплексе $\Gamma\subset \mathbf{R}^n$ функции $\left\|\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\nabla v_k(x)\right\|$, непрерывной по совокупности переменных γ, x на декартовом произведении $\Gamma\times\operatorname{conv}X$ компактов Γ и $\operatorname{conv}X$. Согласно [6], такая функция $\|p(x,J)\|$ непрерывна в каждой точке $x\in X$ ввиду включения $X\subset\operatorname{conv}X$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Для всякого направления* $h\in \mathbf{R}^s$ *, удовлетворяющего соотношениям*

$$\|h\|\le 1, \quad \langle \nabla v_k(x), h\rangle \ge \sigma, \quad k\in L(x,\varepsilon),$$

при условии

$$x\in X, \ \varepsilon>0, \ \sigma>0$$

справедливо утверждение

$$\tilde\alpha \ge \min\left\{\frac{\varepsilon}{\beta}, \frac{\sigma}{\theta}\right\}>0, \tag{26}$$

где параметры $\tilde\alpha, \beta$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\tilde\alpha = \max_{\alpha\ge 0,\, [x,\, x+\alpha h]\subset X}\alpha, \quad \beta=\max_{y\in X}\max_{m+1\le k\le n}\|\nabla v_k(y)\|, \tag{27}$$

компакт X *и множество* $L(x,\varepsilon)$ *заданы в* (3), (10), *константа* $\theta>0$ *согласно* (7), $[x,y]$ *– отрезок прямой между точками* x, y .

Доказательство. По определению в (27) величина β удовлетворяет ограничениям $0<\beta<+\infty$, причем, учитывая то, что X – компакт, первое неравенство следует из условия регулярности (6), второе – из условия Липшица (7). По определению в (27) величины $\tilde\alpha$ точка $x+\tilde\alpha h\in X\setminus \operatorname{int}X$, то есть является точкой границы компакта X , и ввиду (3), (10) найдется номер

$$k\in L(x+\tilde\alpha h, 0)\subset K, \quad v_k(x+\tilde\alpha h)=0,$$

поскольку вектор–функция v непрерывна на X согласно (5).

Для этого номера k выполняется одно из двух условий:

$$\varepsilon< v_k(x), \quad 0\le v_k(x)\le\varepsilon,$$

поскольку $\varepsilon>0$, $x\in X$.

Если справедливо неравенство $\varepsilon<v_k(x)$, то по формуле Лагранжа при некотором ζ, $0<\zeta<1$ справедливо утверждение

$$\varepsilon< v_k(x)=|v_k(x+\tilde\alpha h)-v_k(x)|=$$

$$=\tilde\alpha|\langle\nabla v_k(x+\zeta\tilde\alpha h), h\rangle|\le\tilde\alpha\|\nabla v_k(x+\zeta\tilde\alpha h)\|\|h\|\le\tilde\alpha\beta,$$

поскольку из условий леммы следует

$$x+\zeta\tilde\alpha h\in X, \quad 0<\varepsilon, \quad \|h\|\le 1, \quad \|\nabla v_k(x+\zeta\tilde\alpha h)\|\le\beta;$$

тем самым установлено неравенство $\tilde{\alpha} \ge \varepsilon/\beta$.

Если справедливо неравенство $0 \le v_k(x) \le \varepsilon$, то по определению в (10) выполняется включение $k \in L(x,\varepsilon)$, так что из условий леммы следует неравенство

$$\langle \nabla v_k(x), h \rangle \ge \sigma .$$

По определению величины $\tilde{\alpha}$ в (27), с учетом включения $y = x + \tilde{\alpha} h \in X \setminus \mathrm{int} X$ выполняется включение $[y,x] \subset X$, так что направление $-h$ в точке $y \in X$ для выделенного номера k такого, что $k \in L(y,0)$, $v_k(y) = 0$, удовлетворяет условию

$$\langle \nabla v_k(y), -h \rangle \ge 0 ,$$

а иначе на направлении $-h$ вблизи точки y, согласно (3), нет точек из допустимого множества X, что противоречит утверждению $[y, x] = [y, y - \tilde{\alpha} h] \subset X$.

Согласно двум последним неравенствам, из условия (7) ввиду неравенства $\|h\| \le 1$ следует утверждение

$$\sigma \le \langle \nabla v_k(x), h \rangle - \langle \nabla v_k(y), h \rangle \le$$

$$\le \|\nabla v_k(x) - \nabla v_k(y)\| \|h\| \le \theta \|x - y\| \|h\| = \theta \tilde{\alpha} \|h\|^2 \le \theta \tilde{\alpha} ,$$

так что выполняется неравенство $\tilde{\alpha} \ge \sigma/\theta$; вместе с установленным выше неравенством $\tilde{\alpha} \ge \varepsilon/\beta$ это неравенство влечет в (26) нестрогое неравенство

$$\tilde{\alpha} \ge \min\left\{\frac{\varepsilon}{\beta}, \frac{\sigma}{\theta}\right\}.$$

Но выше было установлено $\beta > 0$, а из условий леммы следует $\varepsilon, \sigma, \theta > 0$, что и доказывает окончательно утверждение (26). Лемма доказана.

Замечание 2. В условиях леммы 5 из точки $x \in X$ по направлению h можно сделать ненулевой шаг $\tilde{\alpha} h$, не выво-

дящий за пределы допустимого множества X. Если X – выпуклый компакт, то параметр $\tilde{\alpha}$ в (26), (27) определяется соотношением

$$\tilde{\alpha} = \max_{\alpha \ge 0,\ x + \alpha h \in X} \alpha .$$

Теорема 1. *Если в* (3) *множество допустимых решений* X *– компакт, вектор-функция* $w \in \mathbf{R}^m$ *определена соотношениями* (1)–(4)*, градиенты ее компонент,* ∇w_k *, согласно* (2), (5), (7)*, удовлетворяют на выпуклом компакте* $\mathrm{conv} X$ *условию Липшица,*

$$\|\nabla w_k(x) - \nabla w_k(y)\| \le \theta \|x - y\| , \quad 1 \le k \le m , \quad x, y \in \mathrm{conv} X , \qquad (28)$$
$$\theta = \mathrm{const} > 0 ,$$

и при переходе из точки x *в точку* y*, где*

$$x,\ y \in X , \quad y = x + \alpha h , \quad \alpha > 0, \quad \|h\| = 1 , \qquad (29)$$

единичное направление h *и величина шага* α *удовлетворяют ограничениям*

$$\sigma \le \min_{k \in M} \langle \nabla w_k(x), h \rangle, \quad \alpha \le \frac{(1-\omega)\sigma}{\theta}, \quad \alpha \le \frac{\varepsilon \gamma(x)}{2\mu(x)}, \qquad (30)$$

а фиксированные подмножество M *и параметры* $\omega, \varepsilon, \sigma, \mu(x), \gamma(x)$ *определяются соотношениями*

$$\varnothing \ne M \subset I , \quad 0 < \omega < 1 , \quad 0 < \varepsilon < 1 , \quad 0 < \sigma < \mu(x) ,$$

$$\mu(x) = \max_{1 \le k \le m} \|\nabla w_k(x)\| , \quad 0 < \gamma(x) = \begin{cases} \min\limits_{k \in I \setminus M} w_k(x), & \text{если } M \ne I , \\ \dfrac{2}{\varepsilon} \tilde{\alpha}\, \mu(x), & \text{если } M = I , \end{cases} \qquad (31)$$

$$I = \{k | 1 \le k \le m\},$$

параметр $\tilde{\alpha}$ *определен в* (26), (27)*, то выполняются неравенства*

$$w_k(y)-w_k(x)\ge \omega\alpha\sigma>0\,,\quad k\in M\,,$$
$$w_k(y)-(1-\varepsilon)w_k(x)\ge \omega\alpha\sigma>0\,,\quad k\in I\setminus M\,. \tag{32}$$

Если в условиях (29), (31) *выполняются неравенства* (32), *то при переходе из точки* x *в точку* y *приращение скалярной функции* f_λ *семейства* (8) *удовлетворяет неравенствам*

$$f_\lambda(y)-f_\lambda(x)\ge$$
$$\ge \min\Big\{\min_{k\in M}\left[w_k(y)-w_k(x)\right],\ \min_{k\in I\setminus M}\left[w_k(y)-(1-\varepsilon)w_k(x)\right]\Big\}\ge \tag{33}$$
$$\ge \omega\alpha\sigma>0\,,\quad \lambda\in\bigcup_{\varnothing\ne J\subset M}\Lambda_J(w(x),\varepsilon)\,,$$

где подмножества Λ_J *стандартного симплекса заданы соотношениями* (11), (12).

Доказательство. Из условий (28), (29) по формуле Лагранжа следуют соотношения

$$w_k(y)-w_k(x)=\alpha\langle\nabla w_k(x+\xi_k\alpha h),\,h\rangle\,,\quad 0<\xi_k<1\,,\quad k\in I\,, \tag{34}$$

а для любого $z\in[x,\,y]$ в согласии с (28) выполняются неравенства

$$\theta\|x-z\|\ge\left|\langle\nabla w_k(x)-\nabla w_k(z),\,h\rangle\right|,\quad k\in I\,, \tag{35}$$

поскольку из (29) следуют соотношения

$$\|h\|=1\,,\quad x,\,y\in X\,,\quad [x,\,y]\subset \operatorname{conv}X\,.$$

Согласно (29)–(31), (34), (35), для всех $k\in I$ выполняются соотношения

$$w_k(y)-w_k(x)\ge\alpha\left[\langle\nabla w_k(x),\,h\rangle-\theta\alpha\right]\ge$$
$$\ge\alpha\left[\langle\nabla w_k(x),\,h\rangle-(1-\omega)\sigma\right]=\alpha\omega\sigma+\alpha\left[\langle\nabla w_k(x),\,h\rangle-\sigma\right]. \tag{36}$$

Из условий (29)–(31) следуют неравенства

$$\alpha\left[\langle\nabla w_k(x),\,h\rangle-\sigma\right]\ge 0\,,\quad k\in M\,,$$

так что для всех номеров $k\in M$ из неравенств (36) следуют неравенства (32).

При условии $k\in I\setminus M$ из неравенств (36), в согласии с (29)–(31), следуют неравенства

$$w_k(y)-(1-\varepsilon)w_k(x)\ge\alpha\omega\sigma-\alpha\left[\mu(x)+\sigma\right]+\varepsilon\gamma(x)\ge$$
$$\ge\alpha\omega\sigma-2\alpha\mu(x)+\varepsilon\gamma(x)\ge\alpha\omega\sigma>0\,,$$

что и доказывает окончательно утверждение (32).

Рассмотрим, в согласии с (31), произвольный фиксированный вектор

$$\lambda\in\Lambda_J(w(x),\varepsilon)\,,\quad 0<\varepsilon<1\,,\quad \varnothing\ne J\subset M\,. \tag{37}$$

По определению множеств Λ, Λ_J в (8), (11), (12), компоненты вектора λ в (37) удовлетворяют неравенствам

$$1\ge\sum_{j\in J}\lambda_j>0\,,\quad \frac{\lambda_k}{w_k(x)}\ge\frac{\lambda_l}{w_l(x)}\ge 0\,,\quad k\in J\,,\ l\in I\setminus J\,,$$

с учетом неравенств в (21), так что, в согласии с (8), (9), (29), (37), можно указать номер $i\in I$ такой, что справедливы соотношения

$$0<\lambda_i\le 1,\quad f_\lambda(y)=\frac{w_i(y)}{\lambda_i},\quad f_\lambda(x)\le\min\left\{\frac{w_i(x)}{\lambda_i},\,\frac{\sum_{j\in J}w_j(x)}{\sum_{j\in J}\lambda_j}\right\}. \tag{38}$$

Если номер $i\in M$, то из условий (32), (38) следуют соотношения

$$f_\lambda(y)-f_\lambda(x)\ge\frac{1}{\lambda_i}\left[w_i(y)-w_i(x)\right]\ge\min_{k\in M}\left[w_k(y)-w_k(x)\right]\ge\omega\alpha\sigma>0\,;$$

если, наконец, номер $i\in I\setminus M$, то ввиду (31), (37) выполняется включение $i\in I\setminus J$ и, согласно (12), (32), (38), справедливы соотношения

$$f_\lambda(y)-f_\lambda(x)\ge \frac{w_i(y)}{\lambda_i}-\frac{\sum_{j\in J} w_j(x)}{\sum_{j\in J}\lambda_j}\ge \frac{1}{\lambda_i}\left[w_i(y)-(1-\varepsilon)w_i(x)\right]\ge$$

$$\ge \min_{k\in I\setminus M}\left[w_k(y)-(1-\varepsilon)w_k(x)\right]\ge \omega\alpha\sigma>0\,,$$

что и доказывает утверждение (33), поскольку вектор λ в (37) был выбран произвольно. Теорема доказана.

Следствие 1. Если в условии (30) теоремы 1 второе ограничение на величину шага α заменить более сильным ограничением,

$$\alpha\le \frac{\varepsilon\gamma^2}{4\mu(x)\eta}\,,$$

$$0<\gamma=\min_{w\in w(X)}\min_{1\le k\le m} w_k\,,\quad \mu(x)=\max_{1\le k\le m}\left\|\nabla w_k(x)\right\|,\quad 0<\eta=\max_{w\in w(X)}\sum_{k=1}^{m} w_k\,,$$

то выполняются соотношения

$$0<2\varphi=\frac{\gamma}{\eta}\le 1\,,\quad 1-\varphi\varepsilon\le\frac{w_k(y)}{w_k(x)}\le 1+\varphi\varepsilon\,,\ 1\le k\le m,$$

так что в условиях теоремы 1 и следствия справедливо утверждение леммы 3.

Доказательство. В условиях теоремы 1 и следствия 1 из соотношений (34), (35) для каждого номера k, $1\le k\le m$ следуют неравенства

$$\left|w_k(y)-w_k(x)\right|\le\alpha\left\|\nabla w_k(x)\right\|+\theta\alpha^2\le\alpha\left\|\nabla w_k(x)\right\|+\alpha\sigma\le$$

$$\le 2\alpha\mu(x)\le\frac{\varepsilon\gamma^2}{2\eta}=\varphi\varepsilon\gamma\le\varphi\varepsilon w_k(x)\,,$$

что и требовалось. Следствие доказано.

Лемма 6. *Для любых фиксированных векторов* x, y *и подмножеств* J, L *таких, что*

$$x,\,y\in X\,,\quad \varnothing\ne J\subset I\,,\quad L\subset L(x,0)\,, \tag{39}$$

при условии

$$0\in \operatorname{conv}\{\nabla v_k(x)\}_{k\in J\cup L}\,, \tag{40}$$

система неравенств

$$w_k(y)>w_k(x)\,,\quad k\in J\,, \tag{41}$$

несовместна, если множества I, $L(x,0)$ *определены в* (9), (10), *вектор–функции* v, w *заданы соотношениями* (1)–(4) *и дифференцируемы на выпуклом множестве* X *из* (3), v *удовлетворяет на* X *условию регулярности* (6), w *псевдовогнута на* X.

Доказательство. Предположим от противного, что в условиях (39), (40) выполняются неравенства (41). Тогда точка $x\ne y$ и единичное направление

$$h=\frac{y-x}{\left\|y-x\right\|} \tag{42}$$

согласно (1), (2) удовлетворяют в условиях леммы неравенствам

$$\begin{aligned}\left\langle\nabla w_k(x),h\right\rangle&>0\,,\quad k\in J\,,\\ \left\langle\nabla v_k(x),h\right\rangle&>0\,,\quad k\in L\,.\end{aligned} \tag{43}$$

Действительно, если найдется номер $i\in J$, $\left\langle\nabla w_i(x),h\right\rangle\le 0$, то ввиду (39) и псевдовогнутости вектор–функции w на X выполняется неравенство $w_i(x)\ge w_i(y)$, что противоречит неравенствам (41) и доказывает первое утверждение в (43).

Ввиду выпуклости X, из условий (39), (42) следует утверждение

$$z=x+\rho h\in X\,,\quad 0\le\rho\le\left\|y-x\right\|,$$

и, в согласии с (3), (10) в условиях леммы выполняются соотношения

$$0 \le v_k(z) = \rho\langle \nabla v_k(x), h\rangle + o(\rho), \quad k \in L(x,0),$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho} = 0$. Но из условий (39) следует $L \subset L(x,0)$, так что выполняются неравенства

$$\langle \nabla v_k(x), h\rangle \ge \frac{o(\rho)}{\rho}, \quad k \in L.$$

Переходя в правых частях этих неравенств к пределу по $\rho \to 0$, получим неравенства $\langle \nabla v_k(x), h\rangle \ge 0$, $k \in L$, что доказывает и второе утверждение в (43).

Из совместности системы однородных линейных неравенств (43), по теореме Моцкина об альтернативе [11] следует утверждение

$$0 \notin P = \left\{ p \in \mathbf{R}^s \;\middle|\; \begin{array}{l} p = \sum\limits_{k\in J}\alpha_k \nabla w_k(x) + \sum\limits_{k\in L}\beta_k \nabla v_k(x), \\ \sum\limits_{k\in J}\alpha_k = 1, \quad \alpha \ge 0, \quad \beta \ge 0, \end{array} \right\}. \tag{44}$$

Но, по определению выпуклой оболочки в (22), из условия (40) и определения (2) следуют соотношения

$$0 = \sum_{k\in J}\alpha_k^0 \nabla w_k(x) + \sum_{k\in L}\beta_k^0 \nabla v_k(x), \quad \sum_{k\in J}\alpha_k^0 + \sum_{k\in L}\beta_k^0 = 1, \quad \alpha^0, \beta^0 \ge 0,$$

причем выполняется неравенство $\sum\limits_{k\in J}\alpha_k^0 > 0$, так как в противном случае с необходимостью следует $L \ne \varnothing$ и ввиду включения $L \subset L(x,0)$ по определению (10) нарушается условие регулярности (6). Следовательно, определив векторы

$$\alpha = \frac{\alpha^0}{\sum\limits_{k\in J}\alpha_k^0}, \quad \beta = \frac{\beta^0}{\sum\limits_{k\in J}\alpha_k^0},$$

получим соотношения

$$0 = \sum_{k\in J}\alpha_k \nabla w_k(x) + \sum_{k\in L}\beta_k \nabla v_k(x), \quad \sum_{k\in J}\alpha_k = 1, \quad \alpha, \beta \ge 0,$$

что противоречит утверждению (44). Лемма доказана.

Теорема 2. *В условиях леммы* 6 *функция минимума* f_λ *семейства* (8) *удовлетворяет соотношениям*

$$f_\lambda(x) + \frac{\eta^2}{\gamma}\varepsilon \ge \max_{y\in X} f_\lambda(y), \quad \lambda \in \bigcup_{J\subset M\subset I}\Lambda_M(w(x), \varepsilon), \tag{45}$$

где параметры $\varepsilon, \eta, \gamma$ *с учетом* (4) *подчиняются ограничениям*

$$0 \le \varepsilon < 1,$$

$$0 < \eta = \max_{y\in X}\sum_{k=1}^{m} w_k(y), \quad 0 < \gamma = \min_{y\in X}\min_{1\le k\le m} w_k(y), \tag{46}$$

множества I, Λ_J *заданы соотношениями* (11), (12), *множество* X *– выпуклый компакт из* (3).

Доказательство. Предположим от противного, что утверждение (45) не выполняется. Тогда найдутся $x, y, \varepsilon, M, \lambda$ такие, что выполняются соотношения

$$x, y \in X, \quad 0 \le \varepsilon < 1, \quad J \subset M \subset I, \quad \lambda \in \Lambda_M(w(x), \varepsilon),$$
$$f_\lambda(y) > f_\lambda(x) + \frac{\eta^2}{\gamma}\varepsilon, \tag{47}$$

и с учетом (4) можно определить положительные векторы

$$w = w(x) > 0, \quad u = w(y) > 0. \tag{48}$$

Ввиду (47), (48) выполняется включение $\lambda \in \Lambda_M(w, \varepsilon)$, так что из утверждения (21) леммы 2 следуют неравенства

$$0 < \sum_{j\in M}\lambda_j \le 1,$$

$$0 < \lambda_k, \quad \frac{1-\varepsilon}{\sum\limits_{j\in M} w_j}\sum_{j\in M}\lambda_j \le \frac{\lambda_k}{w_k} \le \left(\frac{1-\varepsilon}{\sum\limits_{j\in M} w_j} + \frac{\varepsilon}{w_k}\right)\sum_{j\in M}\lambda_j, \quad k \in M. \tag{49}$$

а с учетом (8), (9), (12), (48) найдется номер i такой, что

$$i \in M\ ,\quad 0 < f_\lambda(x) = \frac{w_i}{\lambda_i} \le \sum_{j=1}^{m} w_j\ ,\quad 0 < f_\lambda(y) \le \sum_{j=1}^{m} u_j\ . \qquad (50)$$

В условиях (47)–(50) докажем утверждение

$$u_k > w_k\ ,\quad k \in J\ . \qquad (51)$$

Действительно, если найдется номер $k \in J \subset M$, $u_k \le w_k$, то, согласно (9), (48), (49), выполняются неравенства $f_\lambda(y) \le \frac{u_k}{\lambda_k} \le \frac{w_k}{\lambda_k}$. Но тогда, согласно (49), (50), справедливо утверждение

$$\frac{f_\lambda(y) - f_\lambda(x)}{f_\lambda(y) f_\lambda(x)} = \frac{1}{f_\lambda(x)} - \frac{1}{f_\lambda(y)} \le \frac{\lambda_i}{w_i} - \frac{\lambda_k}{w_k} \le \frac{\varepsilon}{w_i} \sum_{j \in M} \lambda_j \le \frac{\varepsilon}{w_i}\ ,$$

и ввиду (50) выполняются неравенства

$$f_\lambda(y) - f_\lambda(x) \le \frac{\varepsilon}{w_i} f_\lambda(x) f_\lambda(y) \le \frac{\varepsilon}{w_i} \sum_{j=1}^{m} w_j \sum_{j=1}^{m} u_j\ ,$$

что с учетом (48), по определению величин $\varepsilon, \eta, \gamma$ в (46), влечет неравенство

$$f_\lambda(y) \le f_\lambda(x) + \frac{\eta^2}{\gamma}\varepsilon\ .$$

Но это противоречит последнему неравенству в (47), что влечет неравенства (51), которые ввиду (48) противоречат утверждению леммы 6 о несовместности системы неравенств (41). Теорема доказана.

Лемма 7. *Пусть в произвольной фиксированной точке* $x^* \in X$ *задан параметр* ρ_* :

$$0 < \rho_* = \begin{cases} 1\ , & \text{если}\ \ L(x^*,0) = K\ , \\ \min\limits_{k \in K \setminus L(x^*,0)} v_k(x^*)\ , & \text{если}\ \ L(x^*,0) \ne K\ , \end{cases}$$

где вектор-функция v *и множества* X , K , L *определены соотношениями* (1)–(4), (7), (10).

Тогда найдется величина $\delta > 0$ *такая, что для всякого вектора*

$$x \in X\ ,\quad \|x - x^*\| \le \delta$$

выполняется включение

$$L(x,\varepsilon) \subset L(x^*,0),\quad 0 \le \varepsilon \le \frac{\rho_*}{2}\ .$$

Доказательство. Согласно (7), (10), функции $v_k(x)$, $k \in K$ непрерывны на $\mathrm{conv}X$. Следовательно, по определению величины ρ_* , для достаточно близких к точке x^* точек $x \in X$ справедливы неравенства

$$v_k(x) > \frac{\rho_*}{2} > 0\ ,\ \ k \in K \setminus L(x^*,0)$$

так что, по определению множеств $L(x,\varepsilon)$ в (10), выполняются соотношения

$$\{K \setminus L(x^*,0)\} \cap L(x,\varepsilon) = \varnothing\ ,\quad 0 \le \varepsilon \le \frac{\rho_*}{2}\ ,$$

что и доказывает утверждение леммы. Лемма доказана.

В согласии со свойствами (25) проекций p , заданных соотношениями (22), из теоремы 1 и лемм 6, 7 вытекает

Следствие 2. Если в (3) множество допустимых решений X – компакт, вектор–функция v из (1)–(4) удовлетворяет на X условию регулярности (6), а на выпуклом компакте $\mathrm{conv}X$ – условию Липшица (7), то допустимое решение $x \in X$ слабо эффективно по векторному критерию w из (1)–(4) при необходимом условии

$$p(x, I \cup L(x,0)) = 0\ ;$$

если к тому же множество X из (1.3) – выпуклый компакт, а вектор-функция w псевдовогнута на X , то необходимое условие является достаточным.

Доказательство. Пусть решение $x \in X$ слабо эффективно по векторному критерию w. Предположим от противного, что выполняется условие

$$0 < \sigma = \| p(x, I \cup L(x,0)) \| ;$$

но тогда, согласно лемме 7 и определению множеств L в (10), можно указать значение ε такое, что

$$0 < \varepsilon < 1 , \quad L(x,0) = L(x,\varepsilon) , \quad 0 < \sigma = \| p(x, I \cup L(x,\varepsilon)) \| .$$

Следовательно, согласно свойству проекций (25), с учетом (2) можно утверждать

$$0 < \sigma \le \min_{k \in I} \langle \nabla w_k(x), h \rangle , \quad h = \frac{p(x, I \cup L(x,0))}{\| p(x, I \cup L(x,0)) \|} ,$$

и в условиях следствия по теореме 1 можно указать такой достаточно малый шаг $\alpha > 0$ по направлению h, что выполняются условия

$$w(y) > w(x) , \quad y = x + \alpha h \in X ,$$

т.е. слабо эффективное решение $x \in X$ – доминируемое, что невозможно согласно следствию 1 главы 1. Из противоречия следует необходимость.

Если справедливо равенство $p(x, I \cup L(x,0)) = 0$, то в согласии с определением проекций (22) выполняется включение

$$0 \in \operatorname{conv}\{\nabla v_k(x)\}_{k \in I \cup L(x,0)} .$$

Тогда в условиях следствия по лемме 6 система неравенств $w(y) > w(x)$ несовместна при любом решении $y \in X$, так что, согласно определению 1 и замечанию 1 главы 1, решение $x \in X$ – слабо эффективное. Тем самым доказана достаточность и следствие в целом.

Заметим, что необходимые и достаточные условия существования слабо эффективного решения, определенные следствием 2 настоящей главы и теоремами 2,3 главы 1, близки

по смыслу, но опираются на отличные друг от друга условия регулярности.

§3. Формирование последовательности аппроксимирующих множеств

Пусть в качестве начального приближения X_1 выбрано произвольное допустимое решение $\{x^1\}$. Определим на множестве допустимых решений X из (3) бесконечную последовательность подмножеств X_t таких, что в пространстве значений критериев их образы $W_t = w(X_t)$ составляют последовательность аппроксимаций множества эффективных векторных оценок $W_e = w(X_e)$:

$$X_1 = \{x^1\} \subset X , \quad X_{t+1} = \bigcup_{x \in X_t} X_{t+1}(x) \subset X , \quad t = 1, 2, ...$$
$$X_{t+1}(x) = \{x\} + \bigcup_{J \in \mathrm{M}_t(x)} \{\alpha(x,J) h(x,J)\} , \tag{52}$$

Здесь всякая точка $x \in X_t$ порождает на следующем $t+1$ – ом уровне непустую векторную сумму множеств $X_{t+1}(x)$, так что при переходе из точки $x \in X_t$ в соседнюю точку $y = x + \alpha(x,J) h(x,J) \in X_{t+1}(x)$ величина шага $\alpha(x,J)$ по направлению $h(x,J)$ удовлетворяет условиям

$$\alpha(x,\varnothing) = \| h(x,\varnothing) \| = 0 , \tag{53}$$

а для любых подмножеств $J \ne \varnothing$, $J \in \mathrm{N}_t(x)$ – условиям

$$0 < \alpha(x,J) \le \tilde{\alpha}(x,J) , \quad \tilde{\alpha}(x,J) = \max_{\alpha \ge 0, \; [x, \; x + \alpha h(x,J)] \subset X} \alpha ,$$
$$\| h(x,J) \| = 1 , \quad \min_{k \in J \cup L(x, \varepsilon_t(x))} \langle \nabla v_k(x), h(x,J) \rangle \ge \sigma(x,J) , \tag{54}$$
$$\sigma(x,J) = b \| p(x, J \cup L(x, \varepsilon_t(x))) \| , \quad b = \mathrm{const} , \quad 0 < b \le 1 ,$$

причем множества не вложенных друг в друга подмножеств N_t, $\mathsf{M}_t \subset 2^I$ заданы соотношениями

$$\mathsf{N}_t(x) = \left\{ J \subset I \;\middle|\; 0 \neq |J| = \max_{J \subset M \subset I,\; b\left\| p\left(x, M \cup L\left(x, \varepsilon_t(x)\right)\right)\right\| \geq \varepsilon_t(x)} |M| \right\},$$
$$\mathsf{M}_t(x) = \begin{cases} \mathsf{N}_t(x), & \text{если } \mathsf{N}_t(x) \neq \varnothing, \\ \{\varnothing\}, & \text{если } \mathsf{N}_t(x) = \varnothing, \end{cases} \tag{55}$$

где 2^I – множество всех подмножеств множества $I = \{k | 1 \leq k \leq m\}$, $|M|$ – число элементов в конечном множестве $M \subset I$, параметр возмущения ε в начальной точке x^1 и в любых соседних точках $x^t \in X_t$, $x^{t+1} \in X_{t+1}(x^t)$ последовательности (52) таких, что

$$x^{t+1} = x^t + \alpha(x^t, J_t) h(x^t, J_t), \quad J_t \in \mathsf{M}_t(x) \tag{56}$$

удовлетворяет условиям

$$\varepsilon_1(x^1) = \tfrac{1}{2} \min\{1, \rho(x^1)\},$$
$$\varepsilon_{t+1}(x^{t+1}) = \begin{cases} \tfrac{1}{2} \min\{\varepsilon_t(x^t), \rho(x^t)\}, & \text{если } Q_t = \varnothing, \\ \varepsilon_t(x^t), & \text{если } Q_t \neq \varnothing, \end{cases}$$
$$Q_t = \bigcap_{q \leq t,\; \varepsilon_q(x^q) = \varepsilon_t(x^t)} J_q, \quad \rho(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } L(x,0) = K, \\ \min\limits_{k \in K \setminus L(x,0)} v_k(x), & \text{если } L(x,0) \neq K, \end{cases} \tag{57}$$

а в соотношениях (54), (55), (57) вектор-функция v, множества K, $L(x,\varepsilon)$ и проекция p определены согласно (1)–(5), (10), (22).

По определению в (10), (57), параметр $\rho(x) > 0$, $x \in X$, так что в соотношениях (54),(55) заданный соотношениями (56), (57) параметр возмущения $\varepsilon = \varepsilon_t$ при

всех $t = 1, 2, \ldots$ принадлежит невозрастающей последовательности положительных чисел:

$$\tfrac{1}{2} \geq \varepsilon_t(x^t) \geq \varepsilon_{t+1}(x^{t+1}) > 0. \tag{58}$$

Замечание 3. Единичные направления

$$h(x, J) = \frac{p(x, J \cup L(x, \varepsilon_t(x)))}{\left\| p(x, J \cup L(x, \varepsilon_t(x))) \right\|}, \quad \varnothing \neq J \in \mathsf{M}_t(x) \tag{59}$$

удовлетворяют соотношениям (54) для любых фиксированных величин b, $0 < b \leq 1$, так как согласно определению множеств M_t и параметров возмущения ε_t в (55)–(58), подмножества $J \in \mathsf{M}_t(x) \neq \{\varnothing\}$, $L(x, \varepsilon_t(x))$ удовлетворяют строгому неравенству

$$\left\| p(x, J \cup L(x, \varepsilon_t(x))) \right\| > 0,$$

а с учетом свойства проекций (25) направления (59) удовлетворяют неравенствам

$$\min_{k \in J \cup L(x, \varepsilon_t(x))} \langle \nabla v_k(x), h(x, J) \rangle \geq b \left\| p(x, J \cup L(x, \varepsilon_t(x))) \right\|, \quad 0 < b \leq 1.$$

В согласии с (59) определение направления $h(x, J)$ в каждой точке $x \in X_t$ сводится к отысканию проекции $p(x, J \cup L(x, \varepsilon_t(x)))$ начала координат на выпуклую оболочку

$$\operatorname{conv}\{\nabla v_k(x)\}_{k \in J \cup L(x, \varepsilon_t(x))}$$

градиентов соответствующих компонент вектор–функции v из (1)–(5), т.е. к решению задачи квадратичного программирования [10]. Введение параметра b, $0 < b \leq 1$ позволяет решать такие задачи неточно, если на каждом шаге t относительная погрешность вычисления проекций не превосходит величины $1 - b$.

Лемма 8. *В каждой точке* $x \in X_t$ *последовательности* (52) *по направлению* $h(x, J)$ *можно сделать ненулевой шаг, не выводящий за пределы допустимого множества:*

$$x+\alpha(x,J)h(x,J)\in X\ ,$$

если его величина $\alpha(x,J)$ *в соотношениях* (52), (54) *ограничена сверху положительной величиной*

$$\tilde{\alpha}(x,J)\geq\min\left\{\frac{\varepsilon_t(x)}{\beta},\frac{\sigma(x,J)}{\theta}\right\}>0\ ,$$

где параметры σ, ε *определены в* (54), (57), *величины* θ, $\beta>0$ *ввиду* (7), (27).

Доказательство. Согласно (25), (52), (54), (57), (58), в условиях леммы справедливы соотношения

$$\|h(x,J)\|=1\ ,\quad \langle\nabla v_k(x),h(x,J)\rangle\geq\sigma(x,J)>0\ ,\quad k\in L(x,\varepsilon_t(x))\ ,$$

$$x\in X_t\subset X\ ,\quad \varepsilon_t(x)>0\ ,$$

так что выполняются условия леммы 5 для величин $\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}(x,J)$ из (54), а утверждение леммы следует из утверждения (26) леммы 5. Лемма доказана.

Замечание 4. В связи с замечанием 3 и результатом леммы 8 можно утверждать, что бесконечная последовательность $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}\subset X$ множеств (52), удовлетворяющая условиям (53)–(58), существует. Она представляет собой ветвящуюся структуру, где всякая точка $x\in X_t$ порождает на следующем $t+1$ – ом уровне непустое множество «потомков» $X_{t+1}(x)$, число $|X_{t+1}(x)|$ которых (степень ветвления) определяется в (52), (55), (56) числом не вложенных друг в друга подмножеств множества $\mathsf{M}_t(x)$:

$$|X_{t+1}(x)|\leq C_m^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}\ ,$$

где $C_m^q=\dfrac{m\,!}{q\,!(m-q)!}$ – биномиальный коэффициент, $\lfloor z\rfloor$ – наибольшее целое, не превосходящее величину z (доказательство дано в Приложении 2).

Вместе с тем последовательность (52) подмножеств $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ устроена так, что в целом ряде случаев ветвление отсутствует. Если, например, в точке $x\in X_t$ выполняется включение $I\in\mathsf{M}_t(x)$, то ввиду (55), (58) выполняются соотношения

$$b\|p(x,I\cup L(x,\varepsilon_t(x)))\|\geq\varepsilon_t(x)>0\ ,\quad 0<b=\mathrm{const}$$

и, согласно условию (54), единичное направление $h(x,I)$ из (59) удовлетворяет неравенствам

$$\langle\nabla v_k(x),h(x,I)\rangle\geq\varepsilon_t(x)>0\ ,\quad k\in I\cup L(x,\varepsilon_t(x))\ ,$$

т.е. устремлено «внутрь» допустимого множества X из (3), а линейная часть приращения всякого частного критерия

$$w_k(x)=v_k(x)\ ,\quad 1\leq k\leq m\ ,$$

на направлении $h(x,I)$ не меньше положительного числа $\alpha(x,I)\varepsilon_t(x)>0$. По определению в (55), включение $I\in\mathsf{M}_t(x)$ влечет равенство $\mathsf{M}_t(x)=\{I\}$, и точка $x\in X_t$ порождает на следующем уровне множество $X_{t+1}(x)$, состоящее из единственной точки, не равной x:

$$X_{t+1}(x)=\{x+\alpha(x,I)h(x,I)\}\neq\{x\}\ ,$$

тогда как в согласии с (52), (53) при условии

$$\mathsf{M}_t(x)=\{\varnothing\}\ ,$$

множество $X_{t+1}(x)=\{x\}$, т.е. вновь состоит из единственной точки x.

