РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

М. А. ГОРЕЛОВ

ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ. ПРАВИЛО ДЕКАРТА

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2009

УДК 519.8, 517.2

Ответственный редактор
доктор физ.-матем. наук А.Ф. Кононенко

В классической теории оптимизации на решаемую задачу накладываются ограничения геометрического характера, типа дифференцируемости или выпуклости. На практике же задачи чаще всего задаются аналитически (явной формулой, дифференциальным уравнением и т.п.) В данной работе предлагается метод решения оптимизационных задач, использующий способ их аналитического задания. Если этот способ не слишком сложен, решение задачи может быть доведено до конца. В данной работе в качестве меры сложности решаемой задачи используется число перемен знаков в последовательности коэффициентов некоторого многочлена или квазимногочлена.

Ключевые слова: оптимизация, неравенства, малочлены.

Рецензенты: И.А. Копылов,
Л.Г. Гурин

Научное издание

1. Введение

Существует серьезная теория экстремальных задач. Она начинается с принципа Ферма, а затем через метод множителей Лагранжа и принцип максимума Понтрягина доходит до теории Милютина–Дубовицкого. Об этой теории можно прочесть в [1] или любом вузовском учебнике по теории оптимизации. Этот метод настолько общий, что позволяет, в принципе, решить любую задачу. Но именно «в принципе».

Я, как и все студенты-математики, изучал эту теорию. Но когда пришлось столкнуться с такими задачами на практике, выяснилось, что таким образом «довести до числа» решение задачи, взятой из жизни, а не из задачника, обычно или очень сложно, или попросту не удается. Каждый раз приходилось что-то придумывать. Общение с коллегами убедило меня, что это, скорее, правило, чем исключение.

Однажды я довольно долго провозился с задачей, возникшей при исследовании модели рынка ценных бумаг. А когда, наконец, нашел решение, выяснилось, что задачка совсем элементарная[1], правда «олимпиадная». Ее решение опубликовано в журнале «Рынок ценных бумаг» (1996г., №11). Несколько позднее, при исследовании другой модели теперь уже валютного рынка, та же идея сработала снова. На сей раз с задачей (см. задачу 138 ниже) я справился достаточно быстро. И стало понятно, что я имею дело не со случайной идеей, а с каким-то регулярным приемом.

Начав думать на эту тему, я вспомнил, что нечто похожее я видел в книге [2][2]. А, открыв ее, я нашел теорему, которая и стала цен-

---

[1] То есть не требующая знаний, выходящих за рамки школьной программы.

[2] Кроме правила Декарта, книга [2] содержит большую главу, посвященную доказательству неравенств. А вместе эти две темы так и не сошлись!

тральной в новом методе. Оказалось, что эту теорему сформулировал еще в 1637 г. великий французский математик и философ Рене Декарт (1596–1650).

А через несколько месяцев вышла в свет книга [3], из которой я узнал, что направление, открытое Декартом, в последние годы вновь стало активно развиваться. У него даже появилось свое название: теория малочленов (то есть многочленов, у которых мало слагаемых). Так, сам того не ведая, я со своей идеей «попал в струю».

Новое направление кажется мне актуальным и в теории оптимизации, в частности, по следующей причине. Лет десять назад мне пришлось читать лекции, посвященные использованию вычислительной техники в бизнесе. Готовясь к ним, я перечитал написанные во второй половине 70-х гг. прошлого века книги академика Н. Н. Моисеева, посвященные использованию компьютеров в принятии решений. В них Никита Николаевич давал прогноз развития как самой вычислительной техники, так и ее приложений. Мне бросилось в глаза следующее обстоятельство. За прошедшие годы развитие техники намного обогнало прогнозы. А оптимизационные методы используются намного реже, чем предполагал Моисеев.

У меня есть некое объяснение этому обстоятельству. Но чтобы его сформулировать, придется начать несколько издалека.

Понятие функции является одним из основных в математике, а потому не определяется. Все «знают», что такое функция, а строгого определения это понятие не имеет. Обычно только объясняют его, говоря, что это отображение одного множества в другое.