Согласно (1)–(5), (7), для любых $x\in X$, где X – компакт, выполняются соотношения

$$0<\eta=\max_{y\in X}\sum_{k=1}^{m}w_k(y),\quad 0<\gamma=\min_{y\in X}\min_{1\le k\le m}w_k(y),$$

$$\mu=\max_{y\in X}\max_{1\le k\le m}\|\nabla w_k(y)\|,\quad \mu(x)=\max_{1\le k\le m}\|\nabla w_k(x)\|, \tag{60}$$

$$0<\mu(x)\le\mu,$$

С учетом следствия 1 сформулируем результаты теорем 1 и 2 в обозначениях последовательности (52)–(60).

Теорема 3. *Пусть в* (3) *множество допустимых решений* X *– компакт, вектор–функции* v, w *из* (1)–(5) *дифференцируемы на открытом множестве* $A\supset \mathrm{conv}X$.

Если w *удовлетворяет на выпуклом компакте* $\mathrm{conv}X$ *условию Липшица* (28), *то для любых фиксированных* t, ω, J, x, α, y *таких, что*

$$t=1,2,\ldots\quad 0<\omega<1,\quad \varnothing\ne J\in \mathrm{M}_t(x),$$
$$x\in X_t,\quad y=x+\alpha(x,J)h(x,J)\in X_{t+1}(x), \tag{61}$$

при ограничениях

$$0<\alpha(x,J)\le\min\left\{\frac{(1-\omega)\sigma(x,J)}{\theta},\ \frac{\varepsilon_t(x)\gamma^2}{4\mu(x)\eta}\right\} \tag{62}$$

выполняются неравенства

$$w_k(y)-w_k(x)\ge\omega\alpha\sigma(x,J)>0,\quad k\in J,$$
$$w_k(y)-(1-\varepsilon_t(x))w_k(x)\ge\omega\alpha\sigma(x,J)>0,\quad k\in I\setminus J, \tag{63}$$

а из условий (61), (63) *следуют ограничения на приращение функций* f_λ *семейства* (8):

$$f_\lambda(y)-f_\lambda(x)\ge\omega\alpha\,\sigma(x,J)>0,\quad \lambda\in\bigcup_{\varnothing\ne M\subset J}\Lambda_M(w(x),\varepsilon_t(x)). \tag{64}$$

Если множество X *из* (3) *– выпуклый компакт, вектор–функции* v, w *из* (1)–(5) *таковы, что* v *удовлетворяет на* X *условию регулярности* (6), *а* w *псевдовогнута на* X, *то для любых фиксированных* ε, J, x, *удовлетворяющих условиям*

$$0\le\varepsilon<1,\quad \varnothing\ne J\subset I,\quad x\in X,$$

равенство

$$p(x,J\cup L(x,0))=0 \tag{65}$$

влечет утверждение

$$f_\lambda(x)+\frac{\eta^2}{\gamma}\varepsilon\ge\max_{y\in X}f_\lambda(y),\quad \lambda\in\bigcup_{J\subset M\subset I}\Lambda_M(w(x),\varepsilon), \tag{66}$$

где константа Липшица $\theta>0$, *множества* I, Λ_J, L, $X_t(x)$, $\mathrm{M}_t(x)$, *векторы* p, h *и параметры* α, ε_t, σ, μ, γ, η *определены в* (10), (12), (22), (52)–(58), (60).

Доказательство теоремы 3 следует из теорем 1, 2 и следствия 1.

В согласии с утверждением леммы 8 и соотношениями (54)–(58), (60), определим величину α^*, удовлетворяющую условиям

$$\tilde\alpha(x,J)\ge\alpha^*(x,J)=\min\left\{\tilde\alpha(x,J),\ \frac{\varepsilon_t(x)\gamma^2}{4\mu(x)\eta}\right\}\ge$$
$$\ge\min\left\{\frac{\varepsilon_t(x)}{\beta},\frac{\sigma(x,J)}{\theta},\frac{\varepsilon_t(x)\gamma^2}{4\mu\eta}\right\}>0. \tag{67}$$

В условиях теоремы 3 определим в соотношениях (52) окончательно величину шага $\alpha(x,J)$ по единичному направлению $h(x,J)$, для чего применим следующее правило.

Правило дробления шага:

Если величина $\alpha=\alpha^*(x,J)$ в (67) удовлетворяет неравенствам (63), то полагаем в соотношениях (52) величину шага

$$\alpha(x,J)=\alpha^*(x,J)>0.$$

В противном случае ввиду (62) найдется наименьший номер $q=q(x,J)\ge1$ такой, что величина шага

$$\alpha = \alpha(x,J) = \frac{\alpha^*(x,J)}{2^q} > 0$$

удовлетворяет неравенствам (63); но тогда с необходимостью величина

$$\alpha' = 2\alpha(x,J) = \frac{\alpha^*(x,J)}{2^{q-1}} > 0$$

не удовлетворяет неравенствам (63) и, следовательно, не удовлетворяет последнему неравенству в (62), так что, выполняются неравенства

$$\alpha^*(x,J) \geq 2\alpha(x,J) > \min\left\{\frac{(1-\omega)\sigma(x,J)}{\theta},\ \frac{\varepsilon_t(x)\gamma^2}{4\mu(x)\eta}\right\} > 0 ;$$

но справедливо и более сильное утверждение

$$\alpha^*(x,J) > \alpha(x,J) > \frac{(1-\omega)\sigma(x,J)}{2\theta} > 0 ,$$

поскольку в противном случае, согласно определению (67) величины $\alpha^*(x,J)$, с необходимостью выполняется условие

$$\alpha^*(x,J) \geq 2\alpha(x,J) > \frac{\varepsilon_t(x)\gamma^2}{4\mu(x)\eta} \geq \alpha^*(x,J) ,$$

что невозможно.

Согласно принятому правилу дробления шага, выполняется, с учетом определения (67), одно из двух условий:

а) $\alpha(x,J) = \alpha^*(x,J)$,

$$\text{б) } \alpha^*(x,J) > \alpha(x,J) > \frac{(1-\omega)\sigma(x,J)}{2\theta} > 0 , \qquad (68)$$

причем определенная в (67), (68) величина шага $\alpha = \alpha(x,J)$ удовлетворяет неравенствам (63) теоремы 3 и условиям леммы 3 ввиду следствия 1.

Прежде, чем приступить к доказательству основной теоремы (теорема сходимости), отметим следующее полезное свойство параметров возмущения.

Лемма 9. *Пусть на полуинтервале* $\Pi = (0, \varepsilon]$ *задана бесконечная последовательность замкнутых множеств* $\Pi_t \subset \Pi$ *, удовлетворяющая соотношениям*

$$\Pi_1 \subset \Pi , \quad \Pi_{t+1} = \bigcup_{\varepsilon_t \in \Pi_t} \Pi_{t+1}(\varepsilon_t) \subset \Pi , \quad \Pi_{t+1}(\varepsilon_t) \neq \varnothing ,$$

$$\varepsilon_t \geq \sup_{\varepsilon_{t+1} \in \Pi_{t+1}(\varepsilon_t)} \varepsilon_{t+1} , \quad t = 1, 2, ...$$

Тогда любая числовая последовательность

$$\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty} , \quad \varepsilon_1 \in \Pi_1 , \quad \varepsilon_{t+1} \in \Pi_{t+1}(\varepsilon_t), \quad t = 1, 2, ...$$

не возрастает и сходится к точке отрезка $[0, \varepsilon]$, *а если все такие последовательности удовлетворяют условию* $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon_t = 0$, *то любая числовая последовательность*

$$\{\delta_t\}_{t=1}^{\infty} , \quad \delta_t \in \Pi_t , \quad t = 1, 2, ...$$

удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to\infty} \delta_t = 0$.

Доказательство. Условиями леммы определены невозрастающие последовательности положительных чисел $\varepsilon_t \leq \varepsilon$, поэтому каждая сходится к точке отрезка $[0, \varepsilon]$.

В условиях леммы достаточно доказать, что числовая последовательность максимальных элементов

$$\{\delta_t\}_{t=1}^{\infty} , \quad \delta_t = \max_{\delta \in \Pi_t} \delta > 0 , \quad t = 1, 2, ...$$

удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to\infty} \delta_t = 0$.

Согласно условиям леммы, выполняются соотношения

$$\delta_t = \max_{\varepsilon_t \in \Pi_t} \varepsilon_t \geq \max_{\varepsilon_t \in \Pi_t} \sup_{\varepsilon_{t+1} \in \Pi_{t+1}(\varepsilon_t)} \varepsilon_{t+1} = \max_{\varepsilon_{t+1} \in \Pi_{t+1}} \varepsilon_{t+1} = \delta_{t+1} , \quad t = 1, 2, ...$$

так что последовательность положительных максимальных элементов не возрастает и удовлетворяет условиям

$$\delta_t \geq \delta_{t+1} \geq \lim_{t\to\infty} \delta_t = \delta_0 \geq 0 , \quad t = 1, 2, ...$$

Представим множество Π_t в виде объединения всех «потомков» точек множества Π_q в $(t-q)$ – ом «колене»:

$$\Pi_t = \bigcup_{\varepsilon_q \in \Pi_q} \Pi_t(\varepsilon_q), \quad t \ge q \ge 1,$$

$$\Pi_t(\varepsilon_t) = \{\varepsilon_t\}, \quad t \ge 1,$$

$$\Pi_t(\varepsilon_q) = \bigcup_{\varepsilon_{q+1} \in \Pi_{q+1}(\varepsilon_q)} \dots \bigcup_{\varepsilon_{t-1} \in \Pi_{t-1}(\varepsilon_{t-2})} \Pi_t(\varepsilon_{t-1}), \quad t-1 > q \ge 1,$$

где $\Pi_{q+1}(\varepsilon_q)$ – множество «детей» точки ε_q, $\Pi_{q+2}(\varepsilon_q)$ – множество «внуков» точки ε_q и т.д. Определим также подмножества

$$\Pi_q^0 = \left\{ \varepsilon_q \in \Pi_q \,\middle|\, \bigcup_{t=q+1}^{\infty} \left[\{\delta_t\} \cap \Pi_t(\varepsilon_q) \right] \ne \varnothing \right\} \ne \varnothing, \quad q = 1, 2, \dots$$

где всякое Π_q^0 состоит из тех и только тех точек множества Π_q, среди «потомков» которых есть хотя бы один максимальный элемент δ_t, $t > q$, причем множества $\Pi_q^0 \ne \varnothing$, поскольку у всякой точки δ_{q+1} есть «прародитель» из множества Π_q.

Из определений подмножеств Π_q^0, $\Pi_t(\varepsilon_q)$ следуют включения

$$\Pi_t^0 \subset \bigcup_{\varepsilon_q \in \Pi_q^0} \Pi_t(\varepsilon_q), \quad t \ge q \ge 1,$$

притом что предельная величина

$$\delta_0 \le \inf_{\varepsilon_t \in \Pi_t^0} \varepsilon_t, \quad t \ge 1.$$

Заметим, что согласно последнему включению для любых q, t, $1 \le q < t$ непустое множество Π_t^0 включено во множество «потомков» (в $(t-q)$ – ом «колене») непустого

множества Π_q^0, так что «родословная» каждой точки $\varepsilon_t \in \Pi_t^0$ содержится в последовательности непустых множеств Π_q^0, $1 \le q < t$. Следовательно, бесконечная последовательность непустых множеств $\{\Pi_t^0\}_{t=1}^{\infty}$ содержит хотя бы одну бесконечную числовую последовательность «генетически связанных» точек

$$\{\tilde{\varepsilon}_t\}_{t=1}^{\infty}, \quad \tilde{\varepsilon}_1 \in \Pi_1, \quad \tilde{\varepsilon}_{t+1} \in \Pi_{t+1}(\tilde{\varepsilon}_t), \quad t = 1, 2, \dots$$

которая в условиях леммы удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\varepsilon}_t = 0, \quad \tilde{\varepsilon}_t \in \Pi_t^0, \quad t = 1, 2, \dots$$

С учетом ограничения сверху на предельную величину $\lim\limits_{t\to\infty} \delta_t = \delta_0$ это влечет утверждение

$$0 = \lim_{t\to\infty} \tilde{\varepsilon}_t \ge \lim_{t\to\infty} \inf_{\varepsilon_t \in \Pi_t^0} \varepsilon_t \ge \delta_0 \ge 0,$$

так что выполняются равенства

$$\lim_{t\to\infty} \delta_t = \delta_0 = 0.$$

Лемма доказана.

§4. Доказательство теоремы сходимости

Определение. Величина

$$\Delta(W,U) = \max\{D(W,U), D(U,W)\}, \quad \varnothing \ne W, U \subset \mathbf{R}^m$$

называется *расстоянием по Хаусдорфу* между множествами W и U, где величина

$$D(W,U) = \sup_{w\in W} \inf_{u \in U} \|w-u\|, \quad \varnothing \ne W, U \subset \mathbf{R}^m,$$

– *отклонение* множества W от множества U.

Следующая теорема устанавливает свойства последовательности аппроксимирующих множеств $\{w(X_t)\}_{t=1}^{\infty}$, определенной соотношениями (52)–(58), (60), (67), (68).

Теорема 4 (о сходимости к множеству эффективных векторных оценок). *Пусть определенное в* (3) *множество допустимых решений* X *компактно, градиенты* (5) *компонент заданной соотношениями* (1)–(4) *вектор–функции* v *существуют на открытом множестве* $A \supset \mathrm{conv}X$, *удовлетворяют на множестве* X *условию регулярности* (6), *а на выпуклом компакте* $\mathrm{conv}X$ – *условию Липшица* (7).

Тогда бесконечная последовательность множеств $\{X_t\}_{t=1}^{\infty} \subset X$ *содержит семейство бесконечных последовательностей точек* $\{x^t\}_{t=1}^{\infty}$, *удовлетворяющих соотношениям*

$$\{x^1\} = X_1,\ x^{t+1} = x^t + \alpha(x^t, J_t)h(x^t, J_t) \in X_{t+1}(x^t) \subset X_{t+1}, \quad J_t \in \mathsf{M}_t(x^t),\quad \varepsilon_t = \varepsilon_t(x^t) > 0,\quad t = 1, 2, \ldots \tag{69}$$

причем для любого наперед заданного вектора $\lambda \in \Lambda$ *семейство* (69) *содержит последовательность, в каждой фиксированной точке* x^t *которой можно указать непустое подмножество*

$$F_t = F_t(x^t) \subset I,\quad \lambda \in \Lambda_{F_t}\left(w(x^t), \varepsilon_t(x^t)\right) \setminus \bigcup_{\varnothing,\, F_t \neq M \subset F_t} \Lambda_M\left(w(x^t), \varepsilon_t(x^t)\right),$$

удовлетворяющее одному из двух условий

$$F_t \subset J_t, \qquad b\left\| p\left(x^t, F_t \cup L\left(x^t, \varepsilon_t(x^t)\right)\right)\right\| < \varepsilon_t(x^t), \tag{70}$$

а для некоторой предельной точки $x^{\lambda} \in X$ *последовательности точек из* (69), (70) *найдется подмножество* $F_{\lambda} = F$, $\varnothing \neq F \subset I$ *такое, что выполняются соотношения*

$$\lambda \in \Lambda_F\left(w(x^{\lambda}), 0\right),\quad p\left(x^{\lambda}, F \cup L(x^{\lambda}, 0)\right) = 0, \tag{71}$$

где стандартный симплекс Λ *задан соотношениями* (8), *множества* L, I, Λ_J, X_t, $X_t(\cdot)$, M_t, *проекция* p, *направление* h *и параметры* α, ε *определены соотношениями* (10)–(12), (22), (52)–(58), (60), (67), (68).

Если (дополнительное условие) заданная соотношениями (1)–(4) *вектор-функция* w *псевдовогнута на выпуклом*

компакте X, *параметрическая функция* f_{λ} *определена в* (8), *то существует предельная точка* $x^{\lambda} \in X$ *последовательности* $\{x^t\}_{t=1}^{\infty}$ *из* (69), (70), *удовлетворяющая условиям*

$$\lim_{t\to\infty} f_{\lambda}(x^t) = f_{\lambda}(x^{\lambda}) = \max_{x \in X} f_{\lambda}(x),\quad \lambda \in \Lambda, \tag{72}$$

а отклонение множества эффективных векторных оценок $w(X_e)$ *от аппроксимирующего множества* $w(X_t)$ *и отклонение* $w(X_t)$ *от множества слабо эффективных векторных оценок* $w(X_0)$ *стремятся к нулю с ростом номера аппроксимации* t:

$$\lim_{t\to\infty} D\left(w(X_e), w(X_t)\right) = 0,\quad \lim_{t\to\infty} D\left(w(X_t), w(X_0)\right) = 0. \tag{73}$$

Доказательство. Для произвольной бесконечной подпоследовательности $\{y^{t_q}\}_{q=1}^{\infty}$ бесконечной последовательности точек $\{y^t\}_{t=1}^{\infty}$ введем обозначения

$$\{y^{t_q}\}_{q=1}^{\infty} = \{y^t\}_{t\in T},\quad \lim_{q\to\infty} y^{t_q} = \lim_{t\in T} y^t,\quad T = \{t_1, t_2, \ldots t_q, \ldots\} \tag{74}$$

где T – бесконечное подмножество не равных друг другу чисел t_q из натурального ряда $\{1, 2, \ldots t, \ldots\}$ в их естественной последовательности, $1 \le t_q < t_{q+1} < +\infty$, $q = 1, 2, \ldots$

Из соотношений (52)–(58) следует, что для произвольной последовательности $\{x^t\}_{t=1}^{\infty}$, заданной соотношениями (69), выполняется одно из двух условий: либо справедливо утверждение

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_t(x^t) = 0, \tag{75}$$

либо найдется конечный номер $\tau \ge 1$ такой, что при всех значениях $t \ge \tau$ выполняется условие

$$\varnothing \ne Q_t = \bigcap_{q=\tau}^{t} J_q\,,\quad \varnothing \ne J_t \in \mathsf{M}_t\left(x^t\right),\quad x^{t+1} \ne x^t\,,$$
$$\sigma\left(x^t, J_t\right) \ge \varepsilon_t\left(x^t\right) = \varepsilon > 0\,. \tag{76}$$

Предположим от противного, что выполняется условие (76). Тогда, с учетом непустоты пересечений в (76), справедливо утверждение

$$Q = \bigcap_{t=\tau}^{\infty} J_t \ne \varnothing\,,$$

так что, согласно (54)–(57), (60), (67)–(69), (76) для любого фиксированного индекса $i \in Q$ выполняются соотношения

$$i \in J_t \in \mathsf{M}_t\left(x^t\right),\quad \sigma\left(x^t, J_t\right) \ge \varepsilon\,,$$

$$\alpha\left(x^t, J_t\right) \ge \varepsilon \min\left\{\frac{\gamma^2}{4\mu\eta}, \frac{1}{\beta}, \frac{1-\omega}{2\theta}\right\} > 0\,,$$

для всех $t \ge \tau$, причем величина шага $\alpha\left(x^t, J_t\right)$ удовлетворяет неравенствам (63) теоремы 3. Следовательно, в согласии с (63) справедливы неравенства

$$w_i\left(x^{t+1}\right) - w_i\left(x^t\right) \ge \omega\varepsilon^2 \min\left\{\frac{\gamma^2}{4\mu\eta}, \frac{1}{\beta}, \frac{1-\omega}{2\theta}\right\} > 0\,,\quad t \ge \tau\,.$$

Но тогда бесконечная последовательность значений функции

$$w_i\left(x^t\right),\quad x^t \in X_t \subset X\,,\quad t = \tau, \tau+1, \ldots$$

неограниченно возрастает, что невозможно, поскольку в условиях теоремы функция w_i непрерывна на компакте X. Это противоречие доказывает, что у всякой последовательности $\left\{x^t\right\}_{t=1}^{\infty}$, заданной соотношениями (69), соответствующие значения параметров возмущения удовлетворяют условию (75).

Пусть в условиях теоремы задана произвольная фиксированная точка симплекса $\lambda \in \Lambda$. В согласии с разбиением

симплекса в (11)–(13), для любой фиксированной точки x^t, $t = 1, 2, \ldots$ можно указать подмножество F_t, $\varnothing \ne F_t \subset I$, удовлетворяющее включению

$$\lambda \in \Lambda_{F_t}\left(w\left(x^t\right), \varepsilon_t\right) \setminus \bigcup_{\varnothing,\, F_t \ne M \subset F_t} \Lambda_M\left(w\left(x^t\right), \varepsilon_t\right).$$

Но тогда либо выполняется второе из условий (70),

$$b\left\| p\left(x^t, F_t \cup L\left(x^t, \varepsilon_t\left(x^t\right)\right)\right)\right\| < \varepsilon_t\left(x^t\right),$$

либо, в согласии с определением множеств M_t в (55), справедливо утверждение

$$\varnothing \ne \operatorname{Arg} \max_{F_t \subset M \in \mathsf{M}_t\left(x^t\right)} |M| \subset \mathsf{M}_t\left(x^t\right),$$

так что включение $F_t \subset J_t$ выполняется для любого подмножества

$$J_t \in \operatorname{Arg} \max_{F_t \subset M \in \mathsf{M}_t\left(x^t\right)} |M|\,;$$

следовательно, в семействе (69) можно указать последовательность, у которой соответствующие подмножества F_t, J_t, $t = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют одному из условий (70).

Заданная условиями (69), (70) последовательность $\left\{x^t\right\}_{t=1}^{\infty}$ порождает разбиение натурального ряда $\{1, 2, \ldots t, \ldots\}$ на непересекающиеся подмножества T_0, T_1 такие, что

$$T_0 \cup T_1 = \{1, 2, \ldots t, \ldots\},\quad T_0 \cap T_1 = \varnothing\,,$$
$$T_0 = \{1, 2, \ldots t, \ldots\} \setminus T_1\,,\quad T_1 = \left\{t \mid t \ge 1,\quad \varnothing \ne F_t \subset J_t\right\}, \tag{77}$$

где хотя бы одно из подмножеств T_0, T_1 бесконечно.

Предположим от противного, что у некоторой последовательность $\left\{x^t\right\}_{t=1}^{\infty}$ из (69), (70) подмножество T_0 в (77) конечно. Тогда существует такой конечный номер $\tau \ge 2$, что бесконечное подмножество T_1 удовлетворяет включению

$$T_1 = \{t \mid t \geq 1\,,\quad \varnothing \neq F_t \subset J_t\} \supset \{t \mid t \geq \tau\}. \tag{78}$$

причем с учетом (75) выполняются соотношения

$$\varepsilon_{\tau-1}\left(x^{\tau-1}\right) > \varepsilon_\tau\left(x^\tau\right) = \varepsilon_{\tau+1}\left(x^{\tau+1}\right), \quad \varnothing \neq F_\tau \subset F_{\tau+1}\,, \tag{79}$$

где равенство следует из утверждения $\varnothing \neq F_\tau \subset J_\tau$ по определения параметров возмущения в (57) согласно условию $Q_\tau = J_\tau \neq \varnothing$, тогда как согласно правилу дробления шага (68) и следствия 1, по лемме 3 равенство в (79) влечет включение в (79).

Предположим по индукции, что для некоторого $q \geq 1$ справедливо утверждение

$$\begin{gathered} \varepsilon_{\tau-1}\left(x^{\tau-1}\right) > \varepsilon_\tau\left(x^\tau\right) = \varepsilon_{\tau+1}\left(x^{\tau+1}\right) = \ldots = \varepsilon_{\tau+q}\left(x^{\tau+q}\right), \\ \varnothing \neq F_\tau \subset F_{\tau+1} \subset \ldots \subset F_{\tau+q}\,, \end{gathered} \tag{80}$$

совпадающее при $q = 1$ с утверждением (79). Тогда, в согласии с включениями $\varnothing \neq F_t \subset J_t$, $t \geq \tau$ из (78) и определением параметров возмущения в (57), справедливо утверждение

$$\varnothing \neq F_\tau \subset Q_{\tau+q} = \bigcap_{t=\tau}^{\tau+q} J_t\,, \quad \varepsilon_{\tau+q+1}\left(x^{\tau+q+1}\right) = \varepsilon_{\tau+q}\left(x^{\tau+q}\right), \tag{81}$$

причем последнее равенство в (81) согласно правилу дробления шага (68) и следствия 1 по лемме 3 влечет включение

$$F_{\tau+q} \subset F_{\tau+q+1}$$

и утверждение (80) доказано для следующего значения $q' = q + 1$. Тем самым по индукции установлено равенство

$$\varepsilon_t\left(x^t\right) = \varepsilon_\tau\left(x^\tau\right), \quad t \geq \tau\,,$$

что противоречит утверждению (75). Следовательно, у всякой последовательности (69), (70) подмножество T_0 в (77) бесконечно.

Поскольку в (77) подмножество номеров T_0 бесконечно, утверждение теоремы (71) справедливо, так как в согласии с (70) для всех $t \in T_0$ выполняются соотношения

$$\lambda \in \Lambda_{F_t}\left(w\left(x^t\right), \varepsilon_t\left(x^t\right)\right), \quad b\left\| p\left(x^t, F_t \cup L\left(x^t, \varepsilon_t\left(x^t\right)\right)\right)\right\| < \varepsilon_t\left(x^t\right). \tag{82}$$

Действительно, число различных непустых подмножеств F_t множества $I = \{k \mid 1 \leq k \leq m\}$ конечно и не превосходит $2^m - 1$. Следовательно, существует бесконечное (вместе с множеством T_0) подмножество

$$T_F \subset \{t \in T_0 \mid F_t = F\}, \quad \lim_{t \in T_F} x^t = x^\lambda \in X\,, \tag{83}$$

поскольку определенное в (3) множество допустимых решений X – компакт, и по лемме 7 из утверждений (52), (57), (69), (70), (82),(83) следуют соотношения:

$$\begin{gathered} \lim_{t \in T_F} x^t = x^\lambda \in X\,, \quad \lim_{t \in T_F} \left\| p\left(x^t, F \cup L\left(x^\lambda, 0\right)\right)\right\| = 0\,, \\ \lambda \in \Lambda_F\left(w\left(x^t\right), \varepsilon_t\left(x^t\right)\right), \quad L\left(x^t, \varepsilon_t\left(x^t\right)\right) \subset L\left(x^\lambda, 0\right), \quad t \in T_F\,, \end{gathered} \tag{84}$$

так как, согласно определению многогранников G и проекций p в (22), при выполнении включений

$$x \in X\,, \ A \subset B\,,$$

справедливо утверждение

$$G(x, A) \subset G(x, B)\,, \quad \|p(x, A)\| \geq \|p(x, B)\| \geq 0\,.$$

Из утверждений (84) следуют соотношения (71)

$$\lambda \in \Lambda_F\left(w\left(x^\lambda\right), 0\right), \quad p\left(x^\lambda, F \cup L\left(x^\lambda, 0\right)\right) = 0\,.$$

Действительно, согласно утверждению леммы 4, функция $\left\| p\left(x, F \cup L\left(x^\lambda, 0\right)\right)\right\|$ непрерывна по x в каждой точке $x \in X$, так что из утверждений (84) следует равенство в (71), и в (71) остается доказать включение.

Предположим от противного

$$\lambda \notin \Lambda_F\left(w\left(x^\lambda\right), 0\right). \tag{85}$$

По определению подмножеств Λ_F симплекса Λ в (12), (20), для вектора $\lambda \in \Lambda$ из (85) можно указать номера i , r такие, что справедливы соотношения

$$i \in F\,,\quad r \in I\,,\quad \frac{\lambda_r}{w_r(x^\lambda)} > \frac{\lambda_i}{w_i(x^\lambda)}\,, \tag{86}$$

а с учетом утверждений (75), (84) выполняются соотношения

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_t(x^t) = 0\,,\quad \lim_{t\in T_F} x^t = x^\lambda \in X\,,$$

$$\frac{\lambda_k}{w_k(x^t)} \geq \left(1-\varepsilon_t(x^t)\right)\frac{\sum\limits_{j\in F}\lambda_j}{\sum\limits_{j\in F} w_j(x^t)} \geq \frac{\lambda_l}{w_l(x^t)}\,,\quad k\in F,\ l\in I\setminus F,\ t\in T_F\,.$$

Поскольку в условиях теоремы $x^t \in X$, $t = 1, 2\ldots$, а вектор-функция w положительна и непрерывна на компакте X, переходя в последних неравенствах к пределу по $t \in T_F$, получим соотношения

$$\frac{\lambda_k}{w_k(x^\lambda)} = \frac{\sum\limits_{j\in F}\lambda_j}{\sum\limits_{j\in F} w_j(x^\lambda)} \geq \frac{\lambda_l}{w_l(x^\lambda)}\,,\quad k\in F,\ l\in I\setminus F,$$

что противоречит неравенству в (86). Это опровергает предположение (85) и доказывает утверждение теоремы (71) в целом.

Согласно определению множества T_F в (83), ввиду непрерывности на компакте X функция f_λ в (8) удовлетворяет равенству

$$\lim_{t\in T_F} f_\lambda(x^t) = f_\lambda(x^\lambda).$$

Пусть вектор–функция w псевдовогнута на выпуклом компакте X. Тогда в условиях регулярности (6) из соотношений (71) и последнего равенства, согласно утверждению (66) теоремы 3, следует неравенство

$$f_\lambda(x^\lambda) \geq \max_{x\in X} f_\lambda(x),$$

где $x^\lambda \in X$ – предельная точка последовательности (69), (70). Поскольку точка симплекса $\lambda \in \Lambda$ была избрана произвольно, из последнего равенства и последнего неравенства следует утверждение

$$\lim_{t\in T_F} f_\lambda(x^t) = f_\lambda(x^\lambda) = \max_{x\in X} f_\lambda(x)\,,\quad \lambda\in\Lambda\,,$$

так что для доказательства утверждения (72) остается доказать, что соответствующая последовательности точек (69), (70) последовательность чисел $\left\{f_\lambda(x^t)\right\}_{t=1}^{\infty}$ сходится в целом:

$$\lim_{t\to\infty} f_\lambda(x^t) = f_\lambda(x^\lambda).$$

Поскольку T_0 в (77) бесконечно, из-за конечного числа различных непустых подмножеств $F_t \subset I$ множество T_0 можно без ограничения общности представить в виде

$$T_0 = \bigcup_{F\in\mathsf{F}} T_F\,,$$

$$\mathsf{F} = \left\{F\subset I \,\|T_F| = \infty\right\} \subset 2^I\,,\quad T_F \subset \left\{t\in T_0 \,|\, F_t = F\right\},$$

причем, как было установлено выше, выполняются соотношения

$$\lim_{t\in T_F} f_\lambda(x^t) = f_\lambda(x^\lambda) = \max_{x\in X} f_\lambda(x)\,,\quad \lambda\in\Lambda\,,\quad F\in\mathsf{F}\,,$$

так что для всякой предельной точки $x^\lambda \in X$ последовательности $\left\{x^t\right\}_{t\in T_0}$ справедливо утверждение

$$\lim_{t\in T_0} f_\lambda(x^t) = f_\lambda(x^\lambda) = \max_{x\in X} f_\lambda(x)\,,\quad \lambda\in\Lambda\,,$$

и сходимость в целом следует, если подмножество T_1 в (77) конечно. Остается рассмотреть возможность $|T_1| = \infty$.

В согласии с определениями (53), (54), (67) и правилом дробления шага (68), из условия (83) можно указать константу $c > 0$ такую, что выполняются соотношения

$$0 \le \left\| x^{t+1} - x^t \right\| = \alpha\left(x^t, J_t\right) \le c\varepsilon_t\left(x^t\right), \quad t = 1, 2, \ldots \tag{87}$$

В случае $|T_1| = \infty$ для произвольного номера $t \in T_1$ всегда можно указать номера

$$t_q\,, t_{q+1} \in T_0\,, \quad t_q + 1 \le t \le t_{q+1} - 1$$

$$j \in T_1\,, \quad t_q + 1 \le j \le t_{q+1} - 1\,,$$

а согласно (53)–(55), (69), (70), (77), справедливы соотношения

$$\varnothing \ne F_t \subset J_t \in \mathrm{M}_t\left(x^t\right), \quad \lambda \in \Lambda_{F_t}\left(w\left(x^t\right), \varepsilon_t\right), \quad \left\| h\left(x^t, J_t\right) \right\| = 1\,,$$

$$t_q + 1 \le t \le t_{q+1} - 1\,,$$

выполняются условия (61) теоремы 3, причем, согласно правилу дробления, величины $\alpha\left(x^t, J_t\right)$, $t \in T_1$ удовлетворяют условиям (63) теоремы 3, что, по теореме 3, ввиду (64), для фиксированного вектора $\lambda \in \Lambda_{F_t}\left(w\left(x^t\right), \varepsilon_t\right)$ влечет неравенства

$$f_\lambda\left(x^{t+1}\right) - f_\lambda\left(x^t\right) \ge \omega\alpha\left(x^t, J_t\right)\sigma\left(x^t, J_t\right) > 0\,, \quad t_q + 1 \le t \le t_{q+1} - 1\,,$$

где $0 < \omega < 1$ по условию (61). Тем самым ввиду (75), (87) справедливо утверждение

$$f_\lambda\left(x^{t_{q+1}}\right) > f_\lambda\left(x^t\right) > f_\lambda\left(x^{t_q+1}\right),$$

$$\max_{x\in X} f_\lambda(x) = \lim_{q\to\infty} f_\lambda\left(x^{t_{q+1}}\right) \ge \lim_{t\in T_1} f_\lambda\left(x^t\right) \ge \lim_{q\to\infty} f_\lambda\left(x^{t_q+1}\right) =$$

$$= \lim_{q\to\infty} f_\lambda\left(x^{t_q}\right) = \max_{x\in X} f_\lambda(x)\,,$$

что и доказывает окончательно сходимость в целом и утверждение теоремы (72).

Пусть по-прежнему X_e (X_0) – множество эффективных (слабо эффективных) по векторному критерию w решений из допустимого множества X. Предположим от противного, что первое утверждение в (73) не выполняется. Согласно данному в настоящей главе определению, отклонение $D(W, U)$ неотрицательно, так что в (74) можно указать такое бесконечное подмножество T не равных друг другу чисел натурального ряда (в их естественной последовательности) и такое число $\delta > 0$, что выполняются неравенства

$$D\left(w(X_e), w(X_t)\right) \ge 4\delta\,, \quad t \in T\,.$$

Следовательно, согласно определению отклонения, можно указать последовательность векторов

$$\left\{w^t\right\}_{t\in T} \subset w(X_e)\,, \quad \inf_{u\in w(X_t)} \left\| w^t - u \right\| \ge 3\delta\,, \quad t \in T\,.$$

В условиях теоремы вектор–функция w непрерывна на компактном допустимом множестве X, так что множество достижимых векторных оценок $w(X)$ компактно. Тем самым из последних соотношений и включения $w(X_e) \subset w(X)$ следует, что существует бесконечное подмножество $T_* \subset T$, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t\in T_*} w^t = w^0 \in w(X)\,, \quad \inf_{u\in w(X_t)} \left\| w^0 - u \right\| \ge 2\delta\,, \quad t \in T_*\,,$$

и найдется такой номер $\tau \in T_*$, что справедливо утверждение

$$w^\tau \in w(X_e)\,, \quad \inf_{u\in w(X_t)} \left\| w^\tau - u \right\| \ge \delta\,, \quad t \in T_*\,. \tag{88}$$

Из утверждения $w^\tau \in w(X_e) \subset w(X)$ ввиду (4), (8) следует, что существуют векторы x, λ, удовлетворяющие условиям

$$x \in X\,, \quad w^\tau = w(x) > 0\,, \quad \lambda = \frac{w^\tau}{\sum_{k=1}^m w_k^\tau} \in \Lambda \bigcap \operatorname{int} R_+^m\,, \tag{89}$$

причем соответствующая вектору λ из (89) предельная точка $x^\lambda \in X$ определенной соотношениями (69), (70) последовательности $\left\{x^t\right\}_{t=1}^\infty$ удовлетворяет, согласно (4),(9), (72), соотношениям

$$\frac{w_k(x^\lambda)}{\lambda_k} \ge f_\lambda(x^\lambda) = \max_{y\in X} f_\lambda(y) \ge f_\lambda(x) = \frac{w_k^\tau}{\lambda_k}, \quad 1 \le k \le m .$$

Следовательно, выполняется неравенство $w(x^\lambda) \ge w^\tau$ и, согласно определению 1 главы 1, эффективный вектор w^τ удовлетворяет соотношениям

$$w^\tau = w(x^\lambda), \quad f_\lambda(x^\lambda) = \sum_{k=1}^m w_k^\tau , \tag{90}$$

где второе равенство следует из первого с учетом (9), (89).

Ввиду (9), (89) выполняются неравенства

$$w(x^t) \ge \frac{f_\lambda(x^t)}{\sum\limits_{k=1}^m w_k^\tau} w^\tau , \quad t = 1, 2, ...$$

для всех точек последовательности $\{x^t\}_{t=1}^\infty$, множество $\{x^*\}$ предельных точек которой содержит точку x^λ. Переходя в этих последних неравенствах к пределу по $t \to \infty$, согласно (9), (72), (90), получаем соотношения

$$w(x^*) \ge \frac{f_\lambda(x^\lambda)}{\sum\limits_{k=1}^m w_k^\tau} w^\tau = w^\tau ,$$

так что из-за эффективности вектора w^τ по определению 1 главы 1 выполняется равенство $w(x^*) = w^\tau$ для каждой предельной точки x^*. Тогда последовательность векторов $w(x^t)$ сходится в целом, причем

$$\lim_{t\to\infty} w(x^t) = w^\tau . \tag{91}$$

Но ввиду (52), (69) $w(x^t) \in w(X_t)$, $t = 1, 2, ...$, так что равенство (91) противоречит утверждению (88), что и доказывает первое утверждение в (73). Остается доказать второе.

Докажем, что любая сходящаяся подпоследовательность $\{x^t\}_{t\in T}$ определенной в (69) последовательности $\{x^t\}_{t=1}^\infty$ имеет в качестве предельной точки слабо эффективное решение:

$$\lim_{t\in T} x^t = x^* \in X_0 . \tag{92}$$

В согласии с (52)–(56), (69) разобьем натуральный ряд $\{1, 2, ... t, ...\}$ на непересекающиеся подмножества T', T'' такие, что

$$T' \cup T'' = \{1, 2, ... t, ...\}, \quad T' \cap T'' = \varnothing ,$$
$$T' = \{t \mid t \ge 1,\ I \notin \mathrm{M}_t(x^t)\}, \quad T'' = \{t \mid t \ge 1,\ I \in \mathrm{M}_t(x^t)\}, \tag{93}$$

Согласно (53)–(56), (60), (67)–(69), (93), в условиях теоремы при всех $t \in T'$ выполняются неравенства

$$b\left\| p(x^t, I \cup L(x^t, \varepsilon_t(x^t)))\right\| < \varepsilon_t(x^t), \quad 0 \le \alpha(x^t, J_t) \le c\varepsilon_t(x^t), \tag{94}$$

где $\mathrm{c} = \mathrm{const} > 0$.

Если подмножество T' конечно, найдется $\tau \ge 1$ такое, что из условия $t \ge \tau$ следует включение $t \in T''$, и по определению множеств $\mathrm{M}_t(x^t)$, T'' в (55)–(57), (93) справедливо утверждение

$$\mathrm{M}_t(x^t) = \{I\}, \quad J_t = I , \quad \varepsilon_t(x^t) = \varepsilon_\tau(x^\tau) > 0 , \quad t \ge \tau ,$$

что противоречит предельному соотношению (75).

Следовательно, подмножество T' бесконечно, так что по определению подмножеств T', T'' в (93) можно утверждать:

$$T' = \{t_1, t_2, ... t_q, ...\}, \quad T'' = \bigcup_{q=1}^\infty T_q , \quad t_0 = 0 ,$$
$$T_{q+1} = \{t \mid t_q < t < t_{q+1}\}, \quad q = 0, 1, ... \tag{95}$$

По условиям теоремы выполняются включения $x^t \in X$, $t = 1, 2, ...$ где X – компакт, так что всякая предельная точка x^* последовательности (69) ввиду (74), (93) удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{t\in T} x^t = x^* \in X\,,\quad T \subset T' \cup T''\,,\quad |T| = \infty\,. \tag{96}$$

Пусть пересечение множеств $T \cap T'$ из (93), (96) бесконечно. Согласно (75), (93)–(96), в этом случае выполняются условия

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_t\left(x^t\right) = 0,\quad \lim_{t\in T\cap T'} x^t = x^* \in X,\quad \lim_{t\in T\cap T'} \left\| p\left(x^t,\, I \cup L\left(x^t, \varepsilon_t\left(x^t\right)\right)\right)\right\| = 0\,.$$

Последние три равенства, с учетом утверждений лемм 4, 7, влекут равенство $\left\| p\left(x^*, I \cup L\left(x^*, 0\right)\right)\right\| = 0$, которое, согласно следствию 2, в условиях теоремы является достаточным условием слабой эффективности решения $x^* \in X$, так что $x^* \in X_0$.

Пусть, наконец, пересечение множеств $T \cap T'$ из (93), (96) пусто либо конечно. Без потери общности будем полагать $T \cap T' = \varnothing$, так что, в согласии с (95), (96), можно утверждать, что

$$T \subset T''\,,\quad T = \bigcup_{q=1}^{\infty}\left(T \cap T_q\right). \tag{97}$$

Поскольку T', T – бесконечные подмножества, в согласии с (75), (93)–(97) найдется бесконечное подмножество

$$T^0 \subset \left\{ t \in T' \,\middle|\, t = t_q\,,\ q \ge 1\,,\ T \cap T_{q+1} \ne \varnothing \right\} \tag{98}$$

такое, что справедливо утверждение

$$\lim_{t\in T^0} x^t = \lim_{t\in T^0} x^{t+1} = x^0 \in X_0\,, \tag{99}$$

где равенство двух пределов следует из (53), (54), (69), (75), (94), а включение $x^0 \in X_0$ доказано выше, поскольку в (98) бесконечное подмножество $T^0 \subset T'$ и, следовательно, бесконечно пересечение $T^0 \cap T' = T^0$.

Ввиду (95)–(98) можно утверждать

$$\lim_{t\in T^*} x^t = \lim_{t\in T} x^t = x^* \in X\,,\quad T^* = \bigcup_{q\ge 1,\ t_q\in T^0}\left(T \cap T_{q+1}\right), \tag{100}$$

поскольку определенное в (100) подмножество $T^* \subset T$ бесконечно вместе с бесконечными подмножествами T, T^0 из (96)–(98).

Заметим, что в согласии с (55), (93), (95)–(98), выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \mathsf{M}_t\left(x^t\right) = \{I\},\quad J_t = I \in \mathsf{M}_t\left(x^t\right),\quad t_q + 1 \le t \le \tau\,,\\ t_q \in T^0,\quad \tau \in T^* \cap T_{q+1}\,, \end{gathered} \tag{101}$$

так что по теореме 3 с учетом правила выбора шага при условии $\tau > t_q + 1$ выполняются неравенства

$$w\left(x^\tau\right) - w_i\left(x^{t_q+1}\right) \ge \omega\left[\sum_{t=t_q+1}^{\tau-1} \alpha\left(x^t, J_t\right)\sigma\left(x^t, J_t\right)\right]\sum_{k=1}^{m} e^k > 0\,, \tag{102}$$

где τ, t_q определены в (101), e^k – единичные орты в пространстве $\mathbf{R}^m$.

Но ввиду (98)–(102) выполняются условия

$$\lim_{\tau\in T^*\cap T_{q+1}} x^\tau = x^*\,,\quad \lim_{t_q\in T^0} x^{t_q+1} = x^0\,,$$

$$w\left(x^\tau\right) \ge w_i\left(x^{t_q+1}\right).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу по точкам x^τ, x^{t_q+1}, благодаря непрерывности вектор–функции w получаем неравенство $w\left(x^*\right) \ge w\left(x^0\right)$. Но тогда, согласно соотношениям (99), (100), определению 1, следствию 1 и замечанию 1 главы 1, всякая предельная точка x^* соответствующей последовательности (69) является решением, слабо эффективным по векторному критерию w из (1)–(4) вместе с предельной точкой $x^0 \in X_0$. Тем самым утверждение (92) доказано.

Поскольку справедливо предельное соотношение (92), а допустимое множество X – компакт, для доказательства второго утверждения в (73) достаточно, с учетом определения отклонения, доказать, что всякая фиксированная сходящаяся последовательность точек

$$\{y^t\}_{t\in G_0}, \quad \lim_{t\in G_0} y^t = y^0 \in X, \quad y^t \in X_t \subset X, \quad t \in G_0, \tag{103}$$

имеет в качестве предельной точки слабо эффективное решение $y^0 \in X_0$.

Заметим, что заданные соотношениями (52) конечные множества X_t можно представить в виде

$$X_t = \bigcup_{x^r \in X_r} X_t\left(x^r\right), \quad t \geq r \geq 1,$$

$$X_t\left(x^1\right) = X_t, \quad X_t\left(x^t\right) = \left\{x^t\right\}, \quad t \geq 1, \tag{104}$$

$$X_t\left(x^r\right) = \bigcup_{x^{r+1} \in X_{r+1}\left(x^r\right)} \cdots \bigcup_{x^{t-1} \in X_{t-1}\left(x^{t-2}\right)} X_t\left(x^{t-1}\right), \quad t-1 \geq r \geq 1,$$

где $X_t\left(x^r\right)$ – подмножество точек множества X_t, ведущих свое «происхождение» от фиксированной точки $x^r \in X_r$, $t \geq r \geq 1$.

Для любой фиксированной бесконечной последовательности (103) определим, в согласии с (104), бесконечную последовательность непустых подмножеств

$$\{Y_r\}_{r=1}^{\infty}, \quad Y_r = \left\{ x^r \in X_r \,\middle|\, \sup_{t>r,\; y^t \in X_t\left(x^r\right)} t > r \right\} \neq \varnothing, \quad r = 1, 2, \ldots \tag{105}$$

так что Y_r составляют те и только те точки множества X_r, «потомство» которых содержит хотя бы одну точку y^t, $t > r$ последовательности (103). Множества Y_r непусты, поскольку каждая точка подпоследовательности $\{y^t\}_{t>r,\; t\in G_0}$ имеет хотя бы одного «предка» на множестве X_r.

Ввиду (104) множества (105) удовлетворяют включениям

$$Y_t \subset \bigcup_{x^r \in Y_r} X_t\left(x^r\right), \quad t \geq r \geq 1, \tag{106}$$

так что в (105), (106) определена такая бесконечная последовательность непустых подмножеств $Y_t \subset X_t$, $t = 1, 2 \ldots$, что «родословная» всякой точки $x^t \in Y_t$ содержится в отрезке последовательности подмножеств $\{Y_r\}_{r=1}^{t-1}$. Но тогда бесконечная последовательность непустых подмножеств $\{Y_r\}_{r=1}^{\infty}$ содержит хотя бы одну бесконечную последовательность точек из (69):

$$\{x^r\}_{r=1}^{\infty}, \quad x^r \in Y_r \subset X_r, \quad \sup_{t>r,\; y^t \in X_t\left(x^r\right)} t > r, \quad r = 1, 2, \ldots \tag{107}$$

причем, в согласии с соотношением (92), предельная точка любой сходящейся подпоследовательности $\{x^r\}_{r\in G_*}$ последовательности (69), (107) является слабо эффективным решением:

$$\lim_{r\in G_*} x^r = x^* \in X_0. \tag{108}$$

В согласии с (103)–(105), (107), определим бесконечное подмножество $G \subset G_0$ не равных друг другу натуральных чисел

$$G = \left\{ r \in G_0 \,\middle|\, \begin{array}{c} r = t_q, \; t_1 = \min\limits_{t\in G_0} t, \; t_{q+1} = \min\limits_{t>t_q,\; y^t \in X_t\left(x^{t_q}\right)} t, \\ q = 1, 2, \ldots \end{array} \right\} \tag{109}$$

Разобьем множество натуральных чисел на два непересекающихся подмножества G_1, G_2 таких, что

$$G_1 \cup G_2 = \{1, 2, \ldots q, \ldots\}, \quad G_1 \cap G_2 = \varnothing,$$

$$G_1 = \left\{ q \,\middle|\, q \ge 1,\ I \in \mathrm{M}_t\left(x^t\right),\ t_q \le t < t_{q+1},\ y^{t_{q+1}} \in X_{t_{q+1}}\left(x^{t_q}\right) \right\}, \tag{110}$$

где $q \in G_1$ в том и только в том случае, когда последовательность (107), в согласии с (52)–(56), (69), между точками x^{t_q} и $x^{t_{q+1}} = y^{t_{q+1}}$ не «ветвится» и не «топчется» на месте:

$$X_t\left(x^{t_q}\right) = \left\{x^t\right\} = \left\{ x^{t_q} + \sum_{r=t_q}^{t-1} \alpha\left(x^r, I\right) h\left(x^r, I\right) \right\}, \quad t_q \le t < t_{q+1},$$

$$\alpha\left(x^r, I\right), \quad \left\| h\left(x^r, I\right) \right\| \ne 0, \quad t_q \le r < t_{q+1},$$

так что с учетом (63), (110) выполняются неравенства

$$w\left(y^{t_{q+1}}\right) > w\left(x^{t_q}\right), \quad q \in G_1 .$$

Если подмножество G_1 в (110), бесконечно, то в (108) можно указать бесконечное подмножество

$$G_* \subset \left\{ t_q \,\middle|\, q \in G_1 \right\} \subset G \subset G_0,$$

и из последних неравенств и утверждений (103), (108) следует утверждение

$$w\left(y^0\right) = \lim_{q \in G_1} w\left(y^{t_{q+1}}\right) \ge \lim_{t_q \in G_*} w\left(x^{t_q}\right) = w\left(x^*\right),$$

так что в (103) предельная точка $y^0 \in X_0$ вместе с точкой $x^* \in X_0$.

Если подмножество G_1 в (110) конечно, то бесконечно подмножество G_2, причем для каждого $q \in G_2$ можно указать натуральное число

$$r_q = \max_{t_q \le r < t_{q+1},\, J_r \ne I} r, \quad z^{t_q} = x^{t_q}, \quad y^{t_{q+1}} \in X_{t_{q+1}}\left(z^r\right), \quad t_q \le r < t_{q+1},$$

так что отрезок последовательности точек из (69)

$$z^{t_q} = x^{t_q}, \quad z^{t_q+1}, \ldots z^{r_q}, \ldots z^{t_{q+1}} = y^{t_{q+1}}$$

не «ветвится» начиная с точки z^{r_q+1} и, согласно (53)–(55), (63), для всех номеров $q \in G_2$ с учетом включения $b = \mathrm{const} \in (0,1]$ выполняются соотношения

$$b \left\| p\left(z^{r_q}, I \cup L\left(z^{r_q}, \varepsilon\left(z^{r_q}\right)\right)\right) \right\| \le \varepsilon\left(z^{r_q}\right) \le \max_{x \in X_{r_q}} \varepsilon(x),$$

$$w\left(y^{t_{q+1}}\right) \ge w\left(z^{r_q+1}\right) \ge \left(1 - \varepsilon\left(z^{r_q}\right)\right) w\left(z^{r_q}\right),$$

Выберем бесконечное подмножество $G_3 \subset G_2$ такое, что подпоследовательность точек $\left\{z^{r_q}\right\}_{q \in G_3} \subset X$, где X – компакт, сходится:

$$\lim_{q \in G_3} z^{r_q} = x^0 \in X .$$

Тогда, переходя в последних неравенствах к пределу по номерам $q \in G_3$, с учетом утверждений (75), (103) и утверждения леммы 9 получим соотношения:

$$\lim_{q \in G_3} \max_{x \in X_{r_q}} \varepsilon(x) = 0, \quad \lim_{q \in G_3} \left\| p\left(z^{r_q}, I \cup L\left(z^{r_q}, \varepsilon\left(z^{r_q}\right)\right)\right) \right\| = 0,$$

$$w\left(y^0\right) \ge w\left(x^0\right).$$

Из трех последних равенств и утверждений лемм 4, 7 следует равенство

$$\left\| p\left(x^0, I \cup L\left(x^0, 0\right)\right) \right\| = 0,$$

так что в условиях теоремы по следствию 2 допустимое решение $x^0 \in X_0$ – слабо эффективно, а согласно последнему неравенству слабо эффективна предельная точка в (103), $y^0 \in X_0$. Теорема доказана.

§5. Основное содержание полученных результатов

В настоящей главе задача многокритериальной оптимизации исследовалась при следующих предположениях:

множество допустимых решений X в (1)–(4) – компакт в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^s$;

вектор–функция $v \in \mathbf{R}^n$ в (1), состоящая из частных критериев эффективности (2) и левых частей функциональных ограничений (3), дифференцируема на открытом множестве $A \supset \mathrm{conv}X$;

градиенты ее компонент ∇v_k существуют и удовлетворяют на выпуклом компакте $\mathrm{conv}X$ условию Липшица (7), причем знание величины константы Липшица не требуется;

$n-m$ функциональных ограничений в (3) удовлетворяют на множестве X условию регулярности (6).

Если принято дополнительное условие:

m частных критериев в (2) псевдовогнуты на выпуклом компакте X,

то в этих предположениях, стандартных для классической задачи условной оптимизации, утверждается следующее.

На множестве допустимых решений X удается построить последовательность подмножеств X_t, $t = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющую условиям (52)–(57), (67), (68), где в качестве начального множества выбрана любая допустимая точка $x^1 \in X$, так что $X_1 = \{x^1\}$. На каждом шаге $t = 1, 2, \ldots$ направление h перехода из произвольной точки $x^t \in X_t$ в точку $x^{t+1} = x^t + \alpha h \in X_{t+1}$ определяется, с учетом замечания 3, из решения задачи квадратичного программирования; введение в условия (54), (55) параметра $b \in (0,1]$ позволяет решать такие задачи неточно, если на каждом шаге относительная погрешность вычисления проекций (22) не превосходит $1-b$.

Бесконечная последовательность $\{X_t\}_{t=1}^{\infty} \subset X$ представляет собой ветвящуюся структуру, где всякая точка $x \in X_t$ порождает на следующем $t+1$ – ом уровне непустое множество «потомков» $X_{t+1}(x)$, число $|X_{t+1}(x)|$ которых (степень ветвления) определяется наибольшим числом не вложенных друг в друга подмножеств множества $I = \{k | 1 \le k \le m\}$:

$$|X_{t+1}(x)| \le \frac{m!}{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor! \left(m - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right)!},$$

т. е. на первых порах не слишком быстро растет с ростом числа m критериев эффективности: при $m=4$ степень ветвления не превосходит 6-ти, при $m=5$ не превосходит 10-ти. При росте числа критериев за пределы величины $m \approx 7 \div 10$, оценка сверху степени ветвления растет все быстрее; задачи подобного рода рассматриваются отдельно в главе 4.

Доказана основная теорема о сходимости (теорема 4 настоящей главы), согласно которой отклонение множества эффективных векторов $w(X_e)$ от аппроксимирующего множества $w(X_t)$, и отклонение $w(X_t)$ от множества слабо эффективных векторов $w(X_0)$ могут быть сделаны сколь угодно малыми при достаточно больших значениях номера аппроксимации t:

$$\lim_{t\to\infty} D(w(X_e), w(X_t)) = \lim_{t\to\infty} D(w(X_t), w(X_0)) = 0.$$

Следовательно, если в рассматриваемой задаче многокритериальной оптимизации множество эффективных векторов совпадает с множеством слабо эффективных векторов, $w(X_e) = w(X_0)$, то с ростом номера аппроксимации t стремится к нулю расстояние по Хаусдорфу между множеством эффективных векторов $w(X_e)$ и его аппроксимацией $w(X_t)$:

$$\lim_{t\to\infty}\max\{D(w(X_e),w(X_t)),D(w(X_t),w(X_e))\}=$$
$$=\lim_{t\to\infty}\Delta(w(X_e),w(X_t))=0\,.$$

Из доказательства теоремы 4 следует справедливость включений (см. также [17]):

$$w(X_e)\subset w(X_*)\subset w(X_0)\,,$$

где X_* – множество предельных точек всевозможных последовательностей $\{x^t\}_{t=1}^{\infty}$, определенных соотношениями(69).

Если предположение о псевдовогнутости частных критериев эффективности и выпуклости допустимого множества X не выполняется, по теореме 4 выполняется (как и следовало ожидать) более слабое утверждение:

множество предельных точек X_* включает в себя множество «стационарных» предельных точек

$$\{x^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset X_*\,,$$
$$p(x^\lambda, I\cup L(x^\lambda,0))=0\,,\quad \lambda\in\Lambda\,,$$

по всему спектру значений весовых коэффициентов $\lambda\in\Lambda$, где Λ – стандартный симплекс в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^m$.

Мы видим, что утверждение основной теоремы 4 имеет тот же смысл, который имеют теоремы о сходимости в скалярных задачах математического программирования: без предположений о выпуклости множества допустимых решений и максимизируемой функции вычислительная процедура сходится к стационарной точке, а при наличии таких предположений – к решению [10].

В вырожденном случае, когда критерий эффективности $w\in\mathbf{R}^m$ – скалярная функция $(m=1)$, теорема 4 является теоремой о сходимости одного из вариантов метода возможных направлений [6], [7]. Характерное для методов этого типа «заклинивание», препятствующее сходимости, в общем случае

векторного критерия $(m>1)$ преодолевается при учете не только «активных», но и «ε– активных» ограничений, а также введением параметра возмущения ε в разбиение (11)–(13) стандартного симплекса Λ из (8).

Следует отметить, что при определении правила дробления параметров возмущения (57), значение коэффициента дробления $\kappa = 1/2$ было выбрано произвольно, и его можно заменить любым фиксированным значением $\kappa\in(0,1)$.

Доказательство основной теоремы 4 непосредственным образом опирается на результат (Ю.Б. Гермейер) теоремы 1 главы 1, в согласии с которым (следствие 2 главы 1) множество эффективных векторных оценок

$$w(X_e)\subset\bigcup_{\lambda\in\mathrm{ri}\,\Lambda} w(x^\lambda)\subset w(X_0)\,,\quad x^\lambda\in \operatorname{Arg}\max_{x\in X} f_\lambda(x)\,,$$

причем многомерное множество параметров (стандартный симплекс $\Lambda\subset\mathbf{R}^m$) и скалярная свертка (параметрическая функция минимума взвешенных частных критериев эффективности $f_\lambda(x)=\min\limits_{1\le k\le m,\,\lambda_k>0}\{\lambda_k^{-1}w_k(x)\}$) присутствуют даже в самой формулировке теоремы 4.

В этой связи может возникнуть ложное впечатление, что сходящийся по теореме 4 метод построения последовательности аппроксимирующих множеств $\{w(X_t)\}_{t=1}^{\infty}$ относится к семейству методов, основанных на скаляризации векторного критерия эффективности [1], [11]. Тем не менее, это не так, поскольку соотношения (52)–(57), (60), (67), (68), определяющие аппроксимирующую последовательность $\{w(X_t)\}_{t=1}^{\infty}$, никак не связаны ни со скалярной сверткой $f_\lambda(x)$, ни с разбиениями стандартного симплекса Λ. То и другое представляют собой своего рода строительные леса, которые разбирают после окончания работ (по завершении доказательства сходимости метода).

В заключение следует упомянуть, что с практической точки зрения возможно объединение двух различных подходов к решению многокритериальных задач, развитых в главах 1 и 2: на первых шагах (вдали от границ допустимого множества X) можно двигаться по наилучшим гарантирующим направлениям (39) главы 1, переходя в дальнейшем на направления (59) главы 2. Таким образом, с помощью предложенного в главе 1 метода, может быть определено множество опорных точек, обеспечивающих мультистарт для метода главы 2. Это представляется полезным, поскольку численные методы зачастую используются при нарушении части предположений (например, в отсутствие выпуклости ограничений).

ГЛАВА 3

О СРАВНЕНИИ АППРОКСИМИРУЮЩИХ МНОЖЕСТВ

§1. Обсуждение проблемы. Свойства функции максимума

В предыдущей главе 2 было установлено, что при стандартных предположениях о вектор–функции частных критериев эффективности и левых частей функциональных ограничений существует последовательность аппроксимирующих множеств, сходящаяся к множеству эффективных векторных оценок. Разумеется, это не означает, что проблему построения множества эффективных векторных оценок можно считать закрытой. Существует целый ряд обстоятельств, ввиду которых крайне желательно иметь способ оценивания качества аппроксимирующих множеств (аппроксимаций), не зависящий от способа их получения. Перечислим некоторые из этих обстоятельств.

1. Численные методы оптимизации (и среди них метод, развитый в главе 2) на практике могут быть использованы вне формальных пределов своей применимости, т.е. при нарушении, по крайней мере, некоторых требований, предъявляемых к ограничениям и частным критериям эффективности. В этих условиях сходимость последовательности аппроксимаций к множеству эффективных векторов не гарантирована, и качество полученных аппроксимаций нуждается в независимой оценке.

2. Требования к частным критериям и ограничениям могут быть выполнены, но аппроксимации множества эффективных векторов получены двумя (или более) сходящимися численными методами. Если мы хотим определить метод, по-

рождающий наилучшую аппроксимацию (например, за фиксированное число шагов или при равных затратах машинного времени), мы вновь должны уметь независимым образом сравнивать по качеству полученные аппроксимации.

3. Даже с помощью единственного сходящегося численного метода точное решение обычно не удается получить за конечное число шагов. В этом случае не просто выбрать финальный номер шага (и соответствующую финальную аппроксимацию). Если при отыскании максимума скалярного критерия $g(x) \in R^1$ в качестве финального номера шага иногда выбирают значение t при условии

$$\left| g(x^t) - g(x^{t-1}) \right| \le \delta, \quad g(x^t) \ge g(x^{t-1}),$$

где $\delta > 0$ – наперед заданное достаточно малое число, то при векторном критерии $w(x) \in R^m$, $m > 1$ подобный эвристический подход затруднителен, поскольку близость между соседними аппроксимирующими множествами $w(X_t)$ и $w(X_{t-1})$ в метрике Хаусдорфа,

$$\Delta(w(X_t), w(X_{t-1})) \le \delta,$$

установить можно, но еще нужно уметь сравнивать аппроксимации между собой по качеству (уметь проверить утверждение о нестрогом превосходстве одной аппроксимации над другой, $w(X_t) \succeq w(X_{t-1})$).

Таким образом, независимый способ оценки качества аппроксимирующих множеств нужен не для того, чтобы заново решать задачу многокритериальной оптимизации путем выбора «наилучшей» аппроксимации, а для сравнения по качеству аппроксимаций, уже отобранных в результате применения тех или иных (в том числе эмпирических) методов оптимизации.

Пусть по-прежнему на непустом компактном множестве допустимых решений $X \subset \mathbf{R}^s$ желательно увеличивать каждую из m компонент векторного критерия эффективности

$$w(x) \in w(X) \subset \operatorname{int} \mathbf{R}_+^m,$$
$$w(X) = \left\{ u \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, u = w(x), \quad x \in X \right\}, \quad \mathbf{R}_+^m = \left\{ u \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, u \ge 0 \right\}, \tag{1}$$

где $\operatorname{int} \mathbf{R}_+^m$ – внутренность неотрицательного ортанта $\mathbf{R}_+^m$ в m – мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^m$, вектор-функция w непрерывна на множестве X, $w(Y)$ – множество достижимых значений вектор–функции w на множестве $Y \subset X$.

В согласии с определением 1, следствием 1 и замечанием 1 главы 1, множество эффективных (X_e), слабо эффективных (X_0) и доминируемых (X_∂) решений из компактного множества допустимых решений (X) удовлетворяют соотношениям

$$w(X_e) \subset w(X_0) \subset w(X),$$
$$w(X_0) \cap w(X_\partial) = \varnothing, \quad w(X) = w(X_0) \cup w(X_\partial), \tag{2}$$

где множества $w(X_e)$, $w(X_0)$, $w(X_\partial)$, $w(X)$ – множества эффективных, слабо эффективных, доминируемых и достижимых векторов (векторных оценок) соответственно.

Поскольку множество подлежащих сравнению, отобранных теми или иными методами аппроксимаций

$$U_i \subset w(X), \quad i = 1, 2, ..., C,$$

заранее может быть неизвестно, следует научиться корректно сравнивать между собой по качеству всевозможные аппроксимации (всевозможные непустые подмножества W множества достижимых векторных оценок, $\varnothing \ne W \subset w(X)$). Говоря строго, на множестве $\mathsf{W} = 2^{w(X)} \setminus \{\varnothing\}$ всех непустых подмножеств множества достижимых векторных оценок $w(X)$ следует задать некоторое бинарное отношение предпочтения. Дадим в наших обозначениях стандартное определение бинарного отношения.

Определение 1. *Бинарным отношением* на множестве $\mathsf{W} = 2^{w(X)} \setminus \{\varnothing\}$ называется подмножество ρ множества $\mathsf{W}^2 = \mathsf{W} \times \mathsf{W}$ всевозможных упорядоченных пар множеств (W, U), где $\varnothing \neq W, U \subset w(X)$. Если пара $(W, U) \in \rho$, то говорят, что W и U находятся в отношении ρ, и этот факт обозначают: $W \rho U$. Бинарное отношение ρ называется:

рефлексивным, если $(W, W) \in \rho$ для всякого непустого $W \subset w(X)$;

антирефлексивным, если $(W, W) \notin \rho$ для всякого непустого $W \subset w(X)$;

симметричным, если включение $(W, U) \in \rho$ влечет включение $(U, W) \in \rho$;

асимметричным, если включение $(W, U) \in \rho$ влечет отрицание $(U, W) \notin \rho$;

антисимметричным, если включения $(W, U) \in \rho$ и $(U, W) \in \rho$ влекут равенство $U = W$;

транзитивным, если включения $(W, U) \in \rho$ и $(U, V) \in \rho$ влекут включение $(W, V) \in \rho$;

связным (или *полным*), если для всевозможных пар непустых множеств $W, U \subset w(X)$ выполняется хотя бы одно из включений $(W, U) \in \rho$, $(U, W) \in \rho$;

слабо связным, если для всевозможных пар $W \neq U$, $\varnothing \neq W, U \subset w(X)$ выполняется хотя бы одно из включений $(W, U) \in \rho$, $(U, W) \in \rho$;

полным квазипорядкоом, если ρ – рефлексивное, транзитивное и полное бинарное отношение.

Если множество ρ – бинарное отношение строгого (нестрогого) предпочтения, то утверждение $(W, U) \in \rho$ означает, что W предпочтительнее U, $W \succ U$ (W не хуже U, $W \succeq U$.)

Если ρ – бинарное отношение эквивалентности, то утверждение $(W, U) \in \rho$ означает, что W равноценно U, $W \approx U$.

Строгое предпочтение асимметрично и антирефлексивно. Нестрогое предпочтение рефлексивно. Эквивалентность рефлексивна и симметрична.

Всюду далее в качестве аппроксимаций рассматриваются *непустые* подмножества множества достижимых векторных оценок $w(X)$, и по большей части мы не станем далее оговаривать это обстоятельство особо.

Пусть на множестве достижимых векторов $w(X)$ существует несколько подмножеств, претендующего на звание удовлетворительной аппроксимации множества эффективных векторов $w(X_e)$. Подобные не совпадающие друг с другом подмножества $U_1, U_2 \subset w(X)$, $U_1 \neq U_2$ могут по-разному аппроксимировать искомое множество эффективных векторов $w(X_e)$. Если множество U_1 лучше аппроксимирует некоторое подмножество $U \subset w(X_e)$, и хуже – его дополнение $w(X_e) \setminus U$, а множество U_2 – наоборот, то выбор между аппроксимациями U_1 и U_2 становится затруднительным.

На языке бинарных отношений это означает, что непросто задать отношение предпочтения $\rho \in \mathsf{W} \times \mathsf{W}$, которое было бы слабо связным, так что для любых подмножеств

$U_1, U_2 \subset w(X)$, $U_1 \neq U_2$ выполняется хотя бы одно из утверждений

$$(U_1, U_2) \in \rho, \quad (U_2, U_1) \in \rho;$$

здесь может потребоваться своего рода интегральный показатель, позволяющий оценивать качество любых аппроксимирующих множеств путем их попарного сравнения между собой.

В этой связи следует отметить ту важную информацию о компактных аппроксимирующих множествах $W \subset w(X)$, которую несут в себе функции максимума

$$\varphi(\lambda, W) = \max_{w \in W} f_\lambda(w), \quad \lambda \in \Lambda, \tag{3}$$

где семейство скалярных сверток f_λ векторного критерия w из (1)

$$f_\lambda(w) = \min_{1 \le k \le m,\, \lambda_k > 0} \frac{w_k}{\lambda_k}, \quad \lambda \in \Lambda, \quad w \in w(X),$$
$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1, \quad \lambda \ge 0 \right\}, \tag{4}$$

для любых достижимых векторных оценок $w \in w(X)$ и точек стандартного симплекса $\lambda \in \Lambda$ удовлетворяет условиям

$$1 = f_\lambda(w) \max_{1 \le k \le m} \frac{\lambda_k}{w_k}, \quad 0 < \gamma \le f_\lambda(w) \le \eta,$$
$$\gamma = \min_{w \in w(X)} \min_{1 \le k \le m} w_k, \quad \eta = \max_{w \in w(X)} \sum_{k=1}^m w_k, \tag{5}$$

в согласии с утверждениями (8), (9) главы 2.

В самом деле, по теореме 1 главы 1 в условиях (1)–(5) множество слабо эффективных векторных оценок $w(X_0)$ можно представить в виде:

$$w(X_0) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Arg} \max_{w \in w(X)} f_\lambda(w), \tag{6}$$

поскольку множество достижимых векторных оценок $w(X)$ компактно вместе с допустимым множеством X из-за непрерывности вектор–функции w.

Замечание. Вместо непустого множества $W \subset w(X)$ всюду далее будем рассматривать его замыкание $\overline{W} \subset w(X)$, если при некотором значении $\lambda \in \Lambda$ точная верхняя грань $\sup_{w \in W} f_\lambda(w)$ на множестве W не достигается.

В согласии с представлением (6), качество аппроксимации W, вообще говоря, тем выше, чем ближе к 1 отношение соответствующих значений функций максимума

$$\frac{\max_{w \in W} f_\lambda(w)}{\max_{w \in w(X_0)} f_\lambda(w)} \in (0, 1], \quad \lambda \in \Lambda, \quad \varnothing \neq W \subset w(X).$$

Проблема состоит в том, что это отношение «плавает» на полуинтервале $(0, 1]$, когда вектор весовых коэффициентов λ меняется в пределах стандартного симплекса Λ, так что для оценки качества аппроксимаций требуется некоторая свертка на симплексе (упомянутый выше интегральный показатель).