Оказывается, что уточнить интуитивные представления о функциях можно по-разному. В качестве примера приведу две цитаты из Эйлера: «Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменениям, то первые называют функциями вторых». «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств». Понятно, что первое определение гораздо шире второго. Во времена Эйлера велась активная дискуссия об определении функции, в которой кроме него приняли участие Даламбер, Даниил Бернулли, Лагранж и другие. Со временем споры утихли, а благодаря теории множеств господствующей стала первая из приведенных трактовок Эйлера. Вторая сохранилась в основном как теория аналитических функций комплексной переменной.

На первом, более широком, понимании функции и основывается классическая теория оптимизации. А между тем для компьютера такое понимание не очень подходит. Чтобы использовать компьютер, функцию нужно как-то конструктивно задать. Причем даже используемые в теории аналитических функций бесконечные ряды для этого не слишком удобны.

Гораздо лучше привычный со школы способ задания явной формулой[3]. Ну а если уж у нас, кроме самой функции есть и конкретный способ ее задания, то грех не использовать эти «лишние» данные при решении задачи. Причем, к счастью, мир устроен так, что практический интерес представляют функции, имеющие относительно простые способы задания. Тут и выходит на передний план теория малочленов, основное содержание которой можно сформулировать так: график функции, заданной «простой» формулой, тоже выглядит «просто». Это обстоятельство является ключевым в предлагаемом ниже методе, что и нашло отражение в названии работы.

Ниже мы будем пользоваться только старой теоремой Декарта. Уже она позволяет решить на удивление большое число на первый взгляд непохожих задач. Современные результаты носят гораздо более общий характер, а потому в наиболее простых (и, следовательно, интересных) случаях полученные оценки оказываются завышенными. Поэтому применить их мне пока не удалось. Зато тут есть поле для размышлений.

Мощность метода определяется, в конце концов, количеством задач, которые удается решить с его помощью. Я собирал задачи из самых разных источников. Чаще всего они формулировались как задачи на доказательство неравенств.

Доказательство неравенств очевидным образом связано с решением задач на наибольшие и наименьшие значения. В самом деле,

---

[3] При этом понятно, что одну и ту же функцию можно задать многими способами, а «большинство» функций вообще никак задать нельзя. Но это «большинство» во многих случаях не интересно!

если мы умеем находить минимум функции $f(x)$, то ничего не стоит доказать неравенство $f(x)\geq a$, где a – число (разумеется, если оно верно). И обратно, если мы доказали точное неравенство $f(x)\geq a$, то наименьшее значение функции $f(x)$ равно a.

Задачи на доказательство неравенств достаточно часто предлагают на олимпиадах. С подобными задачами время от времени приходится сталкиваться и профессиональным математикам. Это редкий, к сожалению, случай, когда «олимпиадная» математика тесно переплетается с профессиональной. Ниже даются ссылки именно на «олимпиадные» источники задач, поскольку соответствующие решения естественно считать самыми «элементарными» и самыми «красивыми». Заинтересованный читатель имеет возможность сравнить их с решением с помощью правила Декарта.

Ссылки даются после номера задачи в фигурных скобках, где указывается название олимпиады и год ее проведения. При этом используются сокращения, приведенные в приложении.

«Официальные» решения олимпиадных задач чаще всего основаны на сведении нужного неравенства к уже известному путем тождественных преобразований и замен переменных. В качестве «известного» иногда выступает очевидное неравенство $x^2\geq 0$, а иногда – какое-то стандартное неравенство, вроде неравенства Коши, неравенства Бернулли и т. п. Такой способ при очевидных достоинствах имеет три недостатка. Во-первых, он сопряжен, как правило, с длинными выкладками, что в условиях дефицита времени не очень хорошо. Во-вторых, угадать нужный способ преобразований или замену переменных во многих случаях совсем не просто. И пусть даже решение было кем-то найдено, «но почему это делалось так, а не иначе, и каким путем достигались подобные открытия, они не могли объяснить моему уму удовлетворительно» (Р. Декарт). И в третьих, количество «стандартных» неравенств в настоящее время так велико (см., например, работы [4–6], или более элементарные книги [7–9]), что запомнить их совершенно нереально. Даже имея под рукой эти книги, непросто отыскать нужное неравенство. Поэтому естественно желание найти метод, позволяющий доказывать неравенства, во-первых, без выкладок, во-вторых, без ссылок на другие неравенства, и в-третьих, естественным образом.

Разумеется, было бы наивным надеяться научиться решать все задачи одним способом. Но пару методов, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям, мне придумать удалось. Об одном из них я и хочу рассказать.