С учетом замечания мерой качества всякого непустого аппроксимирующего множества $W \subset w(X)$ могут служить величины сверток (чем больше величина, тем выше качество):

$$\Psi^0(W) = \int_\Lambda \left[\frac{\max_{w \in W} f_\lambda(w)}{\max_{w \in w(X_0)} f_\lambda(w)} \right] d\Lambda \in (0, V(\Lambda)],$$
$$\Psi^1(W) = \min_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \frac{\max_{w \in W} f_\lambda(w)}{\max_{w \in w(X_0)} f_\lambda(w)} \right\} \in (0, 1], \quad \Psi^0(W) \ge V(\Lambda) \Psi^1(W); \tag{7}$$

здесь интегральная свертка Ψ^0 представляет собой определенный интеграл по $(m-1)$ – мерному объему $V(\Lambda)$ стандартного симплекса $\Lambda \subset \mathbf{R}^m$, тогда как гарантирующая свертка Ψ^1 согласно определению функций минимума f_λ не менее сложна, чем последовательный минимакс. Оценка по величине Ψ^1 является более жесткой, о чем в (7) свидетельствует неравенство. Гарантирующая свертка Ψ^1 строго «наказывает» за отклонение функции $\max_{w \in W} f_\lambda(w) / \max_{w \in w(X_0)} f_\lambda(w)$ от 1 даже в одной-единственной точке $\lambda \in \Lambda$, тогда как интегральная свертка Ψ^0 более «либеральна», поскольку игнорирует «выброс» подынтегральной функции в единственной точке симплекса *).

Рассмотрим более подробно интегральную свертку (к обсуждению гарантирующей вернемся позднее).

Для непустых произвольных множеств $W, U \subset w(X)$ разность значений интегральной свертки задает «принципиальную» функцию сравнения

$$\Phi^0(W,U) = \Psi^0(W) - \Psi^0(U) = \int_\Lambda \left[\frac{\max_{w \in W} f_\lambda(w) - \max_{w \in U} f_\lambda(w)}{\max_{w \in w(X_0)} f_\lambda(w)} \right] d\Lambda . \quad (8)$$

Согласно определению 1, заданная соотношениями (8) функция сравнения $\Phi^0(W, U)$ порождает на множестве подмножеств $\mathsf{W} = 2^{w(X)} \setminus \{\varnothing\}$ множества достижимых векторных оценок $w(X)$ следующие бинарные отношения:

---

* Подынтегральная функция в (7) удовлетворяет (см. далее лемму 3) на стандартном симплексе условию Липшица, так что интегральная свертка не столь «либеральна», а гарантирующая не столь «строга».

Условие $\Phi^0(W, U) = 0$ порождает отношение эквивалентности ($W \approx U$), условие $\Phi^0(W, U) > 0$ – отношение строгого предпочтения ($W \succ U$), условие $\Phi^0(W, U) \geq 0$ – отношение нестрогого предпочтения ($W \succeq U$).

Эти бинарные отношения транзитивны, поскольку для произвольных непустых подмножеств $U_1, U_2, U_3 \subset w(X)$ согласно правилу интегрирования суммы непрерывных функций справедливо утверждение

$$\Phi^0(U_1, U_3) = \Phi^0(U_1, U_2) + \Phi^0(U_2, U_3).$$

Функция сравнения Φ^0 является «принципиальной», поскольку для вычисления в подынтегральном выражении (8) коэффициента нормирования

$$\varphi_0(\lambda) = \max_{w \in w(X_0)} f_\lambda(w), \quad \lambda \in \Lambda$$

следует заранее определить множество слабо эффективных векторов $w(X_0)$, на что можно рассчитывать лишь при решении тестовых задач.

Для всех прочих (т.е. содержательных) задач многокритериальной оптимизации информация о множестве $w(X_0)$ может быть получена лишь апостериори. Поэтому напрямую использовать формально введенную в (8) «принципиальную» функцию сравнения Φ^0 для оценки качества аппроксимаций не удается; однако ее можно модифицировать, заменив (см. §2 настоящей главы) в подынтегральном выражении неопределенный коэффициент нормирования $\varphi_0(\lambda)$.

Чтобы такая модификация была проведена корректно, рассмотрим более подробно некоторые полезные свойства определенных в (3), (4) функций максимума $\varphi(\lambda, W) = \max_{w \in W} f_\lambda(w), \quad \lambda \in \Lambda$.

Лемма 1. *В условиях* (1)–(5) *всякое непустое компактное множество* $W \subset w(X)$ *удовлетворят соотношению*

$$\max_{w \in W \setminus B_W} f_\lambda(w) = \max_{w \in W} f_\lambda(w), \quad \lambda \in \Lambda.$$

где множество

$$B_W = \left\{ u \in W \,\middle|\, \left\{\{u\} + \mathbf{R}_+^m\right\} \cap W \neq \{u\} \right\}, \quad \varnothing \neq W \subset w(X), \quad (9)$$

состоит из тех (и только тех) векторных оценок $u \in W$ *, для которых существует векторная оценка* $w \in W \setminus \{u\}$, $w \geq u$ *,* $A + B$ *– векторная сумма множеств* $A, B \subset \mathbf{R}^m$ *, неотрицательный ортант* $\mathbf{R}_+^m = \left\{ u \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, u \geq 0 \right\}$.

Доказательство. Согласно определению (4) функция минимума $f_\lambda(u)$ непрерывна на компакте W при всяком фиксированном значении $\lambda \in \Lambda$, так что справедливо утверждение

$$\operatorname{Arg}\max_{w \in W} f_\lambda(w) \neq \varnothing, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Из определения (9) множества $B_W \subset W$ следует равенство

$$B_W \cup (W \setminus B_W) = W,$$

так что при всяком фиксированном значении $\lambda \in \Lambda$ выполняется, по крайней мере, одно из условий

$$B_W \cap \operatorname{Arg}\max_{w \in W} f_\lambda(w) \neq \varnothing, \quad (W \setminus B_W) \cap \operatorname{Arg}\max_{w \in W} f_\lambda(w) \neq \varnothing.$$

Если при всех значениях $\lambda \in \Lambda$ выполняется второе условие, то утверждение леммы доказано. Предположим от противного, что при некотором фиксированном значении $\lambda \in \Lambda$ выполняется лишь первое условие, так что существует вектор

$$u \in B_W, \quad f_\lambda(u) = \max_{w \in W} f_\lambda(w);$$

но тогда, согласно определению множества B_W, существует вектор $w \in W \setminus B_W$, $w \geq u \neq w$, так что по определению (4) функции f_λ справедливо соотношение

$$f_\lambda(w) \geq f_\lambda(u) = \max_{w \in W} f_\lambda(w),$$

и второе утверждение

$$(W \setminus B_W) \cap \operatorname{Arg}\max_{w \in W} f_\lambda(w) \neq \varnothing$$

все-таки выполняется. Из противоречия следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Согласно определению (9), множество $B_W \subset W$ представляет собой своего рода «балласт» множества W, поскольку содержит лишь те векторные оценки $u \in W$, для которых существует доминирующая ее по Парето [18] векторная оценка $w \in W \setminus \{u\}$, $w \geq u$. Утверждение леммы 1 состоит в том, что при освобождении от «балласта» (при переходе от множества W к множеству $W \setminus B_W$) значение функции максимума не меняется.

Согласно определению множеств $w(X), w(X_e)$, B_W множество эффективных векторов $w(X_e)$ не содержит «балласта», а «балластом» произвольного множества W, удовлетворяющего включениям $w(X_e) \subset W \subset w(X)$, не являются только эффективные векторы:

$$B_{w(X_e)} = \varnothing, \quad B_W = W \setminus w(X_e).$$

Тем самым из утверждения леммы 1 и компактности множества достижимых векторных оценок $w(X)$ вытекает

Следствие. *В условиях* (1)–(5) *для любого множества* W *, удовлетворяющего включениям* $w(X_e) \subset W \subset w(X)$*, выполняются равенства*

$$\max_{w \in W} f_\lambda(w) = \max_{w \in w(X)} f_\lambda(w), \quad \lambda \in \Lambda.$$

Напомним, что согласно данному в предыдущей главе 2 определению величина

$$D(W,U)=\sup_{w\in W}\inf_{u\in U}\|w-u\|$$

называется отклонением множества W от множества U для произвольных непустых множеств $W,U\subset\mathbf{R}^m$.

Лемма 2. *Если на множестве $w(X)$ заданы компактные подмножества A, B, C, а при некотором значении $\delta>0$ отклонение*

$$D(A,B)\le\frac{\gamma^2}{\eta}\delta,$$

то выполняются неравенства

$$\max_{w\in A}f_\lambda(w)-\max_{u\in B}f_\lambda(u)\le\delta\max_{v\in C}f_\lambda(v),\quad \lambda\in\Lambda,$$

где функция f_λ, симплекс Λ и параметры $\gamma,\eta>0$ заданы соотношениями (4), (5).

Доказательство. Для любого $\lambda\in\Lambda$ можно определить векторы $w(\lambda)\in A$, $u(\lambda)\in B$, удовлетворяющие соотношениям

$$\max_{1\le k\le m}\frac{\lambda_k}{w_k(\lambda)}=\min_{w\in A}\max_{1\le k\le m}\frac{\lambda_k}{w_k},$$

$$\|w(\lambda)-u(\lambda)\|=\min_{u\in B}\|w(\lambda)-u\|\le\frac{\gamma^2}{\eta}\delta, \tag{10}$$

где неравенство следует из условия леммы и определения отклонения, так что можно утверждать

$$p=\frac{\min\limits_{u\in B}\max\limits_{1\le k\le m}\dfrac{\lambda_k}{u_k}}{\min\limits_{w\in A}\max\limits_{1\le k\le m}\dfrac{\lambda_k}{w_k}}\le\frac{\max\limits_{1\le k\le m}\dfrac{\lambda_k}{u_k(\lambda)}}{\max\limits_{1\le k\le m}\dfrac{\lambda_k}{w_k(\lambda)}}\le\max_{1\le k\le m}\frac{w_k(\lambda)}{u_k(\lambda)},\quad\lambda\in\Lambda;$$

полагая при любом фиксированном $\lambda\in\Lambda$ без ограничения общности $p\ge1$, ввиду (5), (10) из последних неравенств получаем соотношения

$$\frac{\max\limits_{w\in A}f_\lambda(w)-\max\limits_{u\in B}f_\lambda(u)}{\max\limits_{v\in C}f_\lambda(v)}=\frac{\max\limits_{u\in B}f_\lambda(u)}{\max\limits_{v\in C}f_\lambda(v)}\left[\frac{\max\limits_{w\in A}f_\lambda(w)}{\max\limits_{u\in B}f_\lambda(u)}-1\right]\le$$

$$\le\frac{\eta}{\gamma}(p-1)\le\frac{\eta}{\gamma^2}\max_{1\le k\le m}|w_k(\lambda)-u_k(\lambda)|\le\delta,$$

что и доказывает утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если множество достижимых векторов $w(X)$, стандартный симплекс Λ, функция f_λ и параметры $\gamma,\eta>0$ определены в* (1), (4), (5), *фиксированное множество $A\subset w(X)$ – компакт, то функция максимума*

$$\varphi(\lambda,A)=\max_{w\in A}f_\lambda(w),\quad\lambda\in\Lambda$$

непрерывна в каждой точке $\lambda\in\Lambda$, а при дополнительном условии

$$\varphi(\lambda,A)\le\varphi(\lambda,B),\quad\lambda\in\Lambda,$$

где компактное множество $B\subset\operatorname{int}\mathbf{R}^m_+$, функция $\varphi(\lambda,A)/\varphi(\lambda,B)$ удовлетворяет на симплексе Λ условию Липшица

$$\left|\frac{\varphi(\lambda,A)}{\varphi(\lambda,B)}-\frac{\varphi(\mu,A)}{\varphi(\mu,B)}\right|\le\frac{2\eta}{\gamma}\|\lambda-\mu\|,\quad\lambda,\mu\in\Lambda.$$

Доказательство. Из свойств (5) функции f_λ следует, что в условиях леммы функция φ непрерывна, если непрерывна функция

$$\psi(\lambda,A)=\varphi(\lambda,A)^{-1}=\min_{w\in A}\max_{1\le k\le m}\frac{\lambda_k}{w_k},\quad\lambda\in\Lambda.$$

Для любых $\lambda,\mu\in\Lambda$ оценим сверху разность

$$\psi(\lambda,A)-\psi(\mu,A)\le \max_{w\in A}\left[\max_{1\le k\le m}\frac{\lambda_k}{w_k}-\max_{1\le k\le m}\frac{\mu_k}{w_k}\right]\le \max_{w\in A}\max_{1\le k\le m}\frac{|\lambda_k-\mu_k|}{w_k}\le$$
$$\le \gamma^{-1}\max_{1\le k\le m}|\lambda_k-\mu_k|\le \gamma^{-1}\|\lambda-\mu\|,$$

что и доказывает непрерывность функции ψ, поскольку параметр $\gamma>0$ согласно (5).

Заметим, что дополнительное условие

$$\varphi(\lambda,A)\le\varphi(\lambda,B),\quad \lambda\in\Lambda$$

с учетом определения функции ψ и соотношений (5) влечет неравенства

$$0<\frac{\psi(\lambda,B)}{\psi(\lambda,A)}\le 1\le \eta\psi(\lambda,A),\quad \lambda\in\Lambda.$$

Предположим от противного, что нашлись $\lambda,\mu\in\Lambda$ такие значения, что выполняется неравенство

$$\frac{2\eta}{\gamma}\|\lambda-\mu\|<\frac{\psi(\lambda,B)}{\psi(\lambda,A)}-\frac{\psi(\mu,B)}{\psi(\mu,A)}.$$

Тогда, вводя обозначения

$$\sigma_A=\psi(\lambda,A)-\psi(\mu,A),\quad \sigma_B=\psi(\lambda,B)-\psi(\mu,B),$$

$$\sigma=\frac{\psi(\lambda,B)}{\psi(\lambda,A)}-\frac{\psi(\mu,B)}{\psi(\mu,A)}=\frac{\sigma_B\psi(\mu,A)-\sigma_A\psi(\lambda,B)+\sigma_A\sigma_B}{\psi(\lambda,A)\psi(\mu,A)},$$

с учетом полученных выше неравенств можно утверждать следующее.

1. Если $\sigma_A<0\le\sigma_B$, то выполняются неравенства

$$0<\frac{2\eta}{\gamma}\|\lambda-\mu\|<\sigma\le\frac{\sigma_B\psi(\mu,A)-\sigma_A\psi(\lambda,B)}{\psi(\lambda,A)\psi(\mu,A)}\le$$
$$\le\frac{\sigma_B}{\psi(\lambda,A)}-\frac{\sigma_A}{\psi(\mu,A)}\le\frac{2\eta}{\gamma}\|\lambda-\mu\|,$$

что невозможно.

2. Если $\sigma_A,\sigma_B<0$, то выполняются неравенства

$$0<\frac{2\eta}{\gamma}\|\lambda-\mu\|<\sigma\le\frac{-\sigma_A\psi(\mu,B)}{\psi(\lambda,A)\psi(\mu,A)}\le\frac{-\sigma_A}{\psi(\lambda,A)}\le\frac{\eta}{\gamma}\|\lambda-\mu\|,$$

что невозможно.

3. Если $\sigma_A,\sigma_B\ge 0$, то выполняются неравенства

$$0<\frac{2\eta}{\gamma}\|\lambda-\mu\|<\sigma\le\frac{\sigma_B\psi(\lambda,A)}{\psi(\lambda,A)\psi(\mu,A)}\le\frac{\sigma_B}{\psi(\mu,A)}\le\frac{\eta}{\gamma}\|\lambda-\mu\|,$$

что невозможно.

4. Если $\sigma_A>0\ge\sigma_B$, то выполняются неравенства

$$0<\frac{2\eta}{\gamma}\|\lambda-\mu\|<\sigma<0,$$

что невозможно.

Из противоречия следует, что функция $\varphi(\lambda,A)/\varphi(\lambda,B)$ удовлетворяет на симплексе Λ условию Липшица, где константа Липшица $\Theta=2\eta\gamma^{-1}$. Лемма доказана.

§2. Аппроксимирующие множества и функция сравнения

Формально в качестве аппроксимации множества эффективных векторов $w(X_e)$ можно рассматривать всякое непустое подмножество $W\subset w(X)$, включая само множество достижимых векторов $w(X)$. Вместе с тем интуитивно ясно, что множество $w(X)$, например, никак не может считаться приемлемой аппроксимацией множества эффективных векторов. Чтобы исключить подобные несуразности, можно ограничить число аппроксимаций непустыми подмножествами $W\subset w(X)$, которые при достаточно малом фиксированном значении $\delta\ge 0$ удовлетворяют условиям

$$D\big(W, w(X_0)\big) = \sup_{w\in W} \inf_{u\in w(X_0)} \|w-u\| \le \delta ,$$
$$D\big(w(X_e), W\big) = \sup_{u\in w(X_e)} \inf_{w\in W} \|w-u\| \le \delta . \qquad (11)$$

Согласно первому условию в (11), для любого вектора $w\in W$ можно указать слабо эффективный вектор $u\in w(X_0)$, отстоящий от вектора w не более чем на величину δ. При выполнении второго условия в (11) вблизи любого эффективного вектора $u\in w(X_e)$ можно указать вектор $w\in W$, отстоящий от вектора u не более чем на величину 2δ.

Согласно первому условию в (11), всякое подмножество $W\subset w(X_0)$, включая множество эффективных векторов $w(X_e)$ и само множество слабо эффективных векторов $w(X_0)$, является аппроксимацией при любом $\delta\ge 0$, а множество достижимых векторов $w(X)\ne w(X_0)$ при достаточно малом $\delta>0$ аппроксимацией не является.

Первое условие в (11) определяет весьма обширный класс множеств, так что при любом $\delta\ge 0$ аппроксимацией множества эффективных векторных оценок $w(X_e)$ является множество $\{u^0\}$, состоящее из единственного слабо эффективного вектора $u^0\in w(X_0)$. Все это плохо вяжется с представлением об удовлетворительной аппроксимации множества эффективных векторов $w(X_e)\subset w(X_0)$. Именно такие неприемлемые аппроксимации отсеивает второе условие в (11).

Заметим, что по утверждению (73) теоремы сходимости 4 главы 2, заданные соотношениями (52)–(58), (60), (67), (68) главы 2 множества $W_t = w(X_t)$ при достаточно больших значениях $t\ge 1$ удовлетворяют условиям (11) для любых фиксированных сколь угодно малых значений $\delta>0$.

Условия (11) все же не позволяют реально оценивать качество произвольных аппроксимаций, поскольку при решении содержательных задач многокритериальной оптимизации множества эффективных и слабо эффективных векторов $w(X_e)$, $w(X_0)$ априори неизвестны *). В противном случае незачем искать другие удовлетворительные аппроксимации, поскольку включение $w(X_e)\subset w(X_0)$ влечет утверждение

$$D\big(w(X_e), w(X_0)\big) = D\big(w(X_e), w(X_e)\big) = D\big(w(X_0), w(X_0)\big) = 0,$$

и каждое из множеств $w(X_e)$, $w(X_0)$ в согласии с определением (11) само является «идеальной» ($\delta=0$) аппроксимацией.

Вместе с тем с помощью численных методов оптимизации удается строить лишь конечные аппроксимации

$$W\subset w(X),\quad 1\le |W| <\infty ,$$

– непустые подмножества, состоящие из конечного числа достижимых векторов. Для оценки именно таких аппроксимаций ниже предлагается интегральная функция сравнения, которая, однако, формально применима к всевозможным парам непустых подмножеств $W, U\subset w(X)$, что избавляет от необходимости заранее делить все множество аппроксимаций на «чистых» и «нечистых».

Возьмем за основу заданную в (8) «принципиальную» функцию сравнения

$$\Phi^0(W,U) = \int_\Lambda \left[\frac{\max_{w\in W} f_\lambda(w) - \max_{w\in U} f_\lambda(w)}{\max_{w\in w(X_0)} f_\lambda(w)} \right] d\Lambda .$$

---

* По тем же причинам не удается напрямую использовать заданные соотношениями (7), (8) свертки и «принципиальную» функцию сравнения $\Phi^0(W,U)$.

Заменив в подынтегральном выражении неизвестный коэффициент нормирования

$$\varphi_0(\lambda) = \max_{w \in w(X_0)} f_\lambda(w)$$

коэффициентом

$$\varphi(\lambda, W \cup U) = \max\left\{\max_{w\in W} f_\lambda(w), \max_{w\in U} f_\lambda(w)\right\},$$

зададим с учетом определений (3), (4) интегральную функцию сравнения

$$\Phi(W,U) = \int_\Lambda \left[\frac{\varphi(\lambda,W)-\varphi(\lambda,U)}{\varphi(\lambda,W\cup U)}\right] d\Lambda =$$

$$= \int_\Lambda \left[\frac{\max_{w\in W} f_\lambda(w) - \max_{w\in U} f_\lambda(w)}{\max\left\{\max_{w\in W} f_\lambda(w), \max_{w\in U} f_\lambda(w)\right\}}\right] d\Lambda,\ \varnothing \ne W, U \subset w(X), \quad (12)$$

$$0 \le \left|\Phi(W,U)\right| < V(\Lambda),$$

где $d\Lambda$ – дифференциал $(m-1)$ – мерного объема $V(\Lambda)$ стандартного симплекса $\Lambda \subset \mathbf{R}^m$ из (4).

Подынтегральная функция в (12) определена в каждой точке $\lambda \in \Lambda$ вместе с соответствующими значениями функции максимума $\varphi(\lambda,W) = \max_{w\in W} f_\lambda(w)$, $\varphi(\lambda,U) = \max_{w\in U} f_\lambda(w)$. Тем самым определена и сама модифицированная функция сравнения $\Phi(W, U)$, устанавливающая на множестве подмножеств $\mathsf{W} = 2^{w(X)} \setminus \{\varnothing\}$ множества достижимых векторных оценок $w(X)$ бинарные отношения:

Условие $\Phi^0(W, U) = 0$ порождает отношение эквивалентности ($W \approx U$), условие $\Phi^0(W, U) > 0$ – отношение строгого предпочтения ($W \succ U$), условие $\Phi^0(W, U) \ge 0$ – отношение нестрогого предпочтения ($W \succeq U$).

Из определения (12) следует равенство

$$\Phi(W, U) = -\Phi(U, W), \quad \varnothing \ne W, U \subset w(X),$$

а с учетом следствия из леммы 1 и определения «принципиальной» функции сравнения в (8) справедливо утверждение

$$\Phi(W, U) = \Phi^0(W, U), \quad w(X_e) \subset W \subset w(X),$$

так что значения функций сравнения Φ и Φ^0 совпадают, если хотя бы одна из сравниваемых аппроксимаций содержит множество эффективных векторов $w(X_e)$.

В отличие от «принципиальной» функции сравнения (8), установленные функцией сравнения (12) бинарные отношения, вообще говоря, нетранзитивны. На отсутствие транзитивности указывает, в частности, следующий условный

Пример 1. Пусть множество $\Lambda = [0, 1]$, а для некоторых подмножеств $U_1, U_2, U_3 \subset w(X)$ функция максимума φ принимает значения

$$\varphi(\lambda, U_1) = 2/5, \quad \lambda \in [0, 1]$$

$$\varphi(\lambda,U_2) = \begin{cases} 3/2, & \lambda \in [0, 2/5], \\ 1/5, & \lambda \in (2/5, 1], \end{cases} \qquad \varphi(\lambda,U_3) = \begin{cases} 13/20, & \lambda \in [0, 2/5], \\ 3/10, & \lambda \in (2/5, 1], \end{cases}$$

так что заданная в (12) функция сравнения

$$\Phi(U_a, U_b) = \int_0^1 \left[\frac{\varphi(\lambda,U_a) - \varphi(\lambda,U_b)}{\max_{i=a,b} \varphi(\lambda,U_i)}\right] d\lambda$$

принимает значения

$$\Phi(U_1,U_2) = 1/150, \quad \Phi(U_2,U_3) = 2/75, \quad \Phi(U_1,U_3) = -1/260,$$

что противоречит транзитивности (разрывность ступенчатых функций $\varphi(\lambda,U_2)$, $\varphi(\lambda,U_3)$ несущественна, поскольку их можно с любой необходимой точностью заменить непрерывными кусочно–линейными функциями).

Следующая теорема устанавливает, что функция сравнения $\Phi(W, U)$ задает все же достаточно «разумное» бинарное отношение строгого предпочтения.

Теорема 1. *Пусть на множестве достижимых векторов* $w(X)$ *определены компактные аппроксимирующие множества* $U, W_t \subset w(X)$, $t = 1,2,\dots$, *удовлетворяющие условиям*

$$W_e \not\subset U\,, \quad \lim_{t\to\infty} D(W_e, W_t) = 0\,, \qquad (13)$$

где $W_e = w(X_e)$ *– множество эффективных векторов, величина* D *– отклонение. Тогда найдется номер* $\tau \ge 1$ *такой, что аппроксимация* W_t *предпочтительнее аппроксимации* U *при всех* $t \ge \tau$,

$$W_t \succ U\,, \quad t \ge \tau\,,$$

поскольку заданная в (12) *функция сравнения* Φ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Phi(W_t, U) > 0\,, \quad t \ge \tau\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Согласно следствию из леммы 1, первое условие в (13) влечет соотношения

$$\max_{w\in W_e} f_\lambda(w) = \max_{w\in \overline{W}_e} f_\lambda(w) = \max_{w\in w(X)} f_\lambda(w) \ge \max_{w\in U} f_\lambda(w)\,, \quad \lambda \in \Lambda\,, \qquad (15)$$

причем найдется вектор $u \in w(X_e)\setminus U$, так что ввиду (4)–(6) функция f_λ удовлетворяет в точке $\lambda = u \Big/ \sum_{k=1}^m u_k \in \Lambda$ соотношениям

$$\max_{w\in U} f_\lambda(w) < \max_{w\in W_e} f_\lambda(w) = f_\lambda(u) = \sum_{k=1}^m u_k = \frac{u_k}{\lambda_k}\,, \quad 1 \le k \le m\,, \qquad (16)$$

согласно определению эффективных векторов.

Согласно лемме 3 функция максимума

$$\varphi(\lambda, A) = \max_{w\in A} f_\lambda(w)$$

непрерывна по $\lambda \in \Lambda$, если произвольный фиксированный компакт $A \subset w(X)$, так что из утверждений (15), (16) следует неравенство

$$\max_{w\in U} f_\lambda(w) < \max_{w\in W_e} f_\lambda(w)$$

для всех λ из некоторой окрестности точки $u \Big/ \sum_{k=1}^m u_k \in \Lambda$.

Следовательно, в этой окрестности положительна подынтегральная функция

$$\frac{\max\limits_{w\in W_e} f_\lambda(w) - \max\limits_{w\in U} f_\lambda(w)}{\max\limits_{w\in W_e} f_\lambda(w)} > 0\,,$$

определяющая в (12) функцию сравнения $\Phi(W_e, U)$, а в остальных точках симплекса Λ подынтегральная функция неотрицательна ввиду (15). Но тогда можно указать $\delta > 0$ такое, что выполняется условие

$$\Phi(W_e, U) = 2\delta > 0\,. \qquad (17)$$

Из предельного соотношения в (13) следует, что найдется номер $\tau \ge 1$ такой, что отклонение

$$D(W_e, W_t) \le \frac{\gamma^2}{\eta V(\Lambda)}\delta\,, \quad t \ge \tau\,,$$

где $V(\Lambda)$ – $(m-1)$ – мерный объем стандартного симплекса $\Lambda \subset \mathbf{R}^m$ из (4). Следовательно, согласно лемме 2, разность функций максимума с учетом (15) удовлетворяет условию

$$\varphi(\lambda, W_e) - \varphi(\lambda, W_t) \le \frac{\delta}{V(\Lambda)}\varphi(\lambda, C)\,, \quad \lambda \in \Lambda\,, \quad t \ge \tau\,,$$

для любого компакта $C \subset w(X)$.

Но тогда, согласно (12), (17), функция сравнения

$$\Phi(W_t, U) = \int_\Lambda \left[\frac{\varphi(\lambda, W_t) - \varphi(\lambda, U)}{\varphi(\lambda, W_t \cup U)} \right] d\Lambda \ge$$

$$\ge \int_\Lambda \left[\frac{\varphi(\lambda, W_t) - \varphi(\lambda, W_e)}{\varphi(\lambda, W_t \cup U)} \right] d\Lambda + \int_\Lambda \left[\frac{\varphi(\lambda, W_e) - \varphi(\lambda, U)}{\varphi(\lambda, W_e \cup U)} \right] d\Lambda \ge$$

$$\ge -\delta + \Phi(W_e, U) = \delta > 0,$$

при всех значениях $t \ge \tau$, что и доказывает утверждение (14). Теорема доказана.

Из утверждения теоремы 1 следует, что функция сравнения $\Phi(W, U)$ устанавливает такое отношение строгого предпочтения, что аппроксимирующее множество $W \subset w(X)$, от которого множество эффективных векторных оценок $W_e = w(X_e)$ отклоняется на достаточно малую величину $D(W_e, W)$, оказывается предпочтительнее любых других аппроксимаций $U \ne \varnothing$, $W_e \not\subset U \subset w(X)$. Тем самым определенная в (12) интегральная функция $\Phi(W, U)$ справляется с основной задачей сравнения аппроксимаций, позволяя отличить достаточно «точные» аппроксимации от более «грубых». Это и неудивительно, поскольку, в согласии с доказательством теоремы 1, из-за малости отклонения $D(W_e, W)$ соответствующие значения двух функций сравнения практически совпадают,

$$\Phi(W, U) \cong \Phi^0(W, U),$$

где Φ^0 – введенная в (8) «принципиальная» функция сравнения.

Если сравниваются произвольные аппроксимации, следует иметь в виду, что значение функции сравнения (12) не меняется при одинаковом уменьшении масштаба сравниваемых подмножеств

$$\Phi(W_z, U_z) = \Phi(W, U), \quad \varnothing \ne W, U \subset w(X),$$

$$W_z = \left\{ w \in \mathbf{R}_+^m \,\middle|\, z^{-1} w \in W \right\}, \quad 0 < z < 1,$$

так что при использовании функции (12) результат сравнения аппроксимирующих множеств зависит не от удаленности множества эффективных векторных оценок, не от масштабного коэффициента z, а от взаимного расположения аппроксимаций.

Утверждение теоремы 1 не дает ответа на вопрос, насколько хорошо (или плохо) функция (12) позволяет сравнивать между собой заведомо «плохие», «грубые» аппроксимации, от которых множество эффективных векторов отклоняется значительно. Впрочем, задача сравнения заведомо «грубых» аппроксимаций не слишком интересна. Более интересен ответ на вопрос, можно ли, не имея информации об отклонениях $D(w(X_e), U_i)$, $i = 1, 2$, отбросить вторую из двух аппроксимаций $U_1, U_2 \subset w(X)$, если значение функции сравнения $\Phi(U_1, U_2) > 0$, – не является ли множество U_2 и при этом условии достаточно точной аппроксимацией?

Воспользуемся определением (7) гарантирующей свертки Ψ^1. Произвольное непустое множество $W \subset w(X)$ назовем δ – *равномерной* аппроксимацией, если при некотором фиксированном значении $\delta \in [0,1)$ значение гарантирующей свертки удовлетворяет условию

$$\Psi^1(W) = \min_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \frac{\varphi(\lambda, W)}{\varphi(\lambda, w(X_0))} \right\} = 1 - \delta,$$

так что при любых $\lambda \in \Lambda$ отношение соответствующих значений функций максимума (4) отклоняется от 1 не более чем на величину δ.

Поскольку по лемме 3 функция $\varphi(\lambda,W)/\varphi(\lambda,w(X_0))$ удовлетворяет условию Липшица, при любом допустимом значении $\delta \neq 0$ справедливо утверждение

$$\Phi(w(X_0),W)=\Phi^0(w(X_0),W)>0$$

в согласии с определениями (7), (12), и δ – *равномерная* аппроксимация $W \subset w(X)$ при любом $\delta \neq 0$ не является точкой. Более того, из двух аппроксимаций

$$U_1,U_2 \subset w(X), \quad \Phi(U_1,U_2)>0,$$

аппроксимация U_2 при любом фиксированном значении

$$\delta \in \left[0, \frac{\Phi(U_1,U_2)}{V(\Lambda)+\Phi(U_1,U_2)}\right)$$

где $V(\Lambda)=\dfrac{\sqrt{m}}{(m-1)!}$ – объем стандартного симплекса $\Lambda \subset \mathbf{R}^m$ из (4), не является δ – *равномерной* аппроксимацией, поскольку в противном случае

$$\Phi(U_1,U_2)=\int_\Lambda \left[\frac{\varphi(\lambda,U_1)-\varphi(\lambda,U_2)}{\max\limits_{i=1,2}\varphi(\lambda,U_i)}\right]d\Lambda \le \frac{1}{1-\delta}\Phi(w(X_0),U_2)=$$

$$=\frac{1}{1-\delta}\int_\Lambda \left[1-\frac{\varphi(\lambda,U_2)}{\varphi(\lambda,w(X_0))}\right]d\Lambda \le \frac{V(\Lambda)}{\delta^{-1}-1}<\Phi(U_1,U_2),$$

что невозможно. Следовательно, множество U_2 может быть δ – *равномерной* аппроксимацией лишь при условии

$$\frac{\Phi(U_1,U_2)}{V(\Lambda)+\Phi(U_1,U_2)} \le \delta < 1,$$

и в согласии с определением (12), чем больше положительная величина

$$\Phi(U_1,U_2) \in (0, V(\Lambda))$$

тем «грубее» аппроксимация U_2. Следовательно, аппроксимация U_2 заведомо не слишком хороша, когда можно указать аппроксимацию U_1, превосходящую ее ($U_1 \succ U_2$) по величине функции сравнения $\Phi(U_1,U_2)>0$.

Если, в согласии с условием (13) теоремы 1, последовательность аппроксимаций $W_t \subset w(X)$, $t=1,2,\ldots$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty} D(w(X_e),W_t)=0,$$

то для нее можно сформулировать следующий эвристический критерий остановки, соответствующий упомянутому выше (§1, п.3) критерию остановки при вычислении экстремума скалярной функции.

Критерий остановки процесса вычислений:

Если функция сравнения удовлетворяет условию

$$0 \le \Phi(W_t, W_{t-1}) \le \delta$$

где $\delta > 0$ – достаточно малое наперед заданное число, то аппроксимацию W_t предлагается считать удовлетворительным приближенным решением задачи многокритериальной оптимизации.

Заметим, что согласно утверждению (73) теоремы 4 главы 2, заданные соотношениями (52)–(58), (60), (67), (68) главы 2 аппроксимирующие множества $W_t = w(X_t)$ удовлетворяют второму из условий (13) теоремы 1, и, следовательно, при достаточно больших значениях t превосходят по величине функции сравнения (12) любую аппроксимацию, не содержащую множества эффективных векторов. К ним так же может быть применен сформулированный выше критерий остановки процесса вычислений.

§3. Приближенная оценка функции сравнения

В каждой точке стандартного симплекса $\Lambda \subset \mathbf{R}^m$ вычисление подынтегрального выражения (12) требует, согласно определению (4), вычисления отношений соответствующих максиминов. Тем самым для любых двух аппроксимаций $W, U \subset w(X)$ значение заданной в (12) функции сравнения $\Phi(W, U)$ предстоит искать путем численного интегрирования по $(m-1)$ – мерному объему стандартного симплекса

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1\,, \quad \lambda \geq 0 \right\},$$

вложенного $(\Lambda \subset E)$ в m – мерный единичный куб

$$E = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, 0 \leq \lambda \leq \sum_{k=1}^{m} e^k \right\}, \tag{18}$$

где e^k – единичные орты в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^m$.

В этой связи рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^m$ разбиение единичного куба E на p^m кубических ячеек $E(q)$ со стороной $1/p$:

$$E = \bigcup_{\sum_{k=1}^{m} e^k \leq q \leq p \sum_{k=1}^{m} e^k} E(q)\,,$$

$$E(q) = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, q - \sum_{k=1}^{m} e^k \leq p\lambda \leq q \right\},\ \sum_{k=1}^{m} e^k \leq q \leq p \sum_{k=1}^{m} e^k, \tag{19}$$

где $q \in \mathbf{R}^m$ – вектор с натуральными компонентами, не превосходящими любое фиксированное натуральное число p.