Предлагаемый метод обладает еще одним привлекательным свойством. Авторы книг на данную тему неоднократно отмечали одну сложность: имеющиеся результаты настолько многочисленны и разнообразны, что очень трудно отобрать и систематизировать материал для изложения. При нашем методе доказательства неравенство сразу оказывается включенным в некоторое параметрическое семейство. Особый интерес представляют неравенства, которые принадлежат двум или более семействам. И вообще интересно проанализировать «взаимное расположение» таких семейств. Но эта работа пока не проделана.

Основная часть материала сформулирована в виде упражнений. К сожалению, формат работы не позволил привести их полные решения. Ниже содержатся лишь краткие указания. Но много сил потрачено на то, чтобы расположить их в таком порядке, чтобы решение одного упражнения помогало решению следующего. Поэтому первая подсказка содержится уже в контексте.

Ну а теперь от общих рассуждений пора перейти к конкретным задачам. Новый метод лучше всего осваивать на примерах. Надеюсь, что приведенных ниже будет достаточно, чтобы последние задачи решать «в уме».

Но предварительно – одно замечание. В предлагаемом методе велика роль геометрической составляющей. Поэтому каждый раз, решая задачу или разбирая приведенное решение, постарайтесь нарисовать или хотя бы представить правильный график. Это совсем нетрудно, а многие вещи станут понятнее. Я не рисую их исключительно ради экономии места.

2. Вводные задачи

Начнем с совсем простого утверждения. Пусть числа a_0, $a_1,\ldots,a_{n-1}$ неотрицательны. Тогда уравнение

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x-a_0=0$$

имеет не более одного положительного корня. В самом деле, в левой части этого уравнения стоит функция, которая монотонно возрастает при $x \geq 0$, а потому принимает каждое свое значение не более одного раза. Следующее утверждение уже более содержательно.

Задача 1. {М.1955} Пусть числа a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ неотрицательны. Докажите, что уравнение

$$x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1 x - a_0 = 0$$

имеет не более одного положительного корня.

Решение. Разделим наше уравнение на x^{n-1}. Новое уравнение

$$x - a_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{x} - \ldots - \frac{a_1}{x^{n-2}} - \frac{a_0}{x^{n-1}} = 0$$

имеет столько же положительных корней, сколько и исходное. Но если числа a и k положительны, то функция $-\frac{a}{x^k}$ монотонно возрастает при $x>0$. Значит, в левой части этого уравнения стоит возрастающая на положительной полуоси функция и, следовательно, уравнение не может иметь более одного положительного корня.

Упражнения

1. {Л.1971} Пусть числа a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ неотрицательны. Докажите, что уравнение

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \ldots - a_1 x - a_0 = 0$$

имеет не более одного положительного корня.

2. Пусть числа a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ неотрицательны. Докажите, что уравнение

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{n-k}x^{n-k} - a_{n-k+1}x^{n-k+1} \ldots - a_1 x - a_0 = 0$$

имеет не более одного положительного корня.

Для полноты заметим, что если в условиях упражнения 2 не все числа $a_0, a_1, \ldots, a_{n-k+1}$ равны нулю, то один положительный корень все-таки есть. Действительно, при $x \to \infty$ значение левой части положительно, при положительных $x \to 0$ оно будет отрицательным, а функция, стоящая в левой части, непрерывна.

Полученные результаты могут служить достаточно серьезным орудием при решении других задач. Приведем примеры.

Задача 2. {Л.1989} Вещественные числа a, b, c принадлежат отрезку $[0,1]$. Докажите, что $2(a^3+b^3+c^3) - (a^2b+b^2c+c^2a) \leq 3$.

Решение. Считая b и c параметрами, рассмотрим левую часть данного неравенства, как многочлен от одной переменной

$$f(x)=2x^3-bx^2-c^2x-(3-2b^3-2c^3+b^2c),$$

По сути, нужно доказать, что эта функция принимает неположительные значения на отрезке [0,1]. Для этого *необходимо* выполнение неравенств $f(0)\le 0$ и $f(1)\le 0$. Оказывается, что это условие является и *достаточным*!

В самом деле, допустим противное. Предположим, что $f(0)\le 0$, $f(1)\le 0$, но найдется такое x_0 на отрезке [0,1], что $f(x_0)>0$. Тогда на каждом из отрезков $[0,x_0]$ и $[x_0,1]$ функция $f(x)$ меняет знак. Но она непрерывна, а значит, на каждом из этих отрезков имеет корень. Итак, наша функция имеет, по крайней мере, два положительных корня (случай $f(0)=0$ следует рассмотреть особо). Но это противоречит результату задачи 1, так как условие $f(0)\le 0$ означает, что все коэффициенты многочлена $f(x)$, кроме первого, не положительны.

Чего же мы добились? Вместо доказательства одного неравенства нам теперь нужно доказать два. Но каждое из новых неравенств содержит меньше переменных, чем исходное. Поэтому можно надеяться, что каждое из них окажется проще первоначального. Тогда игра стоит свеч. Тем более что и идея доказательства есть.

Итак, нам нужно доказать неравенства $f(0)\le 0$ и $f(1)\le 0$, или в развернутом виде $2b^3-b^2c-(3-2c^3)\le 0$ и $2b^3-b^2c-b-(1+c^2-2c^3)\le 0$. Для их доказательства рассмотрим многочлены $g(x)=2x^3-cx^2-(3-2c^3)$ и $h(x)= 2x^3-cx^2-x-(1+c^2-2c^3)$, считая c параметром. Если $g(0)<0$ и $h(0)<0$, то все коэффициенты этих многочленов, кроме старших, не положительны, а значит, в силу результата задачи 1 *достаточно* доказать неравенства $g(1)\le 0$ и $h(1)\le 0$ (третий раз та же идея!). Итак, все свелось к доказательству неравенств $-(3-2c^3)\le 0$, $2c^3-c-1\le 0$ и $-(1+c^2-2c^3)\le 0$, $2c^3-c^2-c\le 0$. Но они уже очевидны.

При известном навыке все эти рассуждения можно проделать «в уме». Это немаловажно и на олимпиаде, в условиях нехватки времени, и в профессиональной работе математика, когда подобные задачи являются вспомогательными и надолго отвлекаться от основного рассуждения неудобно. Разумеется, при оформлении работы на олимпиаде не стоит ссылаться на результат задачи 1. Лучше воспроизвести ее решение, которое занимает всего один абзац.

Упражнения

3. Заполните пробелы в решении задачи 2.

4. {О.1995} Решите уравнение $x^{19}+x^{95}=2x^{19+95}$.

5. {Л.1988} Вещественные числа a и b таковы, что $0\le a,b\le 1$. Докажите, что $\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}\le 1$.[4]

6. {Л.1980} Докажите, что для любых a, b, c из отрезка [0,1] выполнено неравенство $3(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-2abc(a+b+c)\le 3$.

7. {Л.2002} Докажите для чисел a, b, $c\in[0,1]$ неравенство

$$a^{17}-a^{10}b^7+b^{17}-b^{10}c^7+c^{17}-c^{10}a^7\le 1.$$

8. {h1846.2003} Докажите, что для любого натурального n и любого натурального $k\le n$ выполняется неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\le 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}.$$

9. Знаменатель ненулевой геометрической прогрессии не меньше двух. Докажите, что ни один из членов прогрессии нельзя представить в виде суммы конечного числа различных членов прогрессии.

10. {S.1999 г.} Докажите, что не существует натурального числа k такого, что $k^{1999}-k^{1998}=2k+2$.

Следующее утверждение может значительно пояснить приведенные выше рассуждения.

Задача 3. Функция $f(x)$ непрерывна на интервале I (конечном или бесконечном, открытом или замкнутом) и принимает каждое свое значение не более одного раза. Докажите, что тогда эта функция монотонна.

Решение. Допустим противное. Так как функция не является возрастающей, существуют такие числа x_1 и x_2, что $x_1<x_2$ и $f(x_1)<f(x_2)$, а так как она не является убывающей, существуют числа x_3 и x_4 для которых $x_3<x_4$ и $f(x_3)>f(x_4)$. Пусть y – наименьшее из чисел x_1, x_2, x_3,

---

[4] В этой и других задачах я не акцентирую внимание на определении тех значений переменных, при которых неравенство обращается в равенство. Этот вопрос важный, но относительно несложный. Поэтому я оставляю его для самостоятельного исследования.

x_4, а z – наибольшее и пусть a – наименьшее из чисел $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$, а b – наибольшее.