Лемма 4. *Пересечение* P_r *гиперплоскости* $H_r = H_r^{\varnothing}$, *где*

$$H_r^J = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = r\,, \lambda_k = 0\,, k \in J \right\},\ 1 \leq r \leq m-1,\ J \subset I, \tag{20}$$

$$I = \{ k \,|\, 1 \leq k \leq m \},$$

и единичного куба E *из* (18),

$$P_r = H_r \cap E = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = r\,, 0 \leq \lambda \leq \sum_{k=1}^{m} e^k \right\}, \tag{21}$$

$$1 \leq r \leq m-1\,,$$

при условии $m > 1$, $i \in I$ *удовлетворяет соотношениям*

$$P_1 = \operatorname{conv}\{H_1^i \cap E\}_{i=1}^{m} = \Lambda\,,$$

$$P_{m-1} = \sum_{k=1}^{m} e^k - \operatorname{conv}\{H_1^i \cap E\}_{i=1}^{m} = \sum_{k=1}^{m} e^k - \Lambda\,, \tag{22}$$

$$P_r = \operatorname{conv}\left\{ \{H_r^i \cap E\}_{i=1}^{m},\ \sum_{k=1}^{m} e^k - \{H_{m-r}^i \cap E\}_{i=1}^{m} \right\},$$

$$2 \leq r \leq m-2\,,$$

$(m-1)$ – *мерные объемы* V *множеств в* (22) *подчиняются соотношениям*

$$V(P_1) = V(P_{m-1}) = V(\Lambda) = \frac{\sqrt{m}}{(m-1)!}\,,$$

$$V(P_r) = Z_r^m V(\Lambda)\,, \quad 2 \leq r \leq m-2\,, \tag{23}$$

причем коэффициенты

$$Z_1^m = Z_{m-1}^m = 1\,, \quad Z_r^m = rZ_r^{m-1} + (m-r)Z_{r-1}^{m-1}\,, \quad 2 \leq r \leq m-2\,,$$

$$Z_r^m = \sum_{p=1}^{r} (-1)^{r-p} p^{m-1} C_m^{r-p}\,, \quad C_m^r = \frac{m!}{r!(m-r)!}\,, \quad 1 \leq r \leq m-1\,, \tag{24}$$

расположенные треугольником

$$
\begin{array}{c}
Z_1^2 \\
Z_1^3 \quad Z_2^3 \\
Z_1^4 \quad Z_2^4 \quad Z_3^4 \\
Z_1^5 \quad Z_2^5 \quad Z_3^5 \quad Z_4^5 \\
Z_1^6 \quad Z_2^6 \quad Z_3^6 \quad Z_4^6 \quad Z_5^6 \\
Z_1^7 \quad Z_2^7 \quad Z_3^7 \quad Z_4^7 \quad Z_5^7 \quad Z_6^7 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

принимают следующие значения:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 11 \quad 11 \quad 1 \\
1 \quad 26 \quad 66 \quad 26 \quad 1 \\
1 \quad 57 \quad 302 \quad 302 \quad 57 \quad 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

где $\mathrm{conv}A$ *– выпуклая оболочка множества* $A \subset \mathbf{R}^m$ *,* $A+B$ *– векторная сумма множеств* $A, B \subset \mathbf{R}^m$ *,* C_m^r *– биномиальные коэффициенты, стандартный симплекс* $\Lambda \subset \mathbf{R}^m$ *задан соотношениями* (4).

Доказательство. Утверждение (22) при условиях $r=1$, $r=m-1$ следует из определений множеств Λ, E, H в (4), (18), (20).

Докажем утверждение (22) при условиях $2 \le r \le m-2$. Всякий фиксированный вектор $\lambda \in P_r$ либо удовлетворяет соотношениям

$$\lambda = \frac{r}{m}\sum_{k=1}^{m} e^k = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{r}{m-1}\sum_{k\in I\setminus\{i\}} e^k \in \mathrm{conv}\left\{H_r^i \cap E\right\}_{i=1}^m ,$$

где включение следует из определений множеств E, H в (18), (20), либо этот вектор можно представить в виде выпуклой комбинации векторов γ^+, γ^- :

$$\lambda = (1-\lambda_i)\gamma^+ + \lambda_i\gamma^-, \quad \lambda_i = \min_{1\le k\le m}\lambda_k < \frac{r}{m} ,$$

$$\gamma^+ = \frac{r}{m}\sum_{k=1}^{m} e^k + \frac{r}{r-m\lambda_i}\left(\lambda - \frac{r}{m}\sum_{k=1}^{m} e^k\right) \in H_r^i \cap E ,$$

$$\gamma^- = \frac{r}{m}\sum_{k=1}^{m} e^k - \frac{m-r}{r-m\lambda_i}\left(\lambda - \frac{r}{m}\sum_{k=1}^{m} e^k\right) \in \sum_{k=1}^{m} e^k - H_{m-r}^i \cap E ,$$

где включения следуют из определений множеств E, H в (18), (20). Тем самым доказано, что всякий вектор $\lambda \in P_r$ удовлетворяет включению

$$\lambda \in \mathrm{conv}\left\{ \left\{H_r^i \cap E\right\}_{i=1}^m ,\quad \sum_{k=1}^{m} e^k - \left\{H_{m-r}^i \cap E\right\}_{i=1}^m \right\},$$

что и доказывает представление множества P_r из (21) в виде выпуклой оболочки из (22), поскольку из определений (18), (20), (21) следуют также включения

$$H_r^i \cap E \subset P_r , \quad \sum_{k=1}^{m} e^k - H_{m-r}^i \cap E \subset P_r ,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le r \le m-1 .$$

Остается вычислить объемы V и коэффициенты Z в соотношениях (23), (24). Поскольку из определения стандартного симплекса в (4) следуют равенства

$$\frac{1}{m!} = V\left(\mathrm{conv}\{0, \Lambda\}\right) = \frac{1}{m}\frac{1}{\sqrt{m}}V(\Lambda),$$

объем стандартного симплекса $V(\Lambda) = \dfrac{\sqrt{m}}{(m-1)!}$, что с учетом (22) доказывает утверждение (23) при условиях $r=1$, $r=m-1$. При условиях $2 \le r \le m-2$ из утверждения (22) следует равенство

$$P_r = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \cup B_i ,$$

$$A_i = \mathrm{conv}\left\{ \frac{r}{m}\sum_{k=1}^{m} e^k ,\, H_r^i \cap E \right\},$$

$$B_i = \sum_{k=1}^{\mathrm{m}} e^k - \mathrm{conv}\left\{ \frac{m-r}{m}\sum_{k=1}^{m} e^k ,\, H_{m-r}^i \cap E \right\},$$

что позволяет выразить $(m-1)$ – мерный объем выпуклого многогранника $P_r = H_r \cap E$ через $(m-2)$ – мерные объемы его граней $H_r^i \cap E$, $\sum_{k=1}^{m} e^k - H_{m-r}^i \cap E$, $1 \le i \le m$:

$$V(P_r) = \frac{m}{m-1}\left[h^r V\left(H_r^1 \cap E\right) + h^{m-r} V\left(H_{m-r}^1 \cap E\right)\right],$$

$$h^r = \left\| \frac{r}{m-1}\sum_{k=2}^{m} e^k - \frac{r}{m}\sum_{k=1}^{m} e^k \right\| = \frac{r}{\sqrt{m(m-1)}},$$

где h^r – высота точки $\frac{r}{m}\sum_{k=1}^{m} e^k$ над гранью $H_r^1 \cap E$. Учитывая объем стандартного симплекса $V(\Lambda) = \frac{\sqrt{m}}{(m-1)!}$, из определения коэффициентов Z_r^m в (23) и последних соотношений получаем равенства

$$Z_r^m \frac{\sqrt{m}}{(m-1)!} = V(P_r) =$$

$$= \frac{\sqrt{m}}{(m-1)\sqrt{m-1}}\left[r Z_r^{m-1}\frac{\sqrt{m-1}}{(m-2)!} + (m-r) Z_{m-r}^{m-1}\frac{\sqrt{m-1}}{(m-2)!}\right]$$

и, следовательно, выполняются рекуррентные соотношения

$$Z_r^m = r Z_r^{m-1} + (m-r) Z_{m-r}^{m-1}, \quad 2 \le r \le m-2, \quad m = 2,3,\ldots.$$

что и доказывает рекуррентные соотношения в (24), поскольку, согласно (22), из определения коэффициентов Z_r^m в (23) следуют соотношения

$$V(P_r) = V(P_{m-r}), \quad Z_r^m = Z_{m-r}^m, \quad 1 \le r \le m-1, \quad m = 2,3,\ldots\ldots$$

Из рекуррентных соотношений (24) следуют численные значения коэффициентов Z_r^m, приведенные в формулировке леммы; из тех же соотношений в (24) по индукции следует представление коэффициентов Z_r^m в виде функции параметров m, r. Лемма доказана.

Ю.А. Флеров (ВЦ РАН) обратил внимание автора на то, что коэффициенты Z_r^m совпадают с *числами Эйлера* – коэффициентами $A(m-1,r)$ в *многочленах Эйлера* (см. [19]).

Разбиение (19) единичного куба $E \subset \mathbf{R}^m$ порождает разбиение стандартного симплекса $\Lambda \subset E \subset \mathbf{R}^m$ из (4), причем с учетом леммы 4 справедлива

Лемма 5. *Стандартный* $(m-1)$ – мерный *симплекс*

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1, \quad \lambda \ge 0 \right\},$$

при $m > 1$ *и любом фиксированном натуральном* p *совпадает с объединением*

$$\Lambda = \bigcup_{q \in Q} \Lambda(q),$$

$$Q = Q(p,m) = \left\{ q \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m} e^k \le q, \quad 1 \le \sum_{k=1}^{m} q_k - p \le m-1 \right\} \qquad (25)$$

где для всякого вектора $q \in Q$, *имеющего натуральные компоненты, соответствующие ячейки (выпуклые многогранники* $\Lambda(q)$*), их барицентры* $\lambda(q)$ *и объемы* $V(\Lambda(q))$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\Lambda(q)=\Lambda\cap E(q)=\lambda(q)+\frac{1}{p}\Omega(q), \quad r=\sum_{k=1}^{m}q_k-p,$$

$$\lambda(q)=\frac{1}{p}\left(q-\frac{r}{m}\sum_{k=1}^{m}e^k\right)\in\Lambda(q), \tag{26}$$

$$\Omega(q)=\left\{\lambda\in\mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m}\lambda_k=0, \quad \frac{r-m}{m}\sum_{k=1}^{m}e^k\le\lambda\le\frac{r}{m}\sum_{k=1}^{m}e^k\right\},$$

$$V(\Lambda(q))=p^{1-m}Z_r^mV(\Lambda), \quad p^{m-1}=\sum_{q\in Q}Z_r^m, \quad \max_{\lambda,\,\mu\in\Omega(q)}\|\lambda-\mu\|\le\sqrt{m},$$

кубические ячейки $E(q)$ *определены в* (19), *коэффициенты* Z_r^m *– в* (24), $V(A)$ *– объем многогранника* $A\subset\mathbf{R}^m$.

Доказательство. Предположим от противного, что

$$\Lambda\not\subset\bigcup_{q\in Q}E(q).$$

Тогда, согласно включению $\Lambda\subset E$, из разбиения (19) следует, что существует вектор $\lambda\in\mathbf{R}^m$ и вектор с натуральными компонентами $h\in\mathbf{R}^m$, удовлетворяющие условиям

$$\lambda\in\Lambda\cap E(h), \quad \lambda\notin\bigcup_{q\in Q}E(q), \quad \sum_{k=1}^{m}e^k\le h\le p\sum_{k=1}^{m}e^k, \quad h\notin Q,$$

что, по определению множества Q в (25), влечет выполнение одного из двух условий:

а) $\sum_{k=1}^{m}h_k\le p$, б) $\sum_{k=1}^{m}h_k\ge p+m$.

В случае а) включение $\lambda\in\Lambda\cap E(h)$, по определению множеств Λ, $E(\cdot)$ в (4), (19), влечет равенства

$$\sum_{k=1}^{m}h_k=p, \quad \lambda=\frac{h}{p},$$

что, по определению множеств $E(\cdot)$ в (19), влечет утверждение

$$\lambda\in E(q), \quad q=h+e^1\in Q,$$

а это противоречит утверждению

$$\lambda\notin\bigcup_{q\in Q}E(q). \tag{27}$$

В случае б) включение $\lambda\in\Lambda\cap E(h)$, по определению множеств Λ, $E(\cdot)$ в (4), (19), влечет равенства

$$\sum_{k=1}^{m}h_k=p+m, \quad \lambda=\frac{1}{p}\left(h-\sum_{k=1}^{m}e^k\right),$$

что, по определению множеств $E(\cdot)$ в (19), влечет утверждение

$$\lambda\in E(q), \quad q=h-e^1\in Q,$$

а это также противоречит утверждению (27). Полученное противоречие доказывает включение

$$\Lambda\subset\bigcup_{q\in Q}E(q),$$

так что справедливо утверждение

$$\Lambda=\bigcup_{q\in Q}(\Lambda\cap E(q));$$

но поскольку, в согласии с определениями множеств Λ, $E(\cdot)$, Q в (4), (19), (25), вектор

$$\lambda(q)=\frac{1}{p}\left(q-\frac{r}{m}\sum_{k=1}^{m}e^k\right)\in\Lambda\cap E(q), \quad q\in Q,$$

где $r=\sum_{k=1}^{m}q_k-p$, а пересечение

$$\Lambda\cap E(q)=\lambda(q)+\frac{1}{p}\Omega(q),$$

$$\Omega(q)=\left\{\lambda\in\mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m}\lambda_k=0, \quad \frac{r-m}{m}\sum_{k=1}^{m}e^k\le\lambda\le\frac{r}{m}\sum_{k=1}^{m}e^k\right\}, \quad q\in Q,$$

в утверждениях (25), (26) остается вычислить объем каждого из многогранников $\Omega(q)$, оценить их диаметры и просуммировать коэффициенты Z.

Заметим, что из определений многогранников P_r, $\Omega(q)$ в (21), (26) следует равенство

$$\Omega(q) = \frac{r-m}{m}\sum_{k=1}^{m} e^k + P_{m-r},$$

что по лемме 4 влечет равенство $V(\Omega(q)) = Z_r^m V(\Lambda)$, что и доказывает в (26) утверждение

$$V(\Lambda(q)) = p^{1-m} Z_r^m V(\Lambda).$$

Из последнего равенства, с учетом (25), следует последнее равенство в (26):

$$p^{m-1} = \sum_{q\in Q} Z_r^m,$$

а, с учетом (18), можно утверждать, что

$$\Omega(q) \subset \frac{r-m}{m}\sum_{k=1}^{m} e^k + E,$$

и, следовательно, диаметр множества $\Omega(q)$ не превосходит диаметр единичного куба $E \subset \mathbf{R}^m$:

$$\max_{\lambda,\,\mu\in\Omega(q)} \|\lambda-\mu\| \le \sqrt{m}.$$

Лемма доказана.

В согласии с утверждениями лемм 4, 5, разбиение (19) единичного куба $E \subset \mathbf{R}^m$ на p^m кубических ячеек равного объема порождает разбиение (25), (26) стандартного симплекса $\Lambda \subset E \subset \mathbf{R}^m$ на части равного объема лишь при размерности пространства $m \le 3$. Уже при $m = 4$, $p = 2$ стандартный симплекс Λ (правильный тетраэдр объемом 1/3) разбивается на 4 правильных тетраэдра

$$\Lambda\left(e^i + \sum_{k=1}^{4} e^k\right), \quad 1 \le i \le 4,$$

каждый объемом 1/24, и один правильный октаэдр $\Lambda\left(\sum_{k=1}^{4} e^k\right)$ объемом 1/6.

При любых фиксированных значениях $p \ge 1$, $m > 1$ можно вычислить число ячеек $\Lambda(q)$, $q \in Q$ в разбиении стандартного симплекса (25).

Лемма 6. *Число ячеек* $\Lambda(q)$ *в разбиении* $\Lambda = \bigcup_{q\in Q}\Lambda(q)$ *стандартного симплекса* (25) *совпадает с числом элементов множества векторов с натуральными компонентами*

$$Q = Q(p,m) = \left\{ q \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m} e^k \le q, \quad 1 \le \sum_{k=1}^{m} q_k - p \le m-1 \right\}$$

и определяется величиной

$$|Q(p,m)| = C_{p+m-1}^m - C_p^m,$$

где число сочетаний $C_p^m = 0$, $p < m$.

Доказательство. Множество $Q = Q(p,m)$ можно представить в виде объединения непересекающихся подмножеств Q_r:

$$Q = \bigcup_{r=\max\{1,\,m-p\}}^{m-1} Q_r,$$

$$Q_r = \left\{ q \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m} e^k \le q, \quad \sum_{k=1}^{m} q_k = p + r \right\}, \quad \max\{1, m-p\} \le r \le m-1,$$

причем число элементов $|Q_r|$ есть число размещений $p + r - m$ одинаковых шаров по m ящикам:

$$|Q_r| = C_{p+r-1}^{m-1}, \quad \max\{1, m-p\} \le r \le m-1;$$

суммируя по r обе части этого равенства, получаем соотношение

$$|Q| = \sum_{r=\max\{1,\, m-p\}}^{m-1} |Q_r| = \sum_{r=\max\{1,\, m-p\}}^{m-1} C_{p+r-1}^{m-1} =$$

$$= \sum_{s=\max\{0,\, p+1-m\}}^{p-1} C_{s+m-1}^{m-1} = C_{p+m-1}^{m} - C_p^m ,$$

так как по известной формуле

$$\sum_{s=0}^{p-1} C_{s+m-1}^{m-1} = C_{p+m-1}^{m} , \quad \sum_{s=0}^{p-m} C_{s+m-1}^{m-1} = C_p^m .$$

Лемма доказана.

Для всякой ячейки из разбиения $(m-1)$ – мерного стандартного симплекса $\Lambda \subset \mathbf{R}^m$ в (25) соседней естественно называть ячейку, с которой имеется общая грань размерности $m-2$. Этому требованию соответствует

Определение 2. Для произвольной фиксированной ячейки $\Lambda(h)$, $h \in Q$ из разбиения симплекса (25) *соседними* называются ячейки множества

$$\{\Lambda(q)\}_{q \in N_h} ,$$

$$N_h = \left\{ q \in Q \left| \sum_{k=1}^{m} |q_k - h_k| = 1 \right. \right\} = \left\{ q \in Q \,\middle|\, q = h \pm e^i ,\ 1 \le i \le m \right\}. \tag{28}$$

Лемма 7. *Дискретное множество барицентров ячеек разбиения* (25)

$$\{\lambda(q)\}_{q \in Q} = \left\{ \frac{1}{p} \left(q - \frac{\sum_{k=1}^{m} q_k - p}{m} \sum_{k=1}^{m} e^k \right) \right\}_{q \in Q} \subset \Lambda , \tag{29}$$

при $m > 2$ *образует «* p^{-1} *– сеть» на стандартном симплексе* $\Lambda \subset \mathbf{R}^m$ *, покрывая стандартный симплекс равномерно, поскольку расстояния между барицентрами* $\lambda(h)$, $\lambda(q)$ *соседних ячеек равны:*

$$\left\| \lambda(h) - \lambda(q) \right\| = \frac{1}{p} \sqrt{\frac{m-1}{m}} < \frac{1}{p} , \quad h \in Q , \quad q \in N_h ,$$

где множества Q, N_h *определены в* (25), (28), *а минимальное расстояние от любой вершины* e^i *стандартного симплекса* Λ *до точек «* p^{-1} *– сети» равно расстоянию между соседними точками сети.*

Доказательство. В согласии с (25), (28), (29), при условии $m > 2$ выполняются соотношения:

$$\left\| \lambda(h) - \lambda\left(h \pm e^i\right) \right\| = \frac{1}{pm} \left\| \left(\mp m e^i \pm \sum_{k=1}^{m} e^k \right) \right\| = \frac{1}{p} \sqrt{\frac{m-1}{m}} ,$$

$$h \in Q , \quad 1 \le i \le m ,$$

что и обеспечивает равенство расстояний между барицентрами соседних ячеек (точками « p^{-1} – сети»). Произвольная же вершина e^i , $1 \le i \le m$ удалена от заданных в (29) точек « p^{-1} – сети» на то же самое расстояние:

$$\min_{q \in Q} \left\| e^i - \lambda(q) \right\| = \left\| e^i - \lambda\left(\sum_{k \ne i} e^k + p e^i \right) \right\| = \frac{1}{pm} \left\| (m-1) e^i - \sum_{k \ne i} e^k \right\| =$$

$$= \frac{1}{p} \sqrt{\frac{m-1}{m}} .$$

Лемма доказана.

Из утверждений леммы 7 следует, что хотя объемы ячеек в разбиении стандартного симплекса (25) могут сильно отличаться друг от друга (в согласии с утверждением леммы 5), барицентры этих ячеек образуют на стандартном симплексе равномерную « p^{-1} – сеть» (29). Этот результат совместно с результатами лемм 4–6 может быть использован для приближенных вычислений интегральной функции сравнения.

Для произвольных аппроксимаций $W, U \subset w(X)$ назовем p – приближением функции сравнения $\Phi(W,U)$, заданной в (12), следующую функцию:

$$\Phi_p(W,U) = \frac{V(\Lambda)}{p^{m-1}} \sum_{q \in Q} \left[\frac{\max\limits_{w \in W} f_{\lambda(q)}(w) - \max\limits_{w \in U} f_{\lambda(q)}(w)}{\max\left\{ \max\limits_{w \in W} f_{\lambda(q)}(w), \max\limits_{w \in U} f_{\lambda(q)}(w) \right\}} Z_r^m \right],$$

$$Q = \left\{ q \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m} e^k \le q\,, \quad 1 \le \sum_{k=1}^{m} q_k - p \le m-1 \right\}, \qquad (30)$$

$$V(\Lambda) = \frac{\sqrt{m}}{(m-1)!}, \quad r = \sum_{k=1}^{m} q_k - p\,, \quad p = 1, 2, \ldots$$

где множество достижимых векторных оценок $w(X)$ задано в (1), функция минимума f_λ – в (4), коэффициенты Z_r^m – в (24), векторы $\lambda(q)$ – в (26), $V(\Lambda)$ – объем $(m-1)$ – мерного стандартного симплекса $\Lambda \subset \mathbf{R}^m$.

Согласно определению (30), p – приближение $\Phi_p(W, U)$ является квадратурной формулой (квадратурой) для приближенного вычисления интеграла по объему функции многих переменных (12). Существует множество квадратурных формул численного интегрирования, отличающихся выбором узлов и промежутков (в нашем случае это барицентры ячеек разбиения (25), $\lambda(q) \in \Lambda(q)$, и объемы ячеек $V(\Lambda(q))$ соответственно). Не затрагивая проблемы построения оптимальных квадратур [20], отметим, что выбранная квадратурная формула $\Phi_p(W, U)$ при достаточно большом значении параметра p позволяет «различить» по качеству любые две конечные аппроксимации $W, U \in w(X)$, если точное значение функции

сравнения отлично от нуля, $\Phi(W, U) \ne 0$. Об этом свидетельствует следующая

Теорема 2. *Значение заданной в* (12) *функции сравнения* Φ *в пределе совпадает с ее* p *– приближением* Φ_p *в* (30):

$$\lim_{p \to \infty} \Phi_p(W, U) = \Phi(W, U) \qquad \varnothing \ne W, U \subset w(X).$$

Если для аппроксимаций $W, U \subset w(X)$ *можно указать натуральное число* p *такое, что* p *– приближение* Φ_p *удовлетворяет соотношениям*

$$\Phi_p(W, U) \ge \frac{4\eta m}{p\gamma(m-1)!},$$

$$0 < \gamma = \min_{w \in w(X)} \min_{1 \le k \le m} w_k\,, \quad 0 < \eta = \max_{w \in w(X)} \sum_{k=1}^{m} w_k\,,$$

то соответствующее значение функции сравнения положительно, $\Phi(W, U) > 0$ *и, следовательно, аппроксимация* W *предпочтительнее аппроксимации* U ($W \succ U$).

Доказательство. Из утверждения леммы 3 следует, что подынтегральная функция в (12) удовлетворяет на стандартном симплексе $\Lambda \subset \mathbf{R}^m$ условию Липшица с константой $4\eta\gamma^{-1}$. Исходя из утверждений лемм 3, 5 и определений функций Φ, Φ_p в (12), (30), объемов

$$V(\Lambda) = \frac{\sqrt{m}}{(m-1)!}, \quad V(\Lambda(q)) = p^{1-m} Z_r^m V(\Lambda), \quad V(\Omega(q)) = Z_r^m V(\Lambda),$$

в (23), (26), оценим величину модуля разности

$$\left|\Phi(W,U)-\Phi_p(W,U)\right| \le$$

$$\le \sum_{q\in Q}\int_{\Lambda(q)}\left|\frac{\varphi(\lambda,W)-\varphi(\lambda,U)}{\varphi(\lambda,W\cup U)}-\frac{\varphi(\lambda(q),W)-\varphi(\lambda(q),U)}{\varphi(\lambda(q),W\cup U)}\right|d\Lambda(q)\le$$

$$\le \frac{4\eta}{\gamma}\sum_{q\in Q}\int_{\Lambda(q)}\left\|\lambda-\lambda(q)\right\|d\Lambda(q)=\frac{4\eta}{p^m\gamma}\sum_{q\in Q}\int_{\Omega(q)}\left\|\lambda\right\|d\Omega(q)<$$

$$<\frac{4\eta\sqrt{m}}{p^m\gamma(m-1)!}\max_{\lambda,\mu\in\Omega(q)}\left\|\lambda-\mu\right\|\sum_{q\in Q}Z_r^m\le\frac{4\eta m}{p\gamma(m-1)!},$$

так как, в согласии с (26), относительная внутренность множества $\Omega(q)$ содержит начало координат, $0\in \mathrm{ri}\,\Omega(q)$, и справедливы соотношения

$$p^{m-1}=\sum_{q\in Q}Z_r^m, \quad \max_{\lambda,\,\mu\in\Omega(q)}\left\|\lambda-\mu\right\|\le\sqrt{m}.$$

Следовательно, выполняются строгие неравенства

$$\left|\Phi(W,U)-\Phi_p(W,U)\right|<\frac{4\eta m}{p\gamma(m-1)!}, \quad p=1,2,\ldots$$

что и доказывает оба утверждения теоремы. Теорема доказана.

В согласии с определением (30), вычисление p – приближения $\Phi_p(W,U)$ функции сравнения $\Phi(W,U)$ требует вычисления величин

$$f_{\lambda(q)}(w)=\min_{1\le k\le m}\frac{w_k}{\lambda_k(q)}, \quad w\in W\cup U, \quad q\in Q.$$

Это решаемая задача, поскольку множество $Q=Q(p,m)$ содержит по лемме 6 конечное количество $|Q|=C_{p+m-1}^m-C_p^m$ целочисленных векторов, а полученные конструктивными методами аппроксимирующие множества $W,U\subset w(X)$ состоят из конечного (обычно не слишком большого) числа достижимых векторов.

§4. Аппроксимирующие множества и функция полезности

Нетранзитивность бинарных отношений, порождаемых заданной в (12) функцией сравнения

$$\Phi(U_a,U_b)=\int_\Lambda\left[\frac{\max\limits_{w\in U_a}f_\lambda(w)-\max\limits_{w\in U_b}f_\lambda(w)}{\max\limits_{i=a,b}\max\limits_{w\in U_i}f_\lambda(w)}\right]d\Lambda, \quad \varnothing\ne U_a,U_b\subset w(X),$$

может вызвать затруднения, если требуется оценить качество более чем двух аппроксимирующих множеств

$$U_i\subset w(X), \quad i=1,2,\ldots,C,$$

из множества достижимых векторных оценок $w(X)$, а информация об отклонениях искомого множества эффективных векторных оценок $w(X_e)$ от аппроксимаций недоступна. В этом случае проверить выполнение условий теоремы 1 не представляется возможным, а аппроксимации могут оказаться несравнимыми из-за отсутствия транзитивности.

Напомним, что согласно определению (7), «принципиальная» функция сравнения

$$\Phi^0(U_a,U_b)=\int_\Lambda\left[\frac{\max\limits_{w\in U_a}f_\lambda(w)-\max\limits_{w\in U_b}f_\lambda(w)}{\max\limits_{w\in w(X_0)}f_\lambda(w)}\right]d\Lambda, \quad \varnothing\ne U_a,U_b\subset w(X),$$

устанавливает транзитивные бинарные отношения предпочтения и эквивалентности, а функция сравнения $\Phi(U_a,U_b)$ является ее конструктивной модификацией, поскольку получена заменой в подынтегральной функции неопределенного коэффициента нормирования

$$\varphi_0(\lambda)=\max_{w\in w(X_0)}f_\lambda(w), \quad \lambda\in\Lambda$$

определенным коэффициентом

$$\varphi(\lambda) = \max_{i=a,b} \max_{w \in U_i} f_\lambda(w), \quad \lambda \in \Lambda .$$

Другая возможная конструктивная модификация связана с использованием коэффициента нормирования

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \max_{1 \le i \le C} \max_{w \in U_i} f_\lambda(w), \quad \lambda \in \Lambda ,$$

причем полученная функция сравнения

$$\tilde{\Phi}(U_a, U_b) = \int_\Lambda \left[\frac{\max_{w \in U_a} f_\lambda(w) - \max_{w \in U_b} f_\lambda(w)}{\max_{1 \le i \le C} \max_{w \in U_i} f_\lambda(w)} \right] d\Lambda, \quad 1 \le a, b \le C ,$$

задает на фиксированном множестве аппроксимаций $\{U_i\}_{i=1}^C$ транзитивные бинарные отношения в согласии с формулой

$$\tilde{\Phi}(U_a, U_c) = \tilde{\Phi}(U_a, U_b) + \tilde{\Phi}(U_b, U_c), \quad 1 \le a, b, c \le C .$$

Однако такой подход нельзя признать достаточно гибким, если множество аппроксимаций $\{U_i\}_{i=1}^C$ заранее неизвестно, либо может быть пополнено новыми аппроксимациями в ходе исследования; в этом случае на расширенном множестве аппроксимаций функция сравнения $\tilde{\Phi}$ также может порождать нетранзитивные бинарные отношения.

В качестве коэффициента нормирования, пригодного для любых пар аппроксимаций $W, U \subset w(X)$, рассмотрим величину

$$\varphi_*(\lambda) = f_\lambda(w^*) = \min_{1 \le k \le m,\, \lambda_k > 0} \frac{w_k^*}{\lambda_k}, \; \lambda \in \Lambda, \quad w^* = \sum_{k=1}^m \left(\max_{w \in w(X)} w_k \right) e^k, \tag{31}$$

где все компоненты $w_k^* = \max_{w \in w(X)} w_k$, $1 \le k \le m$ вектора w^* достигают значений, «рекордных» на множестве достижимых векторных оценок $w(X)$. Как правило, вектор $w^* \notin w(X)$, т.е. не является достижимой векторной оценкой (в противном слу-

чае, согласно определению 1 главы 1, множество эффективных векторных оценок $w(X_e) = \{w^*\}$, и задача многокритериальной оптимизации является вырожденной).

Следует отметить, что вычисление вектора рекордных характеристик

$$w^* = \sum_{k=1}^m \left(\max_{w \in w(X)} w_k \right) e^k ,$$

– «идеальной» точки, как его иногда называют, может представлять самостоятельный интерес, вне связи с интересующей нас проблемой сравнения аппроксимаций. В целом ряде практических задач, при разработке сложных объектов технического назначения (например, при проектировании маневренных летательных аппаратов), определение набора рекордных характеристик w^* позволяет установить правильный масштаб в отношении требований, которые заказчик решается предъявить к проектируемому объекту [15], [18].

Согласно определению в (4), (31) выполняются неравенства

$$f_\lambda(w^*) \ge f_\lambda(w), \quad w \in w(X), \quad \lambda \in \Lambda , \tag{32}$$

так что в отличие от коэффициентов нормирования $\varphi(\lambda)$, $\tilde{\varphi}(\lambda)$ величина $\varphi_*(\lambda) = f_\lambda(w^*)$ подходит не только для нормирования ограниченного количества разностей

$$\max_{w \in U_a} f_\lambda(w) - \max_{w \in U_b} f_\lambda(w), \quad 1 \le a, b \le C ,$$

но (с учетом замечания из §1) и для произвольных разностей

$$\max_{w \in W} f_\lambda(w) - \max_{w \in U} f_\lambda(w), \quad \varnothing \ne W, U \subset w(X).$$

С помощью коэффициента нормирования (31), (32) для любых непустых подмножеств $W \subset w(X)$ можно определить функцию

$$\Psi(W)=\int_{\Lambda}\left[\frac{\max\limits_{w\in W} f_{\lambda}(w)}{f_{\lambda}(w^{*})}\right]d\Lambda\,,\quad 0<\Psi(W)\le V(\Lambda)\,, \qquad (33)$$

разность значений которой задает значение функции сравнения

$$\Phi^{*}(W,U)=\Psi(W)-\Psi(U)=$$

$$=\int_{\Lambda}\left[\frac{\max\limits_{w\in W} f_{\lambda}(w)-\max\limits_{w\in U} f_{\lambda}(w)}{f_{\lambda}(w^{*})}\right]d\Lambda\,,\quad \varnothing\ne W,U\subset w(X)\,, \qquad (34)$$

для любой упорядоченной пары непустых множеств $W,U\subset w(X)$.

В согласии с определением 1, заданная соотношениями (33) функция Ψ порождает на множестве подмножеств $\mathsf{W}=2^{w(X)}\setminus\{\varnothing\}$ множества достижимых векторных оценок $w(X)$ следующие бинарные отношения.

Условие $\Psi(W)=\Psi(U)$ порождает бинарное отношение эквивалентности, условие $\Psi(W)>\Psi(U)$ – бинарное отношение строгого предпочтения, условие $\Psi(W)\ge\Psi(U)$ – бинарное отношение нестрогого предпочтения, которое в согласии с (33) является полным квазипорядком, так как оно рефлексивно, транзитивно и полно.

Таким образом, введенная в (33) функция Ψ (интеграл по $(m-1)$ – мерному объему $V(\Lambda)$ стандартного симплекса $\Lambda\subset\mathbf{R}^{m}$) представляет собой *функцию полезности* [11], [18]. Эта функция позволяет выразить численно качество каждой отдельной аппроксимации. Введение на ее основе функции сравнения Φ^{*} в (34) может оказаться удобным, однако задача сравнения аппроксимаций при наличии функции полезности по существу не требует применения функции сравнения Φ^{*}.

В упрощенном виде

$$\Psi(\{w\})=\int_{\Lambda}\left[\frac{f_{\lambda}(w)}{f_{\lambda}(w^{*})}\right]d\Lambda\,,\quad w\in w(X)\,,$$

функцию полезности можно, вообще говоря, использовать для вычисления «наилучшей» векторной оценки

$$w^{0}\in\operatorname{Arg}\max_{w\in w(X)}\Psi(\{w\})\,,$$

хотя подобная оценка не представляет для нас большого интереса. В самом деле, за исключением вырожденного случая

$$w^{0}=w^{*}=\sum_{k=1}^{m}\left\{\max_{w\in w(X)} w_{k}\right\}e^{k}\in w(X)\,,$$

когда множество эффективных векторных оценок $w(X_{e})=\{w^{*}\}$, «наилучшей» векторной оценке $w^{0}\ne w^{*}$ может быть сопоставлена отличная от нее достижимая векторная оценка $u\in w(X)$, удовлетворяющая при некотором номере критерия i, $1\le i\le m$ соотношениям

$$u_{i}=w_{i}^{*}=\max_{w\in w(X)} w_{i}>w_{i}^{0}\,.$$

Но тогда «наилучшая» векторная оценка $w^{0}\ne w^{*}$ оказывается более плохой аппроксимацией $\{w^{0}\}$, чем аппроксимация $\{u,w^{0}\}$, поскольку во всех точках $\lambda\in\Lambda$ некоторой достаточно малой окрестности точки $e^{i}\in\Lambda$ выполняется условие

$$\lambda_{i}f_{\lambda}(u)=u_{i}>w_{i}^{0}=\lambda_{i}f_{\lambda}(w^{0})\,,$$

так что справедливо утверждение

$$\Psi\left(\left\{u, w^0\right\}\right) = \int\limits_{\Lambda} \left[\frac{\max\left\{f_\lambda(u), f_\lambda\left(w^0\right)\right\}}{f_\lambda\left(w^*\right)} \right] d\Lambda >$$

$$> \int\limits_{\Lambda} \left[\frac{f_\lambda\left(w^0\right)}{f_\lambda\left(w^*\right)} \right] d\Lambda = \Psi\left(\left\{w^0\right\}\right),$$

и, следовательно, значение функции полезности

$$\Psi\left(\left\{u, w^0\right\}\right) > \Psi\left(\left\{w^0\right\}\right).$$

Использование интегральной функции полезности $\Psi(U)$ в качестве глобального критерия оценки качества аппроксимирующих множеств $U \in 2^{w(X)} \setminus \{\varnothing\}$, с целью построения «наилучшей» аппроксимации

$$W \in \operatorname*{Arg\,max}_{\varnothing \ne U \subset w(X)} \Psi(U)$$

не представляется возможным из-за сложности интегральной функции Ψ и чрезвычайной обширности множества всевозможных непустых подмножеств множества достижимых векторов $2^{w(X)} \setminus \{\varnothing\}$. Кроме того, в согласии со следствием из леммы 1, заданная соотношениями (33) функция Ψ не способна различать по качеству подмножества, содержащие множество эффективных векторных оценок $w(X_e)$:

$$\Psi(W) = \max_{\varnothing \ne U \subset w(X)} \Psi(U), \quad w(X_e) \subset W \subset w(X),$$

так что все они по функции Ψ оказываются эквивалентными.

Вместе с тем нас интересуют (как об этом было сказано выше, в §§ 1, 2 настоящей главы) конечные аппроксимирующие множества $W \subset w(X)$, которые могут быть получены конструктивными методами. Поэтому интегральная функция полезности $\Psi(W)$ заслуживает внимания с практической точки зрения как способ непосредственной оценки качества всякого конечного множества $W \subset w(X)$, претендующего на звание удовлетворительной аппроксимации.

Поскольку функция полезности Ψ устанавливает транзитивные бинарные отношения, оценка качества произвольной аппроксимации $W \subset w(X)$ с помощью величины $\Psi(W)$ является последовательной и непротиворечивой. Непротиворечивая оценка может, однако, оказаться неверной, поэтому следует убедиться, что функция полезности (33) позволяет корректно оценивать качество аппроксимаций. Об этом свидетельствует следующая теорема (соответствующая теореме 1 для функции сравнения Φ).

Теорема 3. *Пусть на множестве достижимых векторов* $w(X)$ *определены компактные аппроксимирующие множества* $U, W_t \subset w(X)$, $t = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяющие условиям*

$$W_e \not\subset U, \quad \lim_{t\to\infty} D(W_e, W_t) = 0$$

где $W_e = w(X_e)$ *– множество эффективных векторов, величина* D *– отклонение. Тогда найдется номер* $\tau \ge 1$ *такой, что аппроксимация* W_t *предпочтительнее аппроксимации* U *при всех* $t \ge \tau$,

$$W_t \succ U, \quad t \ge \tau,$$

поскольку заданная в (33) *функция полезности* Ψ *удовлетворяет соотношениям*

$$\lim_{t\to\infty} \Psi(W_t) = \Psi(W_e), \quad \Psi(W_t) > \Psi(U), \quad t \ge \tau, \qquad (35)$$

Доказательство. Соотношения (31)–(33) в согласии со следствием из леммы 1 влекут соотношения

$$0 < \Psi(W_t) \le \Psi(W_e).$$

Предположим от противного, что в (35) равенство

$$\lim_{t\to\infty} \Psi(W_t) = \Psi(W_e)$$

не выполняется, так что с учетом последних неравенств можно указать такое значение $\delta > 0$ и бесконечную последовательность номеров $\{t_q\}_{q=1}^{\infty}$, что справедливо утверждение

$$\Psi(W_e) - \Psi(W_t) \geq 2\delta, \quad t \in \{t_q\}_{q=1}^{\infty}. \tag{36}$$

С другой стороны, из предельного соотношения

$$\lim_{t\to\infty} D\big(w(X_e), W_t\big) = 0$$

следует, что найдется номер $\tau \geq 1$ такой, что отклонение

$$D(W_e, W_t) \leq \frac{\gamma^2}{\eta V(\Lambda)}\delta, \quad t \geq \tau,$$

где $V(\Lambda)$ – $(m-1)$ – мерный объем стандартного симплекса $\Lambda \subset \mathbf{R}^m$ из (4). Следовательно, согласно определению (31) величины $f_\lambda(w^*)$ разность функций максимума удовлетворяет условию

$$\max_{w\in W_e} f_\lambda(w) - \max_{w\in W_t} f_\lambda(w) \leq \frac{\delta}{V(\Lambda)} f_\lambda(w^*), \quad \lambda \in \Lambda, \quad t \geq \tau.$$

в согласии с утверждениями лемм 1 и 2.

Но тогда, согласно (33), неотрицательная разность значений функции полезности удовлетворяет соотношениям

$$\Psi(W_e) - \Psi(W_t) = \int_\Lambda \left[\frac{\max_{w\in W_e} f_\lambda(w) - \max_{w\in W_t} f_\lambda(w)}{f_\lambda(w^*)} \right] d\Lambda \leq \delta, \quad t \geq \tau,$$

что противоречит утверждению (36) и доказывает в (35) равенство

$$\lim_{t\to\infty} \Psi(W_t) = \Psi(W_e).$$

Согласно следствию из леммы 1, условия $W_e \not\subset U \subset w(X)$ влекут соотношения

$$\max_{w\in W_e} f_\lambda(w) = \max_{w\in \underline{W}_e} f_\lambda(w) = \max_{w\in w(X)} f_\lambda(w) \geq \max_{w\in U} f_\lambda(w), \quad \lambda \in \Lambda, \tag{37}$$

причем найдется вектор $u \in w(X_e) \setminus U$, так что ввиду (4)–(6) функция f_λ удовлетворяет в точке $\lambda = u \Big/ \sum_{k=1}^{m} u_k \in \Lambda$ соотношениям

$$\max_{w\in U} f_\lambda(w) < \max_{w\in W_e} f_\lambda(w) = f_\lambda(u) = \sum_{k=1}^{m} u_k = \frac{u_k}{\lambda_k}, \quad 1 \leq k \leq m,$$

согласно определению эффективных векторов.

Согласно лемме 3 функция максимума

$$\varphi(\lambda, A) = \max_{w\in A} f_\lambda(w)$$

непрерывна по $\lambda \in \Lambda$, если произвольный фиксированный компакт $A \subset w(X)$, так что из последнего неравенства с учетом (37) следует неравенство

$$\max_{w\in U} f_\lambda(w) < \max_{w\in W_e} f_\lambda(w)$$

для всех $\lambda \in \Lambda$ из некоторой окрестности точки $u \Big/ \sum_{k=1}^{m} u_k \in \Lambda$.

Следовательно, в этой окрестности положительна подынтегральная функция, определяющая в согласии с (33) разность значений функции полезности

$$\Psi(W_e) - \Psi(U) = \int_\Lambda \left[\frac{\max_{w\in W_e} f_\lambda(w) - \max_{w\in U} f_\lambda(w)}{f_\lambda(w^*)} \right] d\Lambda,$$

а в остальных точках симплекса Λ подынтегральная функция неотрицательна ввиду (37). Но тогда можно указать значение $\gamma > 0$ такое, что выполняется условие

$$\Psi(W_e) - \Psi(U) = \gamma > 0.$$

Следовательно, ввиду доказанного выше равенства

$$\lim_{t\to\infty}\Psi(W_t)=\Psi(W_e)$$

для некоторого номера $\tau \ge 1$ справедливы неравенства в (35)

$$\Psi(W_t)>\Psi(U)\,,\quad t\ge\tau\,,$$

так что выполняется утверждение теоремы $W_t \succ U$, $t\ge\tau$. Теорема доказана.

Сравнивая утверждения теорем 1 и 3, можно сделать вывод, что функция полезности Ψ, как и функция сравнения Φ, справляется с основной задачей оценки качества аппроксимаций, позволяя отличить достаточно «точные» аппроксимации от более «грубых».

Проблемы, возникающие при использовании интегральных функций Ψ и Φ для сравнения заведомо «грубых» аппроксимаций, демонстрирует следующий

Пример 2. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^m$, где m=2, заданы множества

$$w(X)=\mathrm{conv}\{w^i\}_{i=0}^2\,,\quad w(X_e)=w(X_0)=\left[w^1,w^2\right],$$

и векторы

$$w^0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad w^1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\quad w^2=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix},\quad w^*=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix},$$

где вектор w^* является «идеальной» точкой, а крайние точки w^1, w^2 множества эффективных векторов $w(X_e)=\left[w^1,w^2\right]$ представляют собой «одинаково грубые» аппроксимации этого множества, поскольку соответствующие отклонения равны между собой и велики (совпадают с диаметром множества достижимых векторов $w(X)$):

$$D\left(w(X_e),\{w^i\}\right)=\left\|w^1-w^2\right\|=\max_{u,\,w\in w(X)}\|w-u\|=\sqrt{10}=3{,}162\ldots,\quad i=1,2\,.$$

Функция полезности Ψ принимает значения

$$\Psi\left(\{w^1\}\right)=\frac{1}{4}(1+\ln 4)=0{,}596\ldots,\quad \Psi\left(\{w^2\}\right)=\frac{1}{4}\left(2+\ln\frac{5}{3}\right)=0{,}627\ldots,$$

разность которых положительна

$$\Psi\left(\{w^2\}\right)-\Psi\left(\{w^1\}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\ln\frac{5}{12}\right)=0{,}031\ldots>0\,,$$

и по величине функции полезности вторая аппроксимация превосходит первую, $\{w^2\}\succ\{w^1\}$; применение функции сравнения Φ дает тот же результат, поскольку

$$\Phi\left(\{w^2\},\{w^1\}\right)=\frac{1}{4}+\ln\frac{5}{6}=0{,}067\ldots>0\,.$$

Значение функции полезности (33) при уменьшении масштаба сравниваемых подмножеств меняется пропорционально величине масштабного коэффициента $z\in(0,1)$:

$$\Psi(W_z)=z\Psi(W)\,,\quad W_z=\left\{w\in\mathbf{R}_+^m \,\middle|\, z^{-1}w\in W\right\},\quad \varnothing\ne W\subset w(X)\,,$$

так что и при использовании функции Ψ результат сравнения произвольных аппроксимирующих множеств зависит не от удаленности множества эффективных векторных оценок, не от масштабного коэффициента z, а от взаимного расположения аппроксимаций.

Если последовательность аппроксимаций $W_t\subset w(X)$, $t=1,2,\ldots$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty}D\left(w(X_e),W_t\right)=0\,,$$

то с помощью функции полезности для нее можно сформулировать следующий эвристический критерий остановки, буквально соответствующий упомянутому выше (§1, п.3) эвристическому критерию остановки при вычислении экстремума скалярной функции.

Критерий остановки процесса вычислений:

Если функция полезности удовлетворяет условию

$$\left|\Psi(W_t)-\Psi(W_{t-1})\right|\le\delta\,,\quad \Psi(W_t)\ge\Psi(W_{t-1})\,,$$

где $\delta>0$ – достаточно малое наперед заданное число, то аппроксимацию W_t предлагается считать удовлетворительным приближенным решением задачи многокритериальной оптимизации.

Возможность приближенных вычислений значений интегральной функции полезности обеспечивает следующая теорема, доказательство которой повторяет доказательство теоремы 2 из §3.

Теорема 4. *Пусть в качестве* p *– приближения определенной в* (33) *функции полезности* $\Psi(W)$ *рассматривается функция*

$$\Psi_p(W)=\frac{V(\Lambda)}{p^{m-1}}\sum_{q\in Q}\left[\frac{\max\limits_{w\in W} f_{\lambda(q)}(w)}{f_{\lambda(q)}(w^*)}Z_r^m\right],\quad \varnothing\ne W\subset w(X)\,,$$

$$Q=\left\{q\in\mathbf{R}^m\,\middle|\,\sum_{k=1}^m e^k\le q\,,\quad 1\le\sum_{k=1}^m q_k-p\le m-1\right\},\qquad(38)$$

$$V(\Lambda)=\frac{\sqrt{m}}{(m-1)!}\,,\quad r=\sum_{k=1}^m q_k-p\,,\quad p=1,2,\ldots$$

где множество достижимых векторных оценок $w(X)$ *задано в* (1), *функция минимума* f_λ *– в* (4), *коэффициенты* Z_r^m *– в* (24), *векторы* $\lambda(q)$, w^* *– в* (26), (31).

Тогда значение функции полезности в пределе совпадает с ее p *– приближением:*

$$\lim_{p\to\infty}\Psi_p(W)=\Psi(W)\,,\quad \varnothing\ne W\subset w(X)\,,$$

и если у двух аппроксимаций $W,U\subset w(X)$ *разность значений* p *– приближений удовлетворяет соотношениям*

$$\Psi_p(W)-\Psi_p(U)\ge\frac{4\eta m}{p\gamma(m-1)!}\,,$$

$$0<\gamma=\min_{w\in w(X)}\min_{1\le k\le m} w_k\,,\quad 0<\eta=\max_{w\in w(X)}\sum_{k=1}^m w_k\,,$$

при некотором фиксированном $p\ge1$ *, то соответствующие значения функции полезности удовлетворяют строгому неравенству* $\Psi(W)>\Psi(U)$ *и, следовательно, аппроксимация* W *предпочтительнее аппроксимации* U ($W\succ U$).

В заключение настоящего параграфа и главы в целом следует отметить, что для сравнения аппроксимирующих множеств по качеству допустимо применение как функции сравнения Φ, так и функции полезности Ψ, о чем свидетельствуют утверждения теорем 1, 2 и 3, 4 соответственно. Обе функции одинаково успешно справляются с основной задачей оценки качества аппроксимаций множества эффективных векторных оценок $w(X_e)$, позволяя отличить достаточно «точные» аппроксимации от более «грубых».

Оценка заведомо «грубых» аппроксимаций, от которых множество $w(X_e)$ расположено «далеко», в обоих случаях вызывает затруднение, причем использование функции сравнения Φ может приводить к противоречивым результатам (из-за нетранзитивности соответствующего бинарного отношения). Следует, однако, подчеркнуть, что задача сравнения заведомо «грубых» аппроксимаций не особенно актуальна.

В согласии с утверждением леммы 1, заданная соотношениями (33) функция полезности Ψ не позволяет различить по качеству множества U и W, если одно получено из другого удалением «балласта»:

$$\Psi(U)=\Psi(W)\,,$$

$$U=W\setminus B_W\,,\quad \varnothing\ne W\subset w(X)\,,$$

причем тем же свойством обладает и введенная в (12) функция сравнения Φ. Это обстоятельство не является, однако, существенным недостатком, если сравнивается конечное число конечных аппроксимаций

$$U_i \subset w(X), \quad 1 \le |U_i| < \infty, \quad i = 1,2,...,C,$$

каждая из которых получена тем или иным конструктивным численным методом. Подобные методы обычно предусматривают [15] удаление векторной оценки $u \in U$ из состава аппроксимирующего множества U еще в процессе формирования этого множества, если в него на каком-то этапе включается оценка $w \in U \setminus \{u\}$, $w \ge u$. Полученные такими методами аппроксимации U_i не могут в принципе *) содержать «балласта» (т.е. доминированных по Парето векторных оценок).

Определенная соотношениями (33) функция полезности $\Psi(W)$ задает на множестве подмножеств $\mathsf{W} = 2^{w(X)} \setminus \{\varnothing\}$ множества достижимых векторов $w(X)$ бинарное отношение нестрогого предпочтения, которое является полным квазипорядком. Она и ее p – приближение $\Psi_p(W)$ в (38) привлекают возможностью оценивать (с наперед заданной степенью точности) качество каждой конечной аппроксимации в отдельности. Вместе с тем вычисление разности p – приближений $\Psi_p(W) - \Psi_p(U)$ требует вычисления величин

---

* Множество W_* предельных точек всевозможных последовательностей $\{w(x^t)\}_{t=1}^{\infty}$, содержащихся в последовательности аппроксимирующих множеств $\{w(X_t)\}_{t=1}^{\infty}$, сформулированной в главе 2, может в качестве «балласта» содержать слабоэффективные векторы, поскольку удовлетворяет включениям $w(X_e) \subset W_* \subset w(X_0)$.

$$f_{\lambda(q)}(w^*) = \min_{1\le k\le m} \frac{\max_{w\in w(X)} w_k}{\lambda_k(q)}, \quad q \in Q,$$

$$f_{\lambda(q)}(w) = \min_{1\le k\le m} \frac{w_k}{\lambda_k(q)}, \quad q \in Q, \quad w \in W \bigcup U,$$

тогда как вычисление p – приближения $\Phi_p(W,U)$ введенной в (12) функции сравнения $\Phi(W,U)$ проще, поскольку требует, согласно (30), вычисления меньшего числа величин

$$f_{\lambda(q)}(w) = \min_{1\le k\le m} \frac{w_k}{\lambda_k(q)}, \quad q \in Q, \quad w \in W \bigcup U,$$

и не связано с определением «идеальной» точки

$$w^* = \sum_{k=1}^{m} \left(\max_{w\in w(X)} w_k \right) e^k,$$

представляющей, однако, как было упомянуто ранее, самостоятельный интерес.

Значение функции полезности (33) при уменьшении масштаба сравниваемых подмножеств меняется пропорционально величине масштабного коэффициента $z \in (0,1)$:

$$\Psi(W_z) = z\Psi(W), \quad W_z = \left\{ w \in \mathbf{R}_+^m \middle| z^{-1} w \in W \right\}, \quad \varnothing \ne W \subset w(X),$$

тогда как масштабный коэффициент на значение функции сравнения (12) не влияет:

$$\Phi(W_z, U_z) = \Phi(W, U), \quad \varnothing \ne W, U \subset w(X),$$

так что результат сравнения аппроксимирующих множеств в обоих случаях зависит не от масштаба, а от взаимного расположения аппроксимаций.

Другие характеристики произвольных аппроксимаций $W \subset w(X)$, такие как отклонение $D(w(X_e), W)$ и гарантирующая свертка $\Psi^1(W) = \min_{\lambda\in\Lambda}\{\varphi(\lambda, W)/\varphi(\lambda, w(X_0))\}$, в отсутствие априорной информации об экстремальных множествах

$w(X_e)$, $w(X_0)$ используются опосредованно для подтверждения правомерности применения функций Φ и Ψ.

С учетом перечисленных выше обстоятельств, выбор способа сравнения аппроксимаций (при помощи функции сравнения Φ либо функции полезности Ψ) может быть сделан исходя из условий решения конкретной многокритериальной задачи.

ГЛАВА 4

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ЭФФЕКТИВНЫХ ВЕКТОРНЫХ ОЦЕНОК ПРИ БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ ЧАСТНЫХ КРИТЕРИЕВ

В предыдущей главе 2 была сформулирована итеративная ветвящаяся процедура построения последовательности множеств, аппроксимирующих множество эффективных векторных оценок. При стандартных требованиях к частным критериям эффективности и функциональным ограничениям была доказана сходимость последовательности аппроксимаций к множеству эффективных векторных оценок и ее устойчивость к погрешностям вычислений. Поскольку степень ветвления процедуры довольно быстро растет с увеличением количества критериев, реализация этой и подобных ей процедур на практике при большом числе частных критериев эффективности может быть сопряжена с весьма существенными вычислительными трудностями. Корректно поставленные оптимизационные задачи, число критериев в которых, тем не менее, велико ($m > 7 \div 10$), обычно возникают при иерархической структуре группы лиц, чьи интересы в целом выражает столь обширный набор критериев. Это обуславливает применение для решения подобных задач методов декомпозиции, взаимных уступок и вторичной параметризации.

§1. Иерархическая декомпозиция в задаче оптимизации при большом числе критериев

Рассмотрим задачу векторной оптимизации большой размерности (с большим числом частных критериев эффективности) при следующих, несколько более жестких, чем в главе 2, предположениях:

матрица Якоби

$$\nabla v(x) = \left[\frac{\partial v_k(x)}{\partial x_j}\right]^T$$

n–мерной вектор–функции $v(x) \in \mathbf{R}^n$ удовлетворяет на выпуклом компакте (допустимое множество)

$$X = \left\{x \in \mathbf{R}^s \,\middle|\, v_k(x) \ge 0, \quad m+1 \le k \le n\right\}$$

условию Липшица, частные критерии $w_k(x) = v_k(x), \quad 1 \le k \le m$ псевдовогнуты и принимают на X положительные значения, левые части $v_k(x)$, $m+1 \le k \le n$ функциональных ограничений удовлетворяют условию регулярности (6) главы 2, множества эффективных и слабо эффективных векторов совпадают, $w(X_e) = w(X_0)$, введенный в главе 2 для обеспечения устойчивости к погрешностям параметр $b = 1$.

В главе 2 предложен основанный на методе возмущений численный метод построения последовательности множеств

$$w(X_t), \quad t = 1, 2, \ldots$$

$$X_1 = \{x^1\} \subset X, \quad X_{t+1} = \bigcup_{x \in X_t} X_{t+1}(x) \subset X,$$

которые аппроксимируют множество эффективных векторов $w(X_e)$ с любой наперед заданной точностью, поскольку при перечисленных выше предположениях соответствующее расстояние по Хаусдорфу стремится к нулю с ростом номера аппроксимации:

$$\lim_{t \to \infty} \Delta\big(w(X_e), w(X_t)\big) = 0,$$

согласно утверждению (73) теоремы 4 главы 2.

Эта аппроксимирующая последовательность $\{w(X_t)\}_{t=1}^{\infty}$ задана соотношениями (52)–(57), (59), (60), (67), (68) главы 2, причем в каждой точке $x \in X_t$ трудоемкость построения последующих аппроксимаций $w(X_{t+1}(x))$ определяется наибольшей степенью ветвления $N(m)$:

$$\left|X_{t+1}(x)\right| = \max\left\{1, \left|\mathsf{N}_t(x)\right|\right\} \le N(m) = C_m^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}, \qquad (1)$$

где $|Y|$ – число элементов в конечном множестве Y, величина $C_m^q = \dfrac{m!}{q!(m-q)!}$ – биномиальный коэффициент, $\lfloor z \rfloor$ – наибольшее целое, не превосходящее величину z. Степень ветвления $N(m)$ довольно быстро растет с увеличением числа критериев m, что создает существенные вычислительные трудности при решении многокритериальных задач большой размерности $m >> 1$.

Сформулируем вытекающее из доказательства основной теоремы 4 главы 2

Следствие. Если в соотношениях (52)–(57), (59), (60), (67), (68) главы 2 соотношения (55) заменить соотношениями

$$\mathsf{N}_t(x) = \left\{ J \subset I_1^m \,\middle|\, 0 \ne |J| = \max_{J \subset M \subset I_1^m,\ \left\|p\left(x, M \cup L\left(x, \varepsilon_t(x)\right)\right)\right\| \ge \varepsilon_t(x)} |M| \right\},$$

$$\mathsf{M}_t(x) = \begin{cases} \{\varnothing\} \cup \mathsf{N}_t(x), & \text{если} \quad I_1^m \notin \mathsf{N}_t(x), \\ \{I_1^m\}, & \text{если} \quad I_1^m \in \mathsf{N}_t(x), \end{cases}$$

где множество $I_1^m = \{k \,|\, 1 \le k \le m\}$, то наибольшая степень ветвления $N(m)$ соответствующей аппроксимирующей последовательности $\{w(X_t)\}_{t=1}^{\infty}$ определяется условием

$$\left|X_{t+1}(x)\right| = 1 + \left|\mathrm{N}_t(x) \setminus \{I_1^m\}\right| \le N(m) = 1 + C_m^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}$$

а сама последовательность при перечисленных выше предположениях удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{t\to\infty} \Delta\left(w(X_e),\, w(X_t)\right) = 0$$

согласно утверждению (73) теоремы 4 главы 2.

Доказательство. В условиях следствия соответствующая аппроксимирующая последовательность $\{w(X_t)\}_{t=1}^{\infty}$ отличается от последовательности, сформулированной в главе 2 лишь тем, что в каждой опорной точке $x \in X_t$ нулевой шаг по нулевому направлению делается не только при условии $\mathrm{N}_t(x) = \varnothing$, но при значительно более слабом требовании $I_1^m \notin \mathrm{N}_t(x)$, так что последовательность множеств $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ содержит дополнительные последовательности точек ($\partial-$ последовательности), удовлетворяющие соотношениям

$$\{x^t\}_{t=1}^{\infty} \subset X \,,$$

$$0 < |T_\partial| \le \infty \,, \quad T_\partial = \left\{t \,\middle|\, t \ge 1 \,, \quad x^{t+1} = x^t \,, \quad I_1^m \notin \mathrm{N}_t(x^t) \ne \varnothing\right\},$$

что и обуславливает наибольшую степень ветвления, превосходящую оценку (1) не более чем на единицу. Заметим, что все остальные последовательности точек совпадают с последовательностями (69) главы 2 и удовлетворяют условию $|T_\partial| = 0$.

С учетом компактности множества допустимых решений X, для доказательства леммы в целом достаточно установить, что любая сходящаяся подпоследовательность $\{x^t\}_{t\in T}$

любой $\partial-$ последовательности $\{x^t\}_{t=1}^{\infty}$ имеет в качестве предельной точки слабо эффективное решение:

$$\lim_{t\in T} x^t = x^* \in X_0 \,.$$

Возможны лишь два типа $\partial-$ последовательностей, когда множество номеров T_∂ конечно либо бесконечно:

а) $0 < |T_\partial| < \infty$, б) $|T_\partial| = \infty$.

В случае а) множество номеров T_∂ конечно и не пусто, а соответствующая $\partial-$ последовательность $\{x^t\}_{t=1}^{\infty}$ удовлетворяет последнему предельному соотношению, поскольку ее усеченная последовательность

$$\{x^t\}_{t=\tau+1}^{\infty} \,, \quad \tau = \max_{t\in T_\partial} t$$

отличается от удовлетворяющих условию $|T_\partial| = 0$ сходящихся последовательностей лишь начальной точкой и начальным значением параметра возмущения.

В случае б) из условия $|T_\partial| = \infty$ ввиду включения

$$T_\partial \subset T' = \left\{t \,\middle|\, t \ge 1 \,, \quad I_1^m \notin \mathrm{N}_t(x^t)\right\}$$

следует бесконечность множества T', так что можно утверждать

$$T' = \{t_1, t_2, \dots t_q, \dots\}, \quad T'' = \{1, 2, \dots t, \dots\} \setminus T' = \bigcup_{q=1}^{\infty} T_q \,, \quad t_0 = 0 \,,$$

$$T_{q+1} = \left\{t \,\middle|\, t_q < t < t_{q+1}\right\}, \quad q = 0, 1, \dots$$

Поскольку допустимое множество X – компакт, всякая предельная точка x^* рассматриваемой $\partial-$ последовательности удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{t\in T} x^t = x^* \in X \,, \quad T \subset T' \bigcup T'' \,, \quad |T| = \infty \,.$$

Пусть пересечение множеств $T \bigcap T'$ бесконечно. С учетом утверждения (75) главы 2 и согласно определениям множеств T', N_t в этом случае выполняются условия

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_t\left(x^t\right) = 0, \quad \lim_{t \in T \bigcap T'} x^t = x^* \in X,$$

$$\lim_{t \in T \bigcap T'} \left\| p\left(x^t, I_1^m \bigcup L\left(x^t, \varepsilon_t\left(x^t\right)\right)\right) \right\| = 0 .$$

Последние три равенства, с учетом утверждений лемм 4, 7 главы 2, влекут равенство $\left\| p\left(x^*, I_1^m \bigcup L\left(x^*, 0\right)\right) \right\| = 0$, которое, согласно следствию 2 главы 2, в условиях теоремы является достаточным условием слабой эффективности решения $x^* \in X$, так что $x^* \in X_0$.

Пусть, наконец, пересечение множеств $T \bigcap T'$ пусто либо конечно. Без потери общности будем полагать $T \bigcap T' = \varnothing$, так что справедливо утверждение

$$T \subset T'', \quad T = \bigcup_{q=1}^{\infty} \left(T \bigcap T_q\right).$$

Поскольку T', T – бесконечные подмножества, найдется бесконечное подмножество

$$T^0 \subset \left\{ t \in T' \middle| t = t_q, \ q \ge 1, \ T \bigcap T_{q+1} \ne \varnothing \right\}$$

такое, что справедливо утверждение

$$\lim_{t \in T^0} x^t = \lim_{t \in T^0} x^{t+1} = x^0 \in X_0 ,$$

где включение $x^0 \in X_0$ доказано выше, поскольку бесконечное подмножество $T^0 \subset T'$ и, следовательно, бесконечно пересечение $T^0 \bigcap T' = T^0$. Равенство двух пределов следует из определений множеств T', N_t (ввиду справедливости утверждения (94) главы 2).

Следовательно, можно утверждать

$$\lim_{t \in T^*} x^t = \lim_{t \in T} x^t = x^* \in X , \quad T^* = \bigcup_{q \ge 1, \ t_q \in T^0} \left(T \bigcap T_{q+1}\right),$$

поскольку определенное выше подмножество $T^* \subset T$ бесконечно вместе с бесконечными подмножествами T, T^0.

Заметим, что в согласии с определениями множеств T', T^0, T^*, T_{q+1}, J_t, N_t, M_t, выполняются соотношения

$$\mathsf{N}_t\left(x^t\right) = \mathsf{M}_t\left(x^t\right) = \left\{I_1^m\right\}, \quad J_t = I_1^m \in \mathsf{M}_t\left(x^t\right), \quad t_q + 1 \le t \le \tau ,$$

$$t_q \in T^0, \quad \tau \in T^* \bigcap T_{q+1} ,$$

так что по теореме 3 главы 2 с учетом правила выбора шага при условии $\tau > t_q + 1$ выполняются неравенства

$$w\left(x^\tau\right) - w_i\left(x^{t_q+1}\right) \ge$$

$$\ge \omega \left[\sum_{t=t_q+1}^{\tau-1} \alpha\left(x^t, J_t\right) \left\| p\left(x^t, I_1^m \bigcup L\left(x^t, \varepsilon_t\left(x^t\right)\right)\right) \right\| \right] \sum_{k=1}^{m} e^k > 0 ,$$

где τ, t_q определены выше, e^k – единичные орты в пространстве $\mathbf{R}^m$.

Сводя воедино полученные соотношения, можно утверждать, что выполняются соотношения

$$\lim_{\tau \in T^* \bigcap T_{q+1}} x^\tau = x^* , \quad \lim_{t_q \in T^0} x^{t_q+1} = x^0 ,$$

$$w\left(x^\tau\right) \ge w_i\left(x^{t_q+1}\right).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу по точкам x^τ, x^{t_q+1}, благодаря непрерывности вектор–функции w получаем неравенство $w\left(x^*\right) \ge w\left(x^0\right)$. Но тогда, в согласии с определением 1, следствием 1 и замечанием 1 главы 1, всякая предельная точка x^* произвольной ∂– последовательности является решением, слабо эффективным по векторному критерию w вместе с предельной точкой $x^0 \in X_0$. Следствие доказано.

Подчеркнем, что оптимизационные задачи, количество частных критериев эффективности в которых действительно велико, естественным образом возникают, например, при проектировании сложных технических систем или планировании экономического развития крупного региона, когда среди лиц, принимающих решения, существуют группировки, преследующие собственные экономические или иные цели. Процедура принятия решения в этих условиях становится иерархической, а большое число критериев является следствием того, что наборы частных критериев эффективности на разных уровнях иерархии не совпадают.

Предположим, что имеется всего два уровня иерархии, и используем условные обозначения «руководство» и «подчиненные» для лиц, принимающих решения на верхнем и нижнем уровне иерархии соответственно. В согласии с таким иерархическим делением $m-$ мерный вектор частных критериев эффективности $w(x) \in \mathbf{R}^m$ распадается на две непересекающиеся составляющие

$$w(x) = \left[\left[w'(x)\right]^T, \left[w''(x)\right]^T\right]^T \in \mathbf{R}^m,$$

$$w'(x) = \begin{bmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_r(x) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^r, \quad w''(x) = \begin{bmatrix} v_{r+1}(x) \\ \vdots \\ v_m(x) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m-r}, \qquad (2)$$

$$\max\{r, m-r\} < m,$$

где w' (w'') – вектор, составленный из r ($m-r$) частных критериев подчиненных (руководства).

Из соотношений (1), (2) следуют соотношения оценок степени ветвления

$$\max\left\{N(r), N(m-r)\right\} < N(m),$$

так что подчиненные и руководство, на основе сформулированной в главе 2 итеративной процедуры, могут независимо строить собственные множества эффективных векторных оценок $w'(X'_e)$, $w''(X''_e)$, если при ограниченных вычислительных мощностях получить множество эффективных векторных оценок $w(X_e)$ не удается из–за большого числа частных критериев m и высокой степени ветвления $N(m)$. При этом, однако, нельзя, разумеется, гарантировать совпадение множеств

$$w(X'_e) = w(X''_e) = w(X_e)$$

для исходного вектора частных критериев эффективности.

Чтобы в условиях (2) осуществить коллективный выбор решения при большом числе частных критериев $m >> 1$, итеративную процедуру можно согласовать на основе *одномерной параметризации* и *взаимных уступок* между руководством и подчиненными (см. [21], [22]) при выполнении следующих предположений:

1) на единичном полуинтервале рассматриваются всевозможные значения *параметра согласования*

$$c \in (0, 1], \qquad (3)$$

каждому из которых ставится в соответствие последовательность подмножеств X_t^c, $t = 1, 2, ...$ таких, что в пространстве значений критериев их образы $W_t^c = w(X_t^c)$ составляют последовательность аппроксимаций множества эффективных векторных оценок $W_e = w(X_e)$:

$$X_1^c = \{x^1\} \subset X\,, \quad X_{t+1}^c = \bigcup_{x \in X_t^c} X_{t+1}^c(x) \subset X\,, \quad t = 1, 2, \ldots$$
$$X_{t+1}^c(x) = \{x\} + \bigcup_{J \in \mathrm{M}_t^c(x)} \{\alpha(x,J)\, h(x,J)\}, \tag{4}$$

где единичные направления h, величины шагов α и множества подмножеств M_t^c определены ниже в пп. 2)–5);

2) производится *декомпозиция* – разбиение определенного формулировкой следствия множества подмножеств $\mathrm{M}_t(x) \subset 2^{I_1^m}$ на непересекающиеся множества подмножеств $\mathrm{J}_t^S(x) \subset 2^{I_1^m}$ согласно единому для всех опорных точек $x \in X_t^c$, $c \in (0,1]$, $t = 1, 2, \ldots$ правилу:

$$\mathrm{M}_t(x) = \bigcup_{\varnothing \subset S \subset I_1^r} \mathrm{J}_t^S(x), \quad I_j^l = \{k \mid j \le k \le l\},$$
$$\mathrm{J}_t^S(x) = \{J \in \mathrm{M}_t(x) \mid J \setminus I_{r+1}^m = S\}, \quad \varnothing \subset S \subset I_1^r\,; \tag{5}$$

3) руководство и подчиненные совместно определяют множества $\mathrm{S}_t^c(x) \subset 2^{I_1^r}$ подмножеств $S \subset I_1^r$ номеров частных критериев подчиненных согласно единому правилу:

$$\mathrm{S}_t^c(x) = \left\{ S \subset I_1^r \,\middle|\, \mathrm{J}_t^S(x) \ne \varnothing, \quad c \in C_S(x,\varepsilon) = \left(\frac{|S|^{i+1} c_S(x,\varepsilon)}{|S| r^i + 1}, \frac{|S|^{i+1} + 1}{|S| r^i + 1} \right] \right\},$$

$$c_S(x,\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{\max\limits_{k \in S \cup I_{r+1}^m} \|p(x, \{k\} \cup L(x,\varepsilon))\|}, & \text{если } |S| > \min\limits_{M \subset S,\ \mathrm{J}_t^M(x) \ne \varnothing} |M|, \\ 0, & \text{если } |S| = \min\limits_{M \subset S,\ \mathrm{J}_t^M(x) \ne \varnothing} |M|, \end{cases} \tag{6}$$

где *параметр настройки* $i = 1, 2, \ldots$ – произвольное фиксированное натуральное число;

4) для итеративной процедуры (4) множество $\{h(x,J)\}_{J \in \mathrm{M}_t^c(x)}$ направлений перехода от опорного решения $x \in X_t^c$ к последующим решениям $y \in X_{t+1}^c(x)$ определяется правилом:

$$h(x,J) = \begin{cases} \dfrac{p(x, J \cup L(x,\varepsilon))}{\|p(x, J \cup L(x,\varepsilon))\|}, & \text{если } \varnothing \ne J \in \mathrm{M}_t^c(x), \\ 0, & \text{если } J = \varnothing, \end{cases}$$
$$\|p(x,M)\| = \min_{p \in \mathrm{conv}\{\nabla v_k(x)\}_{k \in M}} \|p\|, \quad \varnothing \ne M \subset I_1^n\,, \tag{7}$$
$$L(x,\varepsilon) = \{k \in I_{m+1}^n \mid v_k(x) \le \varepsilon\},$$

где множество подмножеств $\mathrm{M}_t^c(x) \subset 2^{I_1^m}$ задано соотношениями

$$\mathrm{M}_t^c(x) = \bigcup_{S \in \mathrm{S}_t^c(x)} \mathrm{J}_t^S(x)\,; \tag{8}$$

5) величины шагов $\alpha \ge 0$ и параметров возмущения $\varepsilon > 0$ определяются в соотношениях (4)–(7) условием следствия и соотношениями (54), (56), (57), (60), (67), (68) главы 2.