Докажем, что из четырех чисел x_1, x_2, x_3, x_4 можно выбрать три числа u, v и w так, что $u<v<w$ и либо $f(u)<f(v)>f(w)$, либо $f(u)>f(v)<f(w)$.

Если наибольшее значение a достигается в точке t, отличной от y и z, то тройка y, t, z – искомая.

Остается рассмотреть случаи, когда $f(y)=a$ либо $f(z)=a$. Рассмотрим первый из них (второй рассматривается аналогично). В силу условий $x_1<x_2$ и $x_3<x_4$ имеем $y\neq x_2$ и $y\neq x_4$. А так как значение $f(y)$ максимально, но $f(x_1)<f(x_2)$, то $y\neq x_1$. Значит, $y=x_3$. Тогда тройка x_3, x_1, x_2 искомая.

Но если $u<v<w$ и $f(u)<f(v)>f(w)$, то в силу теоремы о промежуточном значении при достаточно малом ε значение $f(v)-\varepsilon$ принимается в двух точках: одной, лежащей на интервале (u,v), а другой – на интервале (v,w). Но это противоречит условию. Аналогично получается противоречие и в случае $u<v<w$ и $f(u)>f(v)<f(w)$.

Значит, сделанное предположение неверно и функция f монотонна.

3. Правило Декарта

Надеюсь, рассмотренные примеры убедили вас, что результат упражнения 2 может быть весьма полезен. Жаль только, что воспользоваться им можно нечасто, поскольку он относится к многочленам достаточно специального вида. Поэтому естественно возникает вопрос, а нельзя ли обобщить соответствующее утверждение. Такое обобщение известно уже более трехсот лет. Но прежде чем обращаться к нему, напомним точную формулировку теоремы Ролля.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом отрезке $[a,b]$, дифференцируема на открытом интервале (a,b) и принимает на концах этого отрезка одно значение $f(a)=f(b)$. Тогда внутри интервала (a,b) найдется точка c, в которой производная функции $f(x)$ обращается в нуль.

Для доказательства теоремы нужно рассмотреть наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Если оба они равны $f(a)=f(b)$, то функция постоянна и ее производная равна нулю на всем интервале (a,b). Если же одно из этих значений отлично от $f(a)=f(b)$, то оно достигается в некоторой точке c, лежащей внутри интервала (a,b). А тогда согласно принципу Ферма производная функции $f(x)$ в точке c равна нулю.

Чтобы сформулировать интересующий нас результат, понадобятся некоторые определения. Пусть дана последовательность ненулевых действительных чисел $a_0, a_1,\ldots,a_n$. Будем говорить, что эта последовательность содержит k перемен знака, если среди чисел $a_0a_1, a_1a_2,\ldots,a_{n-1}a_n$ имеется ровно k отрицательных чисел. Индексы l, для которых $a_{l-1}a_l<0$, будем называть местами перемены знака. Например, последовательность 3, –1, –4, 1, 5 содержите две перемены знака, а 1 и 3 – места перемены знака этой последовательности.

Договоримся о способе записи многочленов. Обычно используется две системы записи. Когда записывают многочлен с числовыми коэффициентами, члены с нулевыми коэффициентами пропускают. А когда записывают многочлены с буквенными коэффициентами, то пишут все коэффициенты, предполагая, что некоторые из них могут быть равны нулю. Так удобнее чисто полиграфически. Нам будет удобнее использовать первый способ записи, даже когда коэффициенты буквенные. При таком способе записи произвольный многочлен запишется в виде

$$f(x)=a_kx^{n_k}+a_{k-1}x^{n_{k-1}}+\ldots+a_1x^{n_1}+a_0x^{n_0}\,. \qquad (1)$$

Будем предполагать, что коэффициенты $a_0,a_1,\ldots,a_n$ отличны от нуля, а показатели степеней убывают: $n_k>n_{k-1}>\ldots>n_1>n_0$. Такую форму записи многочлена будем называть стандартной.

Тогда результат упражнения 2 может быть сформулирован так: если последовательность коэффициентов $a_n, a_{n-1},\ldots,a_0$ многочлена, записанного в стандартной форме, содержит одну перемену знака, то он имеет не более одного положительного корня.

Упражнения

11. Докажите, что если в последовательности a,b,c есть ровно одна перемена знака, то квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет ровно один положительный корень.

12. Сколько положительных корней может иметь квадратный трехчлен ax^2+bx+c, если последовательность его коэффициентов содержит две перемены знаков.

Теперь легко сформулировать обобщение упражнения 2.

Теорема 1. (Правило Декарта) Пусть последовательность коэффициентов многочлена, записанного в стандартной форме, содержит m перемен знака. Тогда многочлен имеет не более m положительных корней.

Ввиду важности этой теоремы, приведем три доказательства.

Первое доказательство. Воспользуемся индукцией по числу членов k+1 в многочлене. Если k=0, то многочлен имеет всего одно слагаемое и либо вовсе не имеет корней, либо имеет нулевой корень. В обоих случаях число положительных корней равно нулю. Число перемен знака, очевидно, тоже равно нулю. Это дает базу индукции.

Предположим теперь, что утверждение задачи доказано для всех многочленов, содержащих не более k слагаемых, и рассмотрим многочлен (1), состоящий из k+1 одночлена. Не ограничивая общности, модно считать, что степень n_0=0 (в противном случае можно разделить многочлен на x^{n_0}, от чего ни количество положительных корней, ни число перемен знака в записи многочлена не изменится). Возможны четыре случая.

Случай 1. Оба коэффициента a_0 и a_1 положительны. Пусть $0<x_1\le\ldots\le x_l$ – корни многочлена $f(x)$.

При достаточно маленьком положительном ε многочлен $f(x)$ возрастает на интервале $(0,\varepsilon)$. В самом деле, если $0<x<\varepsilon<1$, то выполняются условия

$$
\begin{gathered}
f(x)-f(0)=a_k x^{n_k}+a_{k-1}x^{n_{k-1}}+\ldots+a_1 x^{n_1}= \\
=x^{n_1}\left(a_k x^{n_k-n_1}+a_{k-1}x^{n_{k-1}-n_1}+\ldots+a_2 x^{n_2-n_1}+a_1\right)\ge \\
\ge x^{n_1}\left(a_1-|a_k|x^{n_k-n_1}-|a_{k-1}|x^{n_{k-1}-n_1}-\ldots-|a_2|x^{n_2-n_1}\right)\ge \\
\ge x^{n_1}\left(a_1-|a_k|\varepsilon^{n_k-n_1}-|a_{k-1}|\varepsilon^{n_{k-1}-n_1}-\ldots-|a_2|\varepsilon^{n_2-n_1}\right)\ge \\
\ge x^{n_1}\left(a_1-|a_k|\varepsilon-|a_{k-1}|\varepsilon-\ldots-|a_2|\varepsilon\right).
\end{gathered}
$$

А если, кроме того, имеют место неравенства $\varepsilon < \dfrac{a_1}{k|a_2|}, \dots, \varepsilon < \dfrac{a_1}{k|a_k|}$,

то $f(x) - f(0) \geq x^{n_1}\left(a_1 - |a_k|\varepsilon - |a_{k-1}|\varepsilon - \dots - |a_2|\varepsilon\right) > \dfrac{a_1 x^{n_1}}{k} > 0.$

Поэтому найдется точка $z_1 \in (0, x_1)$, для которой $f(z_1) > f(0)$. Но $f(x_1) = 0 < f(0)$, значит, на интервале (z_1, x_1) найдется точка z_2, в которой $f(z_2) = f(0)$.

Но тогда по теореме Ролля на интервале $(0, z_2)$ найдется точка y_1, в которой $f'(y_1) = 0$. Кроме того, по той же теореме, на каждом из интервалов (x_i, x_{i+1}) найдется точка y_{i+1}, в которой $f'(y_{i+1}) = 0$.

Таким образом, число положительных корней многочлена $f(x)$ не превосходит числа корней его производной $f'(x)$. Но производная содержит k членов, поэтому по предположению индукции число ее корней не превосходит числа перемен знаков в последовательности ее коэффициентов. Остается заметить, что в рассматриваемом случае число перемен знаков в последовательности коэффициентов при дифференцировании не изменяется.