Замечание. В согласии с правилами (5), (8), декомпозиция исходного множества подмножеств $\mathrm{M}_t(x)$ производится по всевозможным подмножествам $S \subset I_1^r$ номеров частных критериев подчиненных, тогда как при всяком фиксированном значении параметра согласования $c \in (0,1]$ декомпозиция множества подмножеств $\mathrm{M}_t^c(x)$ производится по сокращенному множеству подмножеств $\mathrm{S}_t^c(x) \subset 2^{I_1^r}$, степень сокращения которого определяется правилом (6). Это правило обеспечивает включение $S \in \mathrm{S}_t^c(x)$ лишь при попадании значения параметра согласования c в полуинтервал $C_S \subset (0,1]$, который заведомо «уже» исходного единичного полуинтервала, за исключением следующих двух случаев:

$$\text{а) } S=\varnothing, \quad \text{б) } S=I_1^r, \quad \mathrm{M}_t(x)=\mathrm{J}_t^S(x),$$

когда полуинтервал $C_S=(0,1]$. Тем самым при всех возможных значениях параметра согласования $c\in(0,1]$ множество $\{h(x,J)\}_{J\in \mathrm{M}_t^c(x)}$ в обязательном порядке содержит единичное направление $h(x,J)$, $J\in \mathrm{M}_t(x)$, если подмножество J может содержать лишь номера критериев руководства, т.е. не содержит номеров критериев подчиненных, $J\cap I_1^r=\varnothing$, либо все такие подмножества $J\in \mathrm{M}_t(x)$ непременно содержат номера всех критериев подчиненных, $J\cap I_1^r=I_1^r$, $J\in \mathrm{M}_t(x)$.

В каждой точке $x\in X_t^c$ последовательности (4)–(8) на единичных направлениях из определенного условием (7) множества $\{h(x,J)\}_{J\in \mathrm{M}_t^c(x)}$ по свойству проекций (см. [10]) и в согласии с формулировкой следствия и соотношениями (54) главы 2, достигается положительная величина

$$\delta v_k=\langle \nabla v_k(x), h(x,J)\rangle \geq$$
$$\geq \left\| p\left(x, J\cup L(x,\varepsilon)\right)\right\| \geq \varepsilon>0, \quad k\in J, \tag{9}$$

линейной части приращения каждого частного критерия эффективности $v_k(x)$, $k\in J$ для всякого непустого подмножества номеров $J\in \mathrm{M}_t^c(x)$. При условии

$$S=J\setminus I_{r+1}^m\neq\varnothing, \quad F=J\setminus I_1^r\neq\varnothing$$

величина

$$d'=\left\| p\left(x, S\cup L(x,\varepsilon)\right)\right\| - \left\| p\left(x, J\cup L(x,\varepsilon)\right)\right\| \geq 0$$

определяет, в согласии с (9), размер «уступки» подчиненных руководству, по сравнению с гарантированным значением

$$\left\| p\left(x, S\cup L(x,\varepsilon)\right)\right\| \leq \langle \nabla v_k(x), h\rangle, \quad k\in S,$$

линейной части приращения $\langle \nabla v_k(x), h\rangle$ критериев

$$v_k(x), \quad k\in S,$$

которое подчиненные могут обеспечить себе самостоятельно на соответствующем единичном направлении

$$h=\left\| p\left(x, S\cup L(x,\varepsilon)\right)\right\|^{-1} p\left(x, S\cup L(x,\varepsilon)\right);$$

в свою очередь величина

$$d''=\left\| p\left(x, F\cup L(x,\varepsilon)\right)\right\| - \left\| p\left(x, J\cup L(x,\varepsilon)\right)\right\| \geq 0$$

определяет размер «уступки» руководства подчиненным.

Следует напомнить, что в главе 2 удалось в итоге избежать параметризации на стандартном $(m-1)$ – мерном симплексе (см. §5 главы 2), так что введение в (3) одномерного параметра $c\in(0,1]$, – вторичная параметризация, – является вынужденной мерой, обусловленной большим числом $(m>>1)$ частных критериев эффективности.

§2. Вероятностная оценка сокращения степени ветвления

При выполнении условий пп. 1)–5) сформулируем несколько утверждений, позволяющих дать оценку степени ветвления на каждом шаге $t=1,2,\ldots$ итеративной процедуры (4), при переходе от произвольного опорного решения $x\in X_t^c$ к последующему решению $y\in X_{t+1}^c(x)$.

Лемма 1. *Если величина* $c_S=c_S(x,\varepsilon)$ *и полуинтервал* $C_S=C_S(x,\varepsilon)$ *определены условиями* (6), *множество* $\mathrm{J}_t^S(x)\neq\varnothing$, *то полуинтервал* C_S *удовлетворяет соотношениям*

$$\varnothing\neq C_S\subset C_F\subset(0,1], \quad \varnothing\neq S\subset F\subset I_1^r,$$

а его длина $\delta_S = \dfrac{|S|^{i+1}(1-c_S)+1}{|S|r^i+1}$ – *соотношениям*

$$0 < \frac{1}{|S|r^i+1} \le \delta_S \le \frac{|S|^{i+1}+1}{|S|r^i+1} < \frac{(|S|+1)^{i+1}+1}{(|S|+1)r^i+1} \le 1\,, \quad 1 \le |S| \le r-1\,,$$

$$0 < \frac{1}{|S|r^i+1} \le \delta_S < 1\,, \quad \min_{M\subset S,\, \mathrm{J}_t^M(x)\ne\varnothing} |M| < |S| = r\,,$$

$$\delta_\varnothing = 1\,, \quad \delta_{I_1^r} = 1\,, \quad \min_{M\subset I_1^r,\, \mathrm{J}_t^M(x)\ne\varnothing} |M| = r\,,$$

Доказательство. Равенство $\delta_\varnothing = 1$ следует из определения (6). Условие $S = I_1^r$, $\min_{M\subset I_1^r,\, \mathrm{J}_t^M(x)\ne\varnothing} |M| = r$ в согласии с определением (6) влечет утверждение

$$c_S = 0\,, \quad |S| = r\,, \quad \delta_S = \frac{r^{i+1}(1-c_S)+1}{r^{i+1}+1} = 1\,,$$

что и доказывает последнее утверждение леммы. В противном случае выполняется неравенство $\min_{M\subset S,\, \mathrm{J}_t^M(x)\ne\varnothing} |M| < r$, так что в согласии с определением (6) равенства $r = |S|$ и $c_S = 0$ не выполняются одновременно. Следовательно, поскольку неравенство $c_S > 0$, в согласии с утверждениями $\mathrm{J}_t^S(x) \ne \varnothing$, (5)–(7), и следствием влечет неравенства

$$|S| > 0\,,$$

$$\max_{k\in S\cup I_{r+1}^m} \left\| p\left(x, \{k\} \cup L(x,\varepsilon)\right)\right\| \ge \left\| p\left(x, S\cup L(x,\varepsilon)\right)\right\| \ge \varepsilon > 0\,, \quad 1 \ge c_S\,,$$

в условиях леммы справедливы соотношения

$$0 \le c_S \le 1\,, \quad 0 < |S| \le r\,, \quad 0 < |S|(1-c_S) < r\,,$$

$$0 < \frac{1}{|S|r^i+1} \le \delta_S = \frac{|S|^{i+1}(1-c_S)+1}{|S|r^i+1} < 1\,,$$

что и доказывает остальные утверждение леммы, поскольку отношение

$$\frac{|S|^{i+1}+1}{|S|r^i+1}$$

монотонно возрастает как функции величины $|S|$ в промежутке $1 \le |S| \le r$, а при условии

$$\varnothing \ne S \subset F \subset I_1^r$$

заданные соотношениями (7) проекции p удовлетворяют неравенствам

$$\max_{k\in S\cup I_{r+1}^m} \left\| p(x, \{k\}\cup L(x,\varepsilon))\right\| \le \max_{k\in F\cup I_{r+1}^m} \left\| p(x, \{k\}\cup L(x,\varepsilon))\right\|.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *При любом фиксированном значении параметра согласования* $c \in (0,1]$ *определенная соотношениями* (3)–(8) *последовательность точек*

$$x^1 \in \{x^1\} = X_1^c\,, \quad x^{t+1} \in X_{t+1}^c\left(x^t\right), \quad t = 1, 2, ...$$

совпадает с некоторой последовательностью точек

$$x^1 \in \{x^1\} = X_1\,, \quad x^{t+1} \in X_{t+1}\left(x^t\right), \quad t = 1, 2, ...,$$

определенной условиями следствия и соотношениями (52), (54), (56), (57), (59), (60), (67), (68) *главы* 2.

Доказательство. Из утверждения леммы 1 и в согласии с определениями (5), (6), (8) следует, что при любом фиксированном значении $c \in (0,1]$ в любой опорной точке $x \in X_t^c$ выполняется включение $\mathrm{M}_t^c(x) \subset \mathrm{M}_t(x)$, так что из соотношений (4), (7) и п. 5) настоящей главы, а так же условий следствия и соотношений (52) главы 2 следует утверждение

$$\varnothing \ne X_{t+1}^c\left(x^t\right) \subset X_{t+1}\left(x^t\right),$$

что и доказывает утверждение леммы.

Лемма 3. *Если единичный полуинтервал* $(0,1]$ *содержит конечное число* Q *полуинтервалов*

$$\pi_q = \left(a_q, a_q + \delta_q\right] \subset (0,1], \quad 1 \le q \le Q,$$

то математическое ожидание M_Q *числа полуинтервалов* π_q *, содержащих случайно выбранную точку* $c \in (0,1]$ *, равно сумме длин вложенных полуинтервалов:* $M_Q = \sum_{q=1}^{Q} \delta_q$.

Доказательство. Введем обозначения

$$b_q = a_q + \delta_q, \quad 1 \le q \le Q, \quad b_{Q+1} = 0,$$

и будем без ограничения общности полагать, что полуинтервалы π_q занумерованы в порядке убывания величин b_q :

$$b_q \ge b_{q+1}, \quad 1 \le q \le Q.$$

Если $j(l)$ – перестановка индексов в порядке убывания величин a_q :

$$a_{j(l)} \ge a_{j(l+1)}, \quad 1 \le l \le Q-1,$$

то каждому номеру l можно сопоставить номер

$$q(0) = 0, \quad q(l) = \max_{a_{j(l)} < b_q} q, \quad 1 \le l \le Q,$$

так что справедливо равенство $q(Q) = Q$. Применяя преобразование Абеля (см. [1]), математическое ожидание M_Q можно представить в виде

$$M_Q = \sum_{q=1}^{q(1)} q\left[b_q - b_{q+1}\right] - \left[a_{j(1)} - b_{q(1)+1}\right] +$$

$$+ \sum_{q=q(1)+1}^{q(2)} [q-1]\left[b_q - b_{q+1}\right] - \left[a_{j(2)} - b_{q(2)+1}\right] + \ldots =$$

$$= \sum_{l=0}^{Q-1} \sum_{q=q(l)+1}^{q(l+1)} [q-l]\left[b_q - b_{q+1}\right] + \sum_{l=1}^{Q}\left[b_{q(l)+1} - a_{j(l)}\right] =$$

$$= \sum_{q=1}^{Q} q\left[b_q - b_{q+1}\right] - \sum_{l=1}^{Q-1} l\left[b_{q(l)+1} - b_{q(l+1)+1}\right] + \sum_{l=1}^{Q} b_{q(l)+1} - \sum_{q=1}^{Q} a_q =$$

$$= \sum_{q=1}^{Q} b_q - \sum_{l=1}^{Q-1} b_{q(l)+1} + \sum_{l=1}^{Q} b_{q(l)+1} - \sum_{q=1}^{Q} a_q = \sum_{q=1}^{Q} b_q - \sum_{q=1}^{Q} a_q = \sum_{q=1}^{Q} \delta_q .$$

Лемма доказана.

Из утверждений леммы 1 следует, что для всех подмножеств $J \in \mathsf{M}_t(x)$ определенный соотношениями (6) полуинтервал

$$C_{J\setminus I_{r+1}^m} = \left(\frac{\left|J \setminus I_{r+1}^m\right|^{i+1} c_{J\setminus I_{r+1}^m}}{\left|J \setminus I_{r+1}^m\right| r^i + 1}, \frac{\left|J \setminus I_{r+1}^m\right|^{i+1} + 1}{\left|J \setminus I_{r+1}^m\right| r^i + 1} \right]$$

не пуст и вложен в единичный полуинтервал $(0,1]$. Но тогда, в согласии со следствием и определением (8) множеств $\mathsf{M}_t^c(x)$, при случайном выборе значения $c \in (0,1]$ отличную от нуля длину

$$\delta_{J\setminus I_{r+1}^m} = \frac{\left|J \setminus I_{r+1}^m\right|^{i+1}\left(1 - c_{J\setminus I_{r+1}^m}\right) + 1}{\left|J \setminus I_{r+1}^m\right| r^i + 1} > 0, \quad J \in \mathsf{M}_t(x)$$

соответствующего полуинтервала $C_{J\setminus I_{r+1}^m}$ можно интерпретировать как ненулевую вероятность включения произвольного направления $h(x,J)$, $J \in \mathsf{M}_t(x)$ во множество направлений $\{h(x,J)\}_{J\in \mathsf{M}_t^c(x)}$ из (7). Следовательно, математическое ожидание числа направлений из множества $\{h(x,J)\}_{J\in \mathsf{M}_t(x)}$, включенных во множество $\{h(x,J)\}_{J\in \mathsf{M}_t^c(x)}$, выражается, в согласии с леммой 3 и с учетом декомпозиции (5), величиной

$$\sum_{J\in \mathsf{M}_t(x)} \delta_{J\setminus I_{r+1}^m} = \sum_{\varnothing\subset S\subset I_1^r} \delta_S \left|\mathsf{J}_t^S(x)\right|,$$

где при условии $\mathsf{J}_t^S(x)=\varnothing$ полагаем формально $\delta_S=0$. В согласии с леммой 2 это позволяет в каждой опорной точке $x\in X_t$ сравнить число проходящих через нее последовательностей, заданных соотношениями (52)–(57), (59) главы 2 и (4)–(8) настоящей главы, и с учетом соотношения (1) и следствия оценить уменьшение степени ветвления величиной

$$\sigma_{вет} = \frac{\max\left\{1, \left|\mathsf{N}_t(x)\right|\right\}}{\sum\limits_{\varnothing\subset S\subset I_1^r} \delta_S \left|\mathsf{J}_t^S(x)\right|}. \tag{10}$$

В качестве примера оценим сокращение степени ветвления в случае

$$\mathsf{N}_t(x) = \left\{J\subset I_1^m \,\|J|=r\right\}$$

при равном числе критериев у руководства и подчиненных, $(m=2r)$, когда, согласно оценке (1), степень ветвления в опорной точке $x\in X_t$ максимальна:

$$\left|\mathsf{N}_t(x)\right| = C_{2r}^r = (2r)!(r!)^{-2}.$$

Согласно определению (6) и утверждению леммы 1, длины δ_S полуинтервалов C_S и соответствующие подмножества $\mathsf{J}_t^S(x)$ в (5) подчиняются соотношениям:

$$\delta_\varnothing = 1, \quad \left|\mathsf{J}_t^\varnothing(x)\right| = 1 + C_r^0 C_r^r = 2,$$

$$\delta_S \le \frac{|S|^{i+1}+1}{|S|r^i+1}, \quad \left|\mathsf{J}_t^S(x)\right| = C_r^{|S|} C_r^{r-|S|}, \quad 1\le |S| \le r,$$

так что уменьшение степени ветвления в согласии с (10) определяется величиной

$$\sigma_{вет} = \frac{C_{2r}^r}{\sum\limits_{\varnothing\subset S\subset I_1^r} \delta_S \left|\mathsf{J}_t^S(x)\right|} \ge \frac{C_{2r}^r}{1+\sum\limits_{q=0}^{r} \frac{q^{i+1}+1}{qr^i+1} C_r^q C_r^{r-q}}.$$

Следовательно, при полном числе критериев $m=2r=8$ для наименьшего значения параметра настройки $i=1$ степень ветвления сокращается более чем на 40%,

$$\sigma_{вет} \ge 1{,}678...$$

на каждом шаге вычислительного процесса (более чем в 175 раз за 10 шагов). При достаточно больших значениях параметра настройки $i\ge 5$ степень ветвления сокращается более чем в 8 раз,

$$\sigma_{вет} \ge 8{,}778...$$

на каждом шаге вычислительного процесса, что позволяет довольно гибко использовать существующие вычислительные мощности для аппроксимации множества эффективных векторных оценок.

§ 3. Доказательство теоремы сходимости в условиях вторичной параметризации

Прежде, чем приступить к доказательству теоремы сходимости с учетом декомпозиции и вторичной параметризации, докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *Пусть проекции* p, *множества* L, Q_t, X_t^c, I_j^l, M_t^c *и значения параметра* ε_t *определены соотношениями* (10), (22), (57) *главы* 2 *и соотношениями* (4)–(8)

настоящей главы. Если для некоторого непустого подмножества $J \subset I_1^m$ *последовательность опорных решений*

$$x^1 \in \{x^1\} = X_1^c, \quad x^{t+1} \in X_{t+1}^c(x^t), \quad t = 1, 2, ...$$

удовлетворяет условиям

$$0 < c \le \min\left\{ \frac{\left|J \setminus I_{r+1}^m\right|^{i+1} + 1}{\left|J \setminus I_{r+1}^m\right| r^i + 1}, \frac{\left(\left|J \setminus I_{r+1}^m\right| + 1\right)^{i+1} + 1}{\left(\left|J \setminus I_{r+1}^m\right| + 1\right) r^i + 1} \right\}, \tag{11}$$

$$Q_t(x^t) = \varnothing, \quad \operatorname{Arg} \max_{J \subset M \in \mathrm{M}_t^c(x^t)} |M| = \varnothing, \quad \lim_{t\to\infty} \varepsilon_t = 0,$$

то можно указать бесконечную возрастающую последовательность натуральных чисел $\{t_q\}_{q=1}^{\infty}$, *удовлетворяющую условию*

$$\lim_{q\to\infty} \left\| p\left(x^{t_q}, J \cup L\left(x^{t_q}, \varepsilon_{t_q}\right)\right)\right\| = 0.$$

Доказательство. Если существует бесконечная последовательность $\{t_q\}_{q=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условию

$$\left\| p\left(x^t, J \cup L\left(x^t, \varepsilon_t\right)\right)\right\| < \varepsilon_t, \quad t \in \{t_q\}_{q=1}^{\infty},$$

то утверждение леммы следует из последнего равенства в (11). В противном случае в условиях леммы найдется подмножество $F \subset I_1^m$ и бесконечное подмножество натуральных чисел $T \subset \{1, 2, ...\}$ такие, что в согласии с определением (5) и следствием выполняются соотношения

$$J \subset F \in \mathrm{J}_t^S(x^t) \subset \mathrm{M}_t(x^t), \quad t \in T,$$

$$J \setminus I_{r+1}^m \subset S = F \setminus I_{r+1}^m, \quad J \subset S \cup I_{r+1}^m.$$

Рассмотрим заданный в (6) полуинтервал

$$C_S(x^t, \varepsilon_t) = \left(\frac{|S|^{i+1} c_S(x^t, \varepsilon_t)}{|S| r^i + 1}, \frac{|S|^{i+1} + 1}{|S| r^i + 1} \right], \quad t \in T;$$

если справедливы соотношения

$$\{t_q\}_{q=1}^{\infty} \subset T, \quad c_S(x^t, \varepsilon_t) = 0, \quad t \in \{t_q\}_{q=1}^{\infty},$$

то из условий

$$\left|J \setminus I_{r+1}^m\right| \le |S|,$$

$$0 < c \le \min\left\{ \frac{\left|J \setminus I_{r+1}^m\right|^{i+1} + 1}{\left|J \setminus I_{r+1}^m\right| r^i + 1}, \frac{\left(\left|J \setminus I_{r+1}^m\right| + 1\right)^{i+1} + 1}{\left(\left|J \setminus I_{r+1}^m\right| + 1\right) r^i + 1} \right\},$$

в согласии с (6), (8) и утверждением леммы 1следуют включения

$$c \in C_S(x^t, \varepsilon_t), \quad J \subset F \in \mathrm{J}_t^S(x^t) \subset \mathrm{M}_t^c(x^t), \quad t \in \{t_q\}_{q=1}^{\infty},$$

что противоречит условию леммы $\operatorname{Arg} \max_{J \subset M \in \mathrm{M}_t^c(x^t)} |M| = \varnothing$.

Следовательно, в согласии с (6) $c_S(x^t, \varepsilon_t) \ne 0$, $S \ne \varnothing$, так что без ограничения общности можно утверждать:

$$c_S(x^t, \varepsilon_t) = \frac{\varepsilon_t}{\max_{k \in S \cup I_{r+1}^m} \left\| p\left(x^t, \{k\} \cup L\left(x^t, \varepsilon_t\right)\right)\right\|}, \quad t \in T,$$

и если существует подпоследовательность $\{t_q\}_{q=1}^{\infty} \subset T$, удовлетворяющая предельному соотношению

$$\lim_{q\to\infty} \max_{k \in S \cup I_{r+1}^m} \left\| p\left(x^{t_q}, \{k\} \cup L\left(x^{t_q}, \varepsilon_{t_q}\right)\right)\right\| = 0,$$

то с учетом утверждения $\varnothing \ne J \subset S \cup I_{r+1}^m$ и неравенств

$$\left\| p\left(x^t, J \cup L\left(x^t, \varepsilon_t\right)\right)\right\| \le \max_{k \in S \cup I_{r+1}^m} \left\| p\left(x^t, \{k\} \cup L\left(x^t, \varepsilon_t\right)\right)\right\|$$

выполняется утверждение леммы. В противном случае выполняются соотношения

$$\inf_{t\in T} \max_{k\in S\cup I_{r+1}^m} \left\| p\left(x^t, \{k\} \cup L\left(x^t, \varepsilon_t\right)\right)\right\| = \gamma > 0,$$

$$c_S\left(x^t, \varepsilon_t\right) \le \gamma^{-1}\varepsilon_t, \quad t \in T,$$

так что в условиях леммы для любого фиксированного значения параметра согласования

$$c \in \left(0, \min\left\{\frac{\left|J \setminus I_{r+1}^m\right|^{i+1} + 1}{\left|J \setminus I_{r+1}^m\right| r^i + 1}, \frac{\left(\left|J \setminus I_{r+1}^m\right| + 1\right)^{i+1} + 1}{\left(\left|J \setminus I_{r+1}^m\right| + 1\right) r^i + 1}\right\}\right],$$

ввиду условия $\left|J \setminus I_{r+1}^m\right| \le |S|$ и последнего равенства в (11) существует подпоследовательность $\left\{t_q\right\}_{q=1}^{\infty} \subset T$ такая, что при всех $t \in \left\{t_q\right\}_{q=1}^{\infty}$ в согласии с утверждением леммы 1 выполняются включения

$$c \in C_S\left(x^t, \varepsilon_t\right) = \left(\frac{|S|^{i+1} c_S\left(x^t, \varepsilon_t\right)}{|S| r^i + 1}, \frac{|S|^{i+1} + 1}{|S| r^i + 1}\right],$$

$$J \subset F \in \mathrm{J}_t^S\left(x^t\right) \subset \mathrm{M}_t^c\left(x^t\right),$$

что противоречит условию леммы $\operatorname{Arg} \max\limits_{J \subset M \in \mathrm{M}_t^c\left(x^t\right)} |M| = \varnothing$. Лемма доказана.

Пусть при построении в (2)–(8) аппроксимирующих последовательностей

$$\left\{w\left(X_t^c\right)\right\}_{t=1}^{\infty}, \quad c \in (0,1],$$

выполняются предположения 1)–5). Тогда при условиях, наложенных выше на вектор–функцию (1), справедлива

Теорема. Последовательность объединений аппроксимирующих множеств $W_t = \bigcup\limits_{0<c\le 1} w\left(X_t^c\right)$, $t = 1, 2, \ldots$ сходится к множеству эффективных векторов в метрике Хаусдорфа:

$$\lim_{t\to\infty} \Delta\left(w\left(X_e\right), \bigcup_{0<c\le 1} w\left(X_t^c\right)\right) = 0. \qquad (12)$$

Доказательство. Рассмотрим всевозможные бесконечные последовательности (2)–(8) аппроксимирующих множеств

$$\left\{w\left(X_t^c\right)\right\}_{t=1}^{\infty}, \quad c \in (0,1]. \qquad (13)$$

Из утверждения леммы 2 следует, что эти последовательности при произвольном фиксированном значении параметра согласования $c \in (0,1]$ удовлетворяет включениям

$$w\left(X_t^c\right) \subset w\left(X_t\right), \quad t = 1, 2, \ldots$$

где последовательность аппроксимирующих множеств $w\left(X_t\right)$, $t = 1, 2, \ldots$ определена формулировкой следствия и условиями (52), (54)–(57), (59), (60), (67), (68) главы 2. Тем самым и объединения соответствующих множеств удовлетворяют включениям

$$\bigcup_{0<c\le 1} w\left(X_t^c\right) \subset w\left(X_t\right), \quad t = 1, 2, \ldots$$

Но в согласии с утверждением (73) теоремы 4 главы 2 при перечисленных выше предположениях выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \Delta\left(w\left(X_t\right), w\left(X_e\right)\right) = 0,$$

которое с учетом последнего включения влечет предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} D\left(\bigcup_{0<c\le 1} w\left(X_t^c\right), w\left(X_e\right)\right) = 0,$$

где, согласно данному в главе 2 определению, величины

$$D(W,U)=\sup_{w\in W}\inf_{u\in U}\|w-u\|,$$
$$\Delta(W,U)=\max\{D(W,U),D(U,W)\}, \tag{14}$$

– соответственно отклонение множества W от множества U и расстояние по Хаусдорфу между этими множествами при условии $\varnothing\neq W,\, U\subset\mathbf{R}^m$.

Следовательно, с учетом соотношений (14), для доказательства утверждения (12) и теоремы в целом, достаточно доказать утверждение

$$\lim_{t\to\infty} D\left(\{z\},\, \bigcup_{0<c\le 1} w\left(X_t^c\right)\right)=0, \quad z\in w(X_e). \tag{15}$$

В согласии со следствием 2 из теоремы 1 главы 1, множество допустимых решений, доставляющих произвольную фиксированную эффективную векторную оценку $z\in w(X_e)$, совпадает с множеством реализаций максимума соответствующей функции минимума f_λ, $\lambda=z\left(\sum_{k=1}^m z_k\right)^{-1}$:

$$\{x\in X\,|\,w(x)=z\}=\operatorname{Arg}\max_{x\in X} f_\lambda(x)=\left\{x\in X\,\middle|\, f_\lambda(x)=\sum_{k=1}^m z_k\right\},$$
$$\lambda=z\left(\sum_{k=1}^m z_k\right)^{-1}, \quad f_\lambda(x)=\min_{1\le k\le m}\frac{w_k(x)}{\lambda_k}=\sum_{k=1}^m z_k \min_{1\le k\le m}\frac{w_k(x)}{z_k}. \tag{16}$$

Для всевозможных фиксированных значений $x^t\in X_t^c$, $\varepsilon_t=\varepsilon(x^t)$, $c\in(0,1]$ и произвольного фиксированного эффективного вектора $z\in w(X_e)$ можно указать непустое подмножество номеров $F_t^c=F_t^c(x^t)\subset I_1^m$ такое, что неравенства

$$\min_{k\in F}\left\{\frac{z_k}{w_k(x^t)}\right\}\ge(1-\varepsilon_t)\frac{\sum_{j\in F} z_j}{\sum_{j\in F} w_j(x^t)}\ge \max_{k\in I_1^m\setminus F}\left\{\frac{z_k}{w_k(x^t)}\right\}, \tag{17}$$

выполняются при условии $F=F_t^c$ и не выполняются при условии $F_t^c\neq F\subset F_t^c$, так что в соотношениях (4) согласно правилам (5)–(7) и следствию можно указать подмножество номеров $J=J_t^c\subset I_1^m$, удовлетворяющее соотношениям:

$$J_t^c=\begin{cases}\varnothing, & \text{если } \operatorname{Arg}\max\limits_{F_t^c\subset M\in \mathrm{M}_t^c(x^t)}|M|=\varnothing,\\ \arg\max\limits_{F_t^c\subset M\in \mathrm{M}_t^c(x^t)}|M|, & \text{если } \operatorname{Arg}\max\limits_{F_t^c\subset M\in \mathrm{M}_t^c(x^t)}|M|\neq\varnothing,\end{cases} \tag{18}$$

При произвольном фиксированном значении параметра $c\in(0,1]$ соответствующая последовательность множеств (4) содержит бесконечную последовательность точек $\{x^t\}_{t=1}^\infty$:

$$x^1\in\{x^1\}=X_1^c, \quad x^{t+1}=x^t+\alpha(x^t,J_t^c)h(x^t,J_t^c)\in X_{t+1}^c(x^t),$$
$$J_t^c\in \mathrm{M}_t^c(x^t), \quad \varepsilon_t=\varepsilon_t(x^t)>0, \quad t=1,2,... \tag{19}$$

которая в согласии с определениями (7), (17)–(19) порождает разбиение натурального ряда $\{1,2,\dots t,\dots\}$ на непересекающиеся подмножества T_0^c, T_1^c такие, что

$$T_0^c\cup T_1^c=\{1,2,\dots t,\dots\}, \quad T_0^c\cap T_1^c=\varnothing,$$
$$T_0^c=\{t\,|\,t\ge1,\ x^{t+1}=x^t\}=\{t\,|\,t\ge1,\ J_t^c=\varnothing\}, \tag{20}$$
$$T_1^c=\{t\,|\,t\ge1,\ x^{t+1}\neq x^t\}=\{t\,|\,t\ge1,\ J_t^c\neq\varnothing\},$$

где хотя бы одно из подмножеств T_0^c, T_1^c бесконечно.

Пусть последовательность $\{x^t\}_{t=1}^\infty$ из (19) такова, что подмножество T_1^c в (20) бесконечно. Тогда, с учетом определений (4)–(8), (16)–(19), эта последовательность содержит бесконечную подпоследовательность

$$\left\{x^{t_q}\right\}_{q=1}^{\infty}=\left\{x^t\right\}_{t\in T_1^c},$$
$$T_1^c=\left\{t_1,\dots t_q,\dots\right\}=\left\{t \,\middle|\, t\ge 1,\quad \left\|h\left(x^t,J_t^c\right)\right\|=1\right\}. \qquad (21)$$

Но тогда, в согласии с определением единичных направлений в (7), для всех $t\in T_1^c$ справедливы соотношения

$$F_t\subset J_t^c\in \mathrm{M}_t^c\left(x^t\right),\quad h\left(x^t,J_t^c\right)=\frac{p\left(x^t,J_t^c\cup L\left(x^t,\varepsilon_t\right)\right)}{\left\|p\left(x^t,J_t^c\cup L\left(x^t,\varepsilon_t\right)\right)\right\|},$$

так что, согласно правилу дробления шага (68) главы 2, приращения функции минимума (16) при некотором фиксированном значении $\omega\in(0,1)$ удовлетворяют неравенствам

$$f_\lambda\left(x^{t_{q+1}}\right)-f_\lambda\left(x^{t_q}\right)\ge \omega\alpha\left(x^{t_q},J_{t_q}^c\right)\left\|p\left(x^{t_q},\ J_{t_q}^c\cup L\left(x^{t_q},\varepsilon_{t_q}\right)\right)\right\|>0 \qquad (22)$$

при всех $q=1,2,\dots$.

Суммируя неравенства (22) при $q=1,2,\dots l$, получаем для всех $l=1,2,\dots$ неравенства

$$f_\lambda\left(x^{t_{l+1}}\right)-f_\lambda\left(x^{t_l}\right)\ge \omega\sum_{q=1}^{l}\alpha\left(x^{t_q},J_{t_q}^c\right)\left\|p\left(x^{t_q},\ J_{t_q}^c\cup L\left(x^{t_q},\varepsilon_{t_q}\right)\right)\right\|, \qquad (23)$$

причем согласно (4), (19) выполняются соотношения

$$x^{t_{l+1}}\in X,\quad f_\lambda\left(x^{t_{l+1}}\right)\le \max_{x\in X} f_\lambda(x),\quad l=1,2,\dots \qquad (24)$$

поскольку в условиях теоремы функция минимума f_λ из (16) непрерывна на компакте X .

Согласно (22)–(24) бесконечный ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty}\alpha\left(x^{t_q},J_{t_q}^c\right)\left\|p\left(x^{t_q},\ J_{t_q}^c\cup L\left(x^{t_q},\varepsilon_{t_q}\right)\right)\right\|$$

состоит из положительных чисел и ограничен сверху. Следовательно, он сходится, так что выполняется равенство

$$\lim_{q\to\infty}\left\{\alpha\left(x^{t_q},J_{t_q}^c\right)\left\|p\left(x^{t_q},\ J_{t_q}^c\cup L\left(x^{t_q},\varepsilon_{t_q}\right)\right)\right\|\right\}=0. \qquad (25)$$

Бесконечная последовательность чисел $\left\{f_\lambda\left(x^{t_q}\right)\right\}_{q=1}^{\infty}$ ввиду (22) монотонно возрастает, а ввиду (24) – ограничена сверху. Следовательно, с учетом непрерывности функции f_λ на компакте X и включений $x^{t_q}\in X$, $q=1,2,\dots$ выполняется равенство

$$\lim_{q\to\infty} f_\lambda\left(x^{t_q}\right)=f_\lambda\left(x^\lambda\right),$$

где $x^\lambda\in X$ – произвольная предельная точка подпоследовательности (21). Но, по определению в (20), (21), множество предельных точек этой подпоследовательности совпадает с множеством предельных точек исходной последовательности из (19), так что из последнего равенства следует утверждение

$$x^\lambda\in X,\quad \lim_{t\to\infty} f_\lambda\left(x^t\right)=f_\lambda\left(x^\lambda\right), \qquad (26)$$

где $x^\lambda\in X$ – произвольная предельная точка последовательности $\left\{x^t\right\}_{t=1}^{\infty}$ из (19). Если подмножество T_1^c конечно, то утверждение (26) остается справедливым, так как в этом случае согласно (20), начиная с некоторого номера $\tau\ge 1$, последовательность $\left\{x^t\right\}_{t=1}^{\infty}$ не меняется, $x^t=x^\tau$, $t\ge\tau\ge 1$.

Соотношения (57) главы 2 устанавливают такую зависимость между подмножествами J_t^c и Q_t, что определенное соотношениями (20) множество T_0^c удовлетворяет включению

$$T_0^c\subset T_\varnothing^c=\left\{t \,\middle|\, t\ge 1,\quad Q_t=\varnothing\right\}=\left\{t \,\middle|\, t\ge 1,\quad \varepsilon_{t+1}<\varepsilon_t\right\}, \qquad (27)$$

причем множество T_0^c бесконечно по тем же основаниям, что и заданное соотношениями (77) главы 2 множество T_0. Следовательно, множество $T_{\varnothing}^{c}$ так же бесконечно, и выполняется равенство

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_t\left(x^t\right)=0\,, \tag{28}$$

соответствующее утверждению (75) главы 2 согласно определению параметров возмущения (57) главы 2.

Поскольку число удовлетворяющих неравенствам (17) различных непустых подмножеств F_t^c множества $I_1^m=\{k\,|\,1\le k\le m\}$ конечно и не превосходит 2^m-1, при любом фиксированном значении параметра $c\in(0,1]$ можно указать фиксированное подмножество

$$F\,,\ \varnothing\ne F\subset I_1^m \tag{29}$$

и бесконечное подмножество номеров $T_F^c\subset T_0^c$ такие, что

$$T_F^c=\left\{t\in T_0^c\,\middle|\,F_t^c=F\right\}. \tag{30}$$

Существует значение параметра $c\in(0,1]$ и бесконечное подмножество $T_{FF}^c\subset T_F^c$ такие, что соответствующая последовательность $\{x^t\}_{t=1}^{\infty}$ из (19) удовлетворяет условию

$$\lim_{t\in T_{FF}^c}\left\|p\left(x^t,\ F\cup L\left(x^t,\varepsilon_t\right)\right)\right\|=0\,. \tag{31}$$

Действительно, согласно (18), (27), (30) справедливо утверждение

$$Q_t=\varnothing\,,\quad \operatorname{Arg}\max_{F\subset M\in \mathrm{M}_t^c\left(x^t\right)}|M|=\varnothing\,,\quad t\in T_F^c\,,\quad c\in(0,1]. \tag{32}$$

Согласно определению множеств T_F^c в (30), всевозможные непустые подмножества $F\subset I_1^m$ определяют разбиение единичного полуинтервала $(0,1]$ на не более чем 2^m-1 непустых подмножеств G_F:

$$(0,1]=\bigcup_{F\in \mathrm{F}}G_F\,,$$
$$G_F=\left\{c\in(0,1]\,\middle|\,\left|T_F^c\right|=\infty\right\},\quad \mathrm{F}=\left\{F\subset I_1^m\,\middle|\,F\ne\varnothing\,,\,G_F\ne\varnothing\right\}, \tag{33}$$

некоторые из которых могут пересекаться между собой.

Если в (33) для некоторого подмножества $F\in\mathrm{F}$ можно указать значение $c\in G_F$, удовлетворяющее условию

$$0<c\le\min\left\{\frac{\left|F\setminus I_{r+1}^m\right|^{i+1}+1}{\left|F\setminus I_{r+1}^m\right|r^i+1}\,,\,\frac{\left(\left|F\setminus I_{r+1}^m\right|+1\right)^{i+1}+1}{\left(\left|F\setminus I_{r+1}^m\right|+1\right)r^i+1}\right\}, \tag{34}$$

то в согласии с утверждением леммы 4 при условиях (32), (34) равенств (28) влечет утверждение (31).

Если же условие (34) не выполняется, то при любых фиксированных $c\in G_F$, $F\in\mathrm{F}$ выполняются неравенства

$$\min\left\{\frac{\left|F\setminus I_{r+1}^m\right|^{i+1}+1}{\left|F\setminus I_{r+1}^m\right|r^i+1}\,,\,\frac{\left(\left|F\setminus I_{r+1}^m\right|+1\right)^{i+1}+1}{\left(\left|F\setminus I_{r+1}^m\right|+1\right)r^i+1}\right\}<c\le1\,,$$
$$0\le\left|F\setminus I_{r+1}^m\right|\le r\,,$$

что с учетом (33) невозможно для значения $c=\left(r^i+2\right)^{-1}\in(0,1]$. Это противоречие окончательно доказывает утверждение (31).

Согласно определению (57) параметров возмущения и утверждению леммы 7 главы 2 из утверждений (4), (17)–(19), (29)–(31), следует, что существует бесконечное подмножество $T\subset T_F^c\subset T_{\varnothing}^c$ такое, что выполняются условия

$$\lim_{t\in T} x^t = x^\lambda \in X\,, \quad \lim_{t\in T} \varepsilon_t = 0\,,$$

$$\lim_{t\in T} \left\| p\left(x^t, F \cup L\left(x^\lambda, 0\right)\right)\right\| = 0\,, \quad L\left(x^t, \varepsilon_t\right) \subset L\left(x^\lambda, 0\right), \qquad (35)$$

$$\min_{k\in F}\left\{\frac{z_k}{w_k\left(x^t\right)}\right\} \ge \left(1-\varepsilon_t\right)\frac{\sum_{j\in F} z_j}{\sum_{j\in F} w_j\left(x^t\right)} \ge \max_{k\in I_1^m\setminus F}\left\{\frac{z_k}{w_k\left(x^t\right)}\right\},$$

поскольку допустимое множество X – компакт.

Из утверждений (35) следуют соотношения

$$\left\| p\left(x^\lambda, F \cup L\left(x^\lambda, 0\right)\right)\right\| = 0\,,$$

$$\frac{z_k}{w_k\left(x^\lambda\right)} = \frac{z_l}{w_l\left(x^\lambda\right)},\ k,l\in F, \quad \frac{z_k}{w_k\left(x^\lambda\right)} \ge \frac{z_l}{w_l\left(x^\lambda\right)},\ k\in F,\ l\in I_1^m \setminus F. \qquad (36)$$

Действительно, в условиях теоремы функция $\left\| p\left(x, J \cup L\left(x^\lambda, 0\right)\right)\right\|$ непрерывна по x в каждой точке $x\in X$, так что из равенств в (35) следует первое равенство в (36). Перейдя в неравенствах (35) к пределу по $t\in T$, получим соотношения

$$\frac{z_k}{w_k\left(x^\lambda\right)} = \frac{\sum_{j\in F} z_j}{\sum_{j\in F} w_j\left(x^\lambda\right)} \ge \frac{z_l}{w_l\left(x^\lambda\right)}, \quad k\in F,\ l\in I_1^m \setminus F\,,$$

поскольку в условиях теоремы $x^t \in X$, $t = 1, 2, \ldots$, а вектор-функция w положительна и непрерывна на компакте X; это доказывает утверждение (36) в целом.

Поскольку вектор-функция w псевдовогнута на выпуклом компакте X, в главе 2 показано (см. теорему 4 и условия регулярности), что из соотношений (26), (36) с необходимостью следует неравенство

$$f_\lambda\left(x^\lambda\right) \ge \max_{x\in X} f_\lambda\left(x\right);$$

согласно определению функции f_λ в (16) из последнего неравенства следует утверждение (15). Теорема доказана.

В заключение настоящей главы перечислим основные результаты и сделаем некоторые критические замечания.

Для многокритериальных задач большой размерности сформулированы условия, при выполнении которых исходную процедуру построения последовательности аппроксимаций, сходящуюся (в метрике Хаусдорфа) к множеству эффективных векторных оценок

$$w\left(X_t\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} w\left(X_e\right),$$

можно заменить такой сходящейся в метрике Хаусдорфа процедурой

$$\bigcup_{0<c\le 1} w\left(X_t^c\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} w\left(X_e\right),$$

что для произвольного значения одномерного параметра согласования $c \in \left(0,1\right]$ при переходе от предыдущей аппроксимации $w\left(X_t^c\right)$ к последующей, $w\left(X_{t+1}^c\right)$, наибольшая степень ветвления существенно сокращается по сравнению с исходной процедурой. С помощью параметра настройки степень ветвления можно варьировать в широких пределах, что позволяет достаточно гибко использовать существующие вычислительные ресурсы для аппроксимации множества эффективных векторных оценок.

Вопрос устойчивости предлагаемых вычислительных процедур к погрешностям в настоящей главе не рассматривался, хотя для всякого фиксированного значения параметра согласования $c \in (0,1]$ соответствующую аппроксимирующую последовательность $\{w(X_t^c)\}_{t=1}^{\infty}$ можно по примеру главы 2 модифицировать (вернув обеспечивающий устойчивость параметр $b \in (0,1)$ в определение множеств M_t , M_t^c).

Введение одномерного параметра согласования $c \in (0,1]$, –вторичная параметризация, – является вынужденной мерой, обусловленной большим числом частных критериев эффективности. Поэтому предложенный подход с практической точки зрения предполагает построение на единичном полуинтервале некоторой δ – сети

$$\Gamma_\delta \subset (0,1],$$

которую, вообще говоря, следует конкретизировать, чтобы выполнялось утверждение

$$\bigcup_{c \in \Gamma_\delta} w(X_t^c) \xrightarrow[\delta \to 0,\ t \to \infty]{} w(X_e);$$

без такой конкретизации вторичную параметризацию в задачах большой размерности следует рассматривать как эмпирический прием, позволяющий построить более или менее удовлетворительную аппроксимацию множества эффективных векторов, тогда как с помощью исходной процедуры при ограниченных вычислительных ресурсах этого сделать не удается.

Заключение

В настоящей работе исследовались такие актуальные проблемы многокритериальной оптимизации, как аппроксимация множества эффективных векторов и оценка качества полученных аппроксимирующих множеств.

В первой главе были даны основные определения и сформулированы условия регулярности, а так же необходимые и достаточные условия существования слабо эффективного решения. Если выполняются предположения о непрерывной дифференцируемости и выпуклости функциональных ограничений и критериальных функций, m – количество частных критериев эффективности, то для произвольного доминируемого решения существует конечное число $2^m - 1$ направлений

$$h^J\ ,\quad \varnothing \neq J \subset \{k \mid 1 \le k \le m\}$$

поиска слабо эффективных решений, а определение каждого из направлений h^J сводится к решению задачи квадратичного программирования.

Во второй главе формально описана и теоретически обоснована устойчивая к погрешностям вычислений процедура построения последовательности $\{W_t\}_{t=1}^{\infty}$ аппроксимаций множества эффективных векторных оценок, опирающаяся на метод ε – возмущений. При предположениях, стандартных для классической задачи отыскания условного экстремума функции, доказана теорема о сходимости, согласно которой отклонение множества эффективных векторов от аппроксимирующего множества W_t и отклонение W_t от множества слабо эффективных векторов стремятся к нулю с ростом номера аппроксимации. Дана оценка наибольшей степени ветвления предложенной процедуры. Возможно объединение двух подходов к решению многокритериальных задач, развитых в главах 1 и 2: с помощью предложенного в главе 1 метода может быть определено множество опорных точек, обеспечивающих мультистарт для метода главы 2.

Поскольку с помощью различных численных методов, в том числе эвристических, могут быть получены несовпадающие аппроксимации одного и того же множества эффективных векторов, оценку качества аппроксимаций следует производить способом, не зависящим от конкретной процедуры построения аппроксимирующих множеств. Этой проблеме посвящена третья глава, где предложена интегральная функция сравнения, устанавливающая на множестве аппроксимаций такое бинарное отношение предпочтения, что аппроксимации, от которых множество эффективных векторов отклоняется незначительно, оказываются предпочтительнее любых других. Для вычисления значений функции сравнения методами численного интегрирования, решена задача разбиения области интегрирования (многомерного стандартного симплекса) равномерной кубической сеткой, что позволяет рассматривать введенную функцию сравнения в качестве подходящего инструмента оценки качества аппроксимирующих множеств. Дано обоснование альтернативного подхода к оценке качества аппроксимаций на основе интегральной функции полезности, которая определяется с помощью «идеальной» точки (вектора рекордных характеристик).

Четвертая глава посвящена задачам многокритериальной оптимизации при большом числе частных критериев эффективности. Подобные задачи возникают при решении ряда сложных экономических и научно технических проблем, когда процедура принятия решений является иерархической. Из-за большого числа частных критериев аппроксимация множества эффективных векторных оценок сопряжена со значительными вычислительными трудностями, для преодоления которых применяются методы иерархической декомпозиции, взаимных уступок и вторичной параметризации. Для оценки сокращения

степени ветвления (по сравнению со стандартной вычислительной процедурой) используется вероятностный подход.

Оценивая перспективы предложенного подхода, укажем на ряд нерешенных проблем. Процедуры аппроксимации множества эффективных векторных оценок в главах 2 и 4 основываются на одном из вариантов метода возможных направлений. В этой связи заслуживают внимания процедуры аппроксимации, использующие другие эффективные численные методы (в том числе такой мощный, как метод штрафных функций). Значительный интерес представляет так же разработка сходящихся процедур аппроксимации в отсутствие информации о выпуклости допустимого множества и (или) критериальных функций. При большом числе частных критериев эффективности согласование решений на разных иерархических уровнях может вызывать затруднения, если число таких уровней оказывается больше двух. Как и в случае двух уровней иерархии, остается открытым вопрос выбора конкретной δ – сети на соответствующем множестве параметров согласования.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство леммы 3 главы 2.

Предположим от противного, что в условиях леммы для некоторого фиксированного подмножества

$$J \neq I\,, \quad 1 \le |J| \le m-1$$

можно указать фиксированный вектор

$$\lambda \in \Lambda_J(w,\varepsilon) \setminus \bigcup_{\varnothing\,,\,J\neq M\subset J} \Lambda_M(w,\varepsilon)\,, \quad \lambda \notin \Lambda_M(u,\varepsilon)\,, \quad J \subset M \subset I\,,$$

причем без ограничения общности будем полагать, что выполняются неравенства

$$\frac{\lambda_k}{u_k} \ge \frac{\lambda_{k+1}}{u_{k+1}}\,, \quad 1 \le k \le m-1\,.$$

Тогда отрицание $\lambda \notin \Lambda_I(u,\varepsilon)$, в согласии с определением (12) множеств I, Λ_I и с учетом последних неравенств, влечет несовместность системы неравенств

$$\frac{\lambda_1}{u_1} \ge \frac{\lambda_2}{u_2} \ge \ldots \ge \frac{\lambda_m}{u_m} \ge \frac{1-\varepsilon}{\sum\limits_{j\in I} u_j}\,;$$

поскольку здесь заведомо верны все неравенства кроме последнего, то с необходимостью выполняются неравенства

$$\frac{1-\varepsilon}{\sum\limits_{j=1}^{m} u_j} > \frac{\lambda_m}{u_m}\,, \quad (1-\varepsilon)\frac{\sum\limits_{j=1}^{m-1}\lambda_j}{\sum\limits_{j=1}^{m-1} u_j} > \frac{\lambda_m}{u_m}\,,$$

где второе неравенство следует из первого.

Если $m \in J$, то в условиях леммы предпоследнее неравенство и включение $\lambda \in \Lambda_J(w,\varepsilon)$ по лемме 2 главы 2 влекут, согласно определению (12), неравенства

$$\frac{\lambda_m}{w_m} \ge (1-\varepsilon)\frac{\sum\limits_{j\in J}\lambda_j}{\sum\limits_{j\in J} w_j} \ge \frac{1-\varepsilon}{\sum\limits_{j\in I} w_j - \varepsilon \sum\limits_{j\in I\setminus J} w_j} \ge$$

$$\ge \frac{1-\varepsilon}{\sum\limits_{j\in I} w_j - \varepsilon \min\limits_{k\in I} w_k} \ge \frac{1-\varepsilon}{(1-2\varphi\varepsilon)\sum\limits_{j\in I} w_j} \ge \frac{(1-\varphi\varepsilon)(1-\varepsilon)}{(1-2\varphi\varepsilon)\sum\limits_{j\in I} u_j} > \frac{1-\varphi\varepsilon}{1-2\varphi\varepsilon}\frac{\lambda_m}{u_m} \ge$$

$$\ge \frac{1-\varphi\varepsilon}{(1-2\varphi\varepsilon)(1+\varphi\varepsilon)}\frac{\lambda_m}{w_m}\,,$$

что невозможно, поскольку в условиях леммы отношение

$$\frac{1-\varphi\varepsilon}{(1-2\varphi\varepsilon)(1+\varphi\varepsilon)} = \frac{1-\varphi\varepsilon}{1-\varphi\varepsilon-2\varphi^2\varepsilon^2} > 1\,.$$

Следовательно, условие $m \in J$ не выполняется и справедливы соотношения

$$m \notin J\,, \quad J \subset M(1), \quad M(i) = \{k \mid 1 \le k \le m-i\}, \quad (1-\varepsilon)\frac{\sum\limits_{j\in M(1)}\lambda_j}{\sum\limits_{j\in M(1)} u_j} > \frac{\lambda_m}{w_m}\,.$$

Предположим по индукции, что для некоторого номера q, $1 \le q \le m-|J|-1$ выполняются соотношения

$$m-i+1 \notin J\,, \quad J \subset M(i), \quad (1-\varepsilon)\frac{\sum\limits_{j\in M(i)}\lambda_j}{\sum\limits_{j\in M(i)} u_j} > \frac{\lambda_{m-i+1}}{u_{m-i+1}}\,, \quad 1 \le i \le q\,,$$

совпадающие с предыдущими соотношениями при условии $q = 1$.

Поскольку, согласно предположению от противного, справедливо отрицание

$$\lambda \notin \Lambda_{M(i)}(u,\varepsilon)\,, \quad 1 \le i \le q\,,$$

то в согласии с определением (12) подмножеств Λ_M каждая система неравенств

$$\frac{\lambda_1}{u_1} \ge \frac{\lambda_2}{u_2} \ge \ldots \ge \frac{\lambda_{m-i}}{u_{m-i}} \ge (1-\varepsilon)\frac{\sum_{j\in M(i)}\lambda_j}{\sum_{j\in M(i)}u_j} \ge \frac{\lambda_{m-i+1}}{u_{m-i+1}} \ge \ldots \ge \frac{\lambda_m}{u_m},$$

несовместна для каждого номера i, $1 \le i \le q$. Но тогда с необходимостью из предположения по индукции следует нарушение $(m-i)$ – го неравенства. Тем самым выполняются неравенства

$$(1-\varepsilon)\frac{\sum_{j\in M(q)}\lambda_j}{\sum_{j\in M(q)}u_j} > \frac{\lambda_{m-q}}{u_{m-q}}, \quad (1-\varepsilon)\frac{\sum_{j\in M(q+1)}\lambda_j}{\sum_{j\in M(q+1)}u_j} > \frac{\lambda_{m-q}}{u_{m-q}},$$

причем второе следует из первого, поскольку отношение $\dfrac{\sum_{j\in M(i)}\lambda_j}{\sum_{j\in M(i)}u_j}$ с ростом номера i не убывает.

Если $m-q \in J$, то в условиях леммы предпоследнее неравенство и включение $\lambda \in \Lambda_J(w,\varepsilon)$, согласно определению (12) по лемме 2 главы 2 влекут ввиду условия $M(q)\setminus J \ne \varnothing$ неравенства

$$\frac{\lambda_{m-q}}{w_{m-q}} \ge (1-\varepsilon)\frac{\sum_{j\in J}\lambda_j}{\sum_{j\in J}w_j} \ge \frac{(1-\varepsilon)\sum_{j\in M(q)}\lambda_j}{\sum_{j\in M(q)}w_j - \varepsilon\sum_{j\in M(q)\setminus J}w_j} \ge$$

$$\ge \frac{(1-\varepsilon)\sum_{j\in M(q)}\lambda_j}{\sum_{j\in M(q)}w_j - \varepsilon\min_{k\in I}w_k} \ge \frac{1-\varepsilon}{1-2\varphi\varepsilon}\frac{\sum_{j\in M(q)}\lambda_j}{\sum_{j\in M(q)}w_j} \ge \frac{(1-\varphi\varepsilon)(1-\varepsilon)}{1-2\varphi\varepsilon}\frac{\sum_{j\in M(q)}\lambda_j}{\sum_{j\in M(q)}u_j} >$$

$$> \frac{1-\varphi\varepsilon}{1-2\varphi\varepsilon}\frac{\lambda_{m-q}}{u_{m-q}} \ge \frac{(1-\varphi\varepsilon)}{(1-2\varphi\varepsilon)(1+\varphi\varepsilon)}\frac{\lambda_{m-q}}{w_{m-q}} > \frac{\lambda_{m-q}}{w_{m-q}},$$

что невозможно. Следовательно, справедливо отрицание $m-q \notin J$, и с учетом установленных выше соотношений, предположение по индукции выполняется также и для номера $i = q+1$. Тем самым в условиях предположения от противного по индукции доказано утверждение

$$k \notin J, \quad |J|+1 \le k \le m,$$

$$J = M(m-|J|) = \{k \mid 1 \le k \le |J|\},$$

$$(1-\varepsilon)\frac{\sum_{j=1}^{r+1}\lambda_j}{\sum_{j=1}^{r+1}u_j} > \frac{\lambda_{r+1}}{u_{r+1}}, \quad (1-\varepsilon)\frac{\sum_{j=1}^{r}\lambda_j}{\sum_{j=1}^{r}u_j} > \frac{\lambda_{r+1}}{u_{r+1}}, \quad |J| \le r \le m-1,$$

$$\frac{\lambda_1}{u_1} \ge \frac{\lambda_2}{u_2} \ge \ldots \ge \frac{\lambda_{|J|}}{u_{|J|}} > \frac{\lambda_{|J|+1}}{u_{|J|+1}} \ge \frac{\lambda_{|J|+2}}{u_{|J|+2}} \ge \ldots \ge \frac{\lambda_m}{u_m};$$

последнее строгое неравенство справедливо, поскольку равенство $\dfrac{\lambda_{|J|}}{u_{|J|}} = \dfrac{\lambda_{|J|+1}}{u_{|J|+1}}$ по доказанному выше влечет утверждение

$$k \notin J, \quad |J| \le k \le m, \quad |J| = |J|-1$$

что невозможно. Следовательно, можно указать подмножество

$$M \subset J, \quad M \ne \varnothing, J, \quad \lambda \in \Lambda_M(u,\varepsilon) \setminus \bigcup_{Q \ne M \subset Q \subset J}\Lambda_Q(u,\varepsilon).$$

В самом деле, согласно предположению от противного, по лемме 1 главы 2 найдется непустое подмножество

$$M \subset I, \quad J \not\subset M, \quad \lambda \in \Lambda_M(u,\varepsilon) \setminus \bigcup_{Q \ne M \subset Q \subset J}\Lambda_Q(u,\varepsilon),$$

но в случае $M \setminus J \ne \varnothing$ по определению (12) подмножеств Λ_M можно указать номера k, l, удовлетворяющие условиям

$$k \in J \setminus M\ ,\ l \in M \setminus J\ ,$$

$$k \le |J| < l\ ,\quad \frac{\lambda_l}{u_l} \ge \frac{\lambda_k}{u_k}\ ,$$

что противоречит предыдущим неравенствам.

Заметим, что установленные выше соотношения формально выполняются при условии $J = I$, что позволяет рассматривать далее этот случай наряду с остальными.

Итак, в условиях леммы из предположения от противного следует, что существует подмножество M, удовлетворяющее условиям

$$\varnothing\ ,\ J \ne M \subset J\ ,\quad \lambda \in \Lambda_M(u,\varepsilon) \setminus \bigcup_{Q \ne M \subset Q \subset J} \Lambda_Q(u,\varepsilon)\ ,$$

причем по индукции доказано выполнение соотношений

$$(1-\varepsilon)\frac{\sum_{j=1}^{r+1}\lambda_j}{\sum_{j=1}^{r+1}u_j} > \frac{\lambda_{r+1}}{u_{r+1}}\ ,\quad (1-\varepsilon)\frac{\sum_{j=1}^{r}\lambda_j}{\sum_{j=1}^{r}u_j} > \frac{\lambda_{r+1}}{u_{r+1}}\ ,\quad |J| \le r \le m-1\ ,$$

Если $|J| \in M$, то в условиях леммы включение $\lambda \in \Lambda_M(u,\varepsilon)$ по лемме 2 главы 2 влечет, согласно определению (12), неравенства

$$\frac{\lambda_{|J|}}{u_{|J|}} \ge (1-\varepsilon)\frac{\sum_{j\in M}\lambda_j}{\sum_{j\in M}u_j} \ge \frac{(1-\varepsilon)\sum_{j\in J}\lambda_j}{\sum_{j\in J}u_j - \varepsilon\sum_{j\in J\setminus M}u_j} \ge$$

$$\ge \frac{(1-\varepsilon)\sum_{j\in J}\lambda_j}{(1+\varphi\varepsilon)\left(\sum_{j\in J}w_j - \varepsilon\min_{k\in I}w_k\right)} \ge \frac{1-\varepsilon}{(1+\varphi\varepsilon)(1-2\varphi\varepsilon)}\frac{\sum_{j\in J}\lambda_j}{\sum_{j\in J}w_j} \ge$$

$$\ge \frac{(1-\varphi\varepsilon)(1-\varepsilon)}{(1-2\varphi\varepsilon)(1+\varphi\varepsilon)}\frac{\sum_{j\in J}\lambda_j}{\sum_{j\in J}u_j} > \frac{(1-\varphi\varepsilon)}{(1-2\varphi\varepsilon)(1+\varphi\varepsilon)}\frac{\lambda_{|J|}}{u_{|J|}} > \frac{\lambda_{|J|}}{u_{|J|}}\ ,$$

что невозможно. Следовательно, справедливо отрицание $|J| \notin M$, и по индукции (тем же способом, что и выше) можно доказать, что существует подмножество M, удовлетворяющее условиям

$$\varnothing\ ,\ J \ne M \subset J\ ,\quad \lambda \in \Lambda_M(u,\varepsilon) \setminus \Lambda_M(w,\varepsilon)\ ,\quad M = \{k \mid 1 \le k \le |M|\},$$

$$(1-\varepsilon)\frac{\sum_{j=1}^{r+1}\lambda_j}{\sum_{j=1}^{r+1}u_j} > \frac{\lambda_{r+1}}{u_{r+1}}\ ,\quad (1-\varepsilon)\frac{\sum_{j=1}^{r}\lambda_j}{\sum_{j=1}^{r}u_j} > \frac{\lambda_{r+1}}{u_{r+1}}\ ,\quad |M| \le r \le m-1\ .$$

Тем самым из отрицания $\lambda \notin \Lambda_M(w,\varepsilon)$ следует ввиду (12) несовместность системы неравенств

$$\min_{1\le k\le|M|}\frac{\lambda_k}{w_k} \ge (1-\varepsilon)\frac{\sum_{j=1}^{|M|}\lambda_j}{\sum_{j=1}^{|M|}w_j} \ge \max_{|M|+1\le l\le|I|}\frac{\lambda_l}{w_l}\ ,$$

так что выполняется одно из двух условий:

а) существует номер

$$p\in I\setminus M=\{k \,\|M|+1\le k\le |I|\},\quad \frac{\lambda_p}{w_p}\ge(1-\varepsilon)\frac{\sum_{j=1}^{|M|}\lambda_j}{\sum_{j=1}^{|M|}w_j}\ ,$$

б) такого номера нет, существует непустое подмножество

$$M_1=\operatorname{Arg}\min_{1\le k\le |M|}\frac{\lambda_k}{w_k}\subset M\ ,\quad (1-\varepsilon)\frac{\sum_{j=1}^{|M|}\lambda_j}{\sum_{j=1}^{|M|}w_j}>\frac{\lambda_l}{w_l}\ ,\quad l\in M_1\bigcup(I\setminus M).$$

В случае а) по лемме 2 главы 2 и в согласии с определением (12), в условиях леммы включение $\lambda\in\Lambda_M(u,\varepsilon)$ влечет неравенства

$$\frac{\lambda_p}{u_p}\ge\frac{1}{1+\varphi\varepsilon}\frac{\lambda_p}{w_p}\ge\frac{1-\varepsilon}{1+\varphi\varepsilon}\frac{\sum_{j=1}^{|M|}\lambda_j}{\sum_{j=1}^{|M|}w_j}\ge\frac{(1-\varphi\varepsilon)(1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{p}\lambda_j}{(1+\varphi\varepsilon)\left(\sum_{j=1}^{p}u_j-\varepsilon\sum_{j=|M|+1}^{p}u_j\right)}\ge$$

$$\ge\frac{(1-\varphi\varepsilon)(1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{p}\lambda_j}{(1+\varphi\varepsilon)\left(\sum_{j=1}^{p}u_j-\varepsilon\min_{k\in I}u_k\right)}\ge\frac{(1-\varphi\varepsilon)(1-\varepsilon)}{(1+\varphi\varepsilon)(1-2\varphi\varepsilon)}\frac{\sum_{j=1}^{p}\lambda_j}{\sum_{j=1}^{p}u_j}>$$

$$>\frac{1-\varphi\varepsilon}{(1+\varphi\varepsilon)(1-2\varphi\varepsilon)}\frac{\lambda_p}{u_p}>\frac{\lambda_p}{u_p}\ ,$$

что невозможно.

В случае б) с необходимостью выполняется условие

$$(1-\varepsilon)\frac{\sum_{j\in M}\lambda_j}{\sum_{j\in M}w_j}>\frac{\lambda_l}{w_l}\ ,\quad l\in M_1\bigcup(I\setminus M),$$

так что справедливо утверждение

$$(1-\varepsilon)\frac{\sum_{j\in M\setminus M_1}\lambda_j}{\sum_{j\in M\setminus M_1}w_j}>\frac{\lambda_l}{w_l}\ ,\quad l\in M_1\bigcup(I\setminus M),$$

тогда как утверждение

$$\min_{k\in M\setminus M_1}\frac{\lambda_k}{w_k}\ge(1-\varepsilon)\frac{\sum_{j\in M\setminus M_1}\lambda_j}{\sum_{j\in M\setminus M_1}w_j}$$

несправедливо, поскольку совместно с предыдущим влечет включение $\lambda\in\Lambda_{M\setminus M_1}(w,\varepsilon)$, что противоречит предположению от противного ввиду включения $M\setminus M_1\subset J$. Следовательно, существует непустое подмножество

$$M_2=\operatorname{Arg}\min_{k\in M\setminus M_1}\frac{\lambda_k}{w_k}\subset M\setminus M_1\ ,$$

$$(1-\varepsilon)\frac{\sum_{j\in M\setminus M_1}\lambda_j}{\sum_{j\in M\setminus M_1}w_j}>\frac{\lambda_l}{w_l}\ ,\quad l\in M_1\bigcup M_2\bigcup(I\setminus M),$$

так что, продолжая исключать из множества M непустые подмножества $M_1, M_2, M_3,\ldots$, мы исчерпаем множество M на некотором подмножестве

$$M_d\ne\varnothing\ ,\quad M=\bigcup_{1\le i\le d}M_i\subset I$$

и придем к соотношению

$$(1-\varepsilon)\frac{\sum\limits_{j\in M_d}\lambda_j}{\sum\limits_{j\in M_d} w_j} > \frac{\lambda_l}{w_l}\ , \quad l\in I\ ,$$

что невозможно ввиду неравенств $0<\varepsilon<1$. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Докажем, что количество элементов во множестве $\mathsf{M}\subset 2^I$ не вложенных друг в друга подмножеств конечного множества $I=\{k \mid 1\le k\le m\}$, не превосходит величину наибольшего биномиального коэффициента,

$$|\mathsf{M}|\le C_m^{\left\lfloor \frac{m}{2}\right\rfloor}=\frac{m\,!}{\left\lfloor \frac{m}{2}\right\rfloor!\left(m-\left\lfloor \frac{m}{2}\right\rfloor\right)!}\ ,$$

где $\lfloor z\rfloor$ – наибольшее целое, не превосходящее величину z.

Действительно, всякому множеству $\mathsf{M}=\{J_i\}_{i=1}^S\subset 2^I$ не вложенных друг в друга подмножеств соответствует множество дополнений $\mathsf{N}=\{\overline{J}_i\}_{i=1}^S\subset 2^I$, так же не вложенных друг в друга (поскольку включения $A\subset B\subset I$ влекут включение $\overline{B}=I\setminus B\subset\overline{A}=I\setminus A$), причем $|\mathsf{M}|=|\mathsf{N}|=S$. Поэтому если у множества M подмножества занумерованы в следующем порядке,

$$|J_i|\le|J_{i+1}|\ ,\quad 1\le i\le S-1\ ,$$

то подмножество минимальной величины удовлетворяет соотношениям

$$J_1=Q_1\in\mathsf{M}\ ,\quad |Q_1|=q\le\left\lfloor \frac{m}{2}\right\rfloor,$$

поскольку в противном случае этим соотношениям удовлетворяет множество дополнений.

Тогда в следующем по величине подмножестве

$$J_2\in\mathsf{M}\ ,\quad |J_2|\ge|J_1|=q\ ,$$

можно выбрать подмножество Q_2 минимальной величины q,

$$Q_2\subset J_2\ ,\quad Q_2\ne Q_1=J_1\ ,\quad |Q_2|=|Q_1|=q\ ,$$

так как в противном случае $J_2=J_1$, что невозможно. В следующем по величине множестве

$$J_3\in\mathsf{M}\ ,\quad |J_3|\ge|J_2|\ge|J_1|=q\ ,$$

можно выбрать подмножество Q_3 минимальной величины q,

$$Q_3\subset J_3\ ,\quad Q_3\ne Q_1, Q_2\ ,\quad |Q_3|=|Q_2|=|Q_1|=q\ ,$$

так как в противном случае из условия $J_1=Q_1\not\subset J_3$ с необходимостью следует равенство $Q_2=J_3$; но тогда с учетом величины конечных множеств выполняются равенства $Q_2=J_2=J_3$, что невозможно.

Рассуждая далее тем же способом, приходим к утверждению, что во всяком подмножестве

$$J_i\in\mathsf{M}\ ,\quad 1\le i\le S$$

можно указать вложенное подмножество

$$Q_i\subset J_i\ ,\quad Q_i\ne Q_l\ ,\quad i\ne l\ ,$$

$$|Q_i|=q\ ,\quad 1\le i\le S\ .$$

Но число таких подмножеств не превосходит числа сочетаний C_m^q и, следовательно, не превосходит величины наибольшего биномиального коэффициента,

$$S\le C_m^q\le C_m^{\left\lfloor \frac{m}{2}\right\rfloor}\ ,$$

что и требовалось с учетом равенства $|\mathsf{M}|=S$.

Литература

1. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
2. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. М.: Изд–во МГУ, 1983.
3. Трауб Дж., Вожьняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир. 1983.
4. Рабинович Я.И. Об отыскании слабо эффективных решений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44 № 4. С. 613–622.
5. Демьянов В.Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
6. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. М.: Наука, 1973.
7. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1975.
8. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. М.: Наука, 1963.
9. Федоров В.В. Численные методы максимина. М.: Наука,1979.
10. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.
11. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
12. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
13. Рабинович Я.И. О диалоговом поиске экстремума функции с неопределенным градиентом // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. 1981. № 2. С. 23–30.
14. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

15. Краснощеков П.С., Морозов В.В., Попов Н.М. Оптимизация в автоматизированном проектировании. М.: МАКС Пресс, 2008.
16. Нефедов В.Н. Методы регуляризации многокритериальных задач оптимизации. М: МАИ, 1984.
17. Рабинович Я.И. Построение множества эффективных векторов методом ε– возмущений. //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. №5. С. 824–845.
18. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений. М: МАКС Пресс, 2008.
19. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. М: Мир, 1990.
20. Сухарев А.Г. Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. М.: Наука, 1989.
21. Рабинович Я.И. Многокритериальная иерархическая процедура улучшения опорного решения // ДАН. 1994. Т.338, №2. С. 177–179.
22. Рабинович Я.И. Решение многокритериальных задач большой размерности методом декомпозиции. //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. №1. С. 66–80.

Содержание