Случай 2. Свободный член a_0 положителен, а следующий коэффициент a_1 отрицателен. В этом случае число перемен знаков в последовательности коэффициентов многочлена $f(x)$ на единицу больше числа перемен знаков в последовательности коэффициентов его производной $f'(x)$. Но по теореме Ролля между любыми двумя положительными корнями $f(x)$ лежит корень его производной $f'(x)$, поэтому при дифференцировании число положительных корней если и уменьшается, то самое большее на 1. Остается сослаться на предположение индукции, примененное к $f'(x)$.

Случай 3. Свободный член a_0 отрицателен, а следующий коэффициент a_1 положителен. Этот случай аналогичен предыдущему.

Случай 4. Оба коэффициента a_0 и a_1 отрицательны. Этот случай разбирается так же, как случай 1.

Поскольку все возможности рассмотрены, теорема доказана.

Сделаем одно уточнение. До сих пор мы считали только число различных корней. Но если многочлен имеет корень кратности r, то его производная имеет корень кратности $r-1$. Поэтому если многочлен имеет p положительных корней, среди которых q различных, то его производная имеет как минимум $p-1$ корень: $p-q$ в тех точках, где обращается в ноль сам многочлен, и $q-1$ в новых. Таким образом, утверждение задачи 14 остается верным, если корни многочлена считать с учетом их кратности.

Второе доказательство. Воспользуемся индукцией по числу перемен знаков. Если это число равно нулю, все коэффициенты многочлена имеют один знак и, следовательно, положительных корней у многочлена нет. Это дает базу индукции. Предположим, что теорема доказана для всех многочленов, последовательности коэффициентов которых содержат менее p перемен знака. Пусть последовательность коэффициентов многочлена $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ содержит p перемен знака. Не ограничивая общности, можем считать, что $a_0\neq0$ и $a_n\neq0$. Если он не имеет положительных корней, утверждение теоремы очевидно. Пусть c – любой его положительный корень.

Рассмотрим многочлен $g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0$, коэффициенты которого определяются рекуррентными формулами

$$b_{n-1}=a_n,\ b_{n-2}=a_{n-1}+cb_{n-1},\ldots,\ b_{k-1}=a_k+cb_k,\ldots,\ b_0=a_1+cb_1.$$

Покажем, что $f(x)=g(x)(x-c)$. Коэффициент при старшем члене многочлена $g(x)(x-c)$ равен $b_{n-1}=a_n$. А при $k=n-1,\ldots,1$ коэффициент при x^k в этом многочлене равен $b_{k-1}-cb_k=(a_k+cb_k)-cb_k=a_k$, т. е. все коэффициенты многочленов $g(x)(x-c)$ и $f(x)$ кроме, быть может, последнего, совпадают. Но тогда равны и свободные члены, ибо при $x=c$ оба многочлена обращаются в ноль.

Из доказанного тождества, в частности следует, что

$$a_n=b_{n-1},\ a_{n-1}=b_{n-2}-b_{n-1}c,\ldots,a_k=b_{k-1}-b_kc,\ldots,a_1=b_0-b_1c,\ a_0=-b_0c.$$

Пусть l – самое первое место перемены знака в последовательности $b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}$. Тогда числа b_0 и b_l имеют разные знаки. Значит, числа a_0 и a_l тоже имеют разные знаки и последовательность $a_0,a_1,\ldots,a_l$ содержит, по крайней мере, одну перемену знака.

Пусть l и k – два соседних места перемены знака последовательности $b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}$. Тогда числа b_l и b_k имеют разные знаки и, следовательно, разные знаки имеют числа $a_l=b_{l-1}-b_lc$ и $a_k=b_{k-1}-b_kc$. Поэтому последовательность $a_l,a_{l+1},\ldots,a_k$ содержит, по меньшей мере, одну перемену знака.

По аналогичным соображениям, если k – последнее место перемены знака в последовательности $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$, то последовательность $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ содержит не меньше одной перемены знака.

Подводя итог, можем сказать, что если последовательность коэффициентов многочлена $g(x)$ содержит q перемен знака, то последовательность коэффициентов многочлена $f(x)$ содержит не меньше $q+1$ перемены знака.

Отсюда, в частности, следует, что последовательность коэффициентов многочлена $g(x)$ содержит меньше перемен знака, чем последовательность коэффициентов многочлена $f(x)$. А значит, для оценки числа корней многочлена $g(x)$ можно воспользоваться предположением индукции, согласно которому многочлен $g(x)$ имеет меньше p корней. Но тогда многочлен $f(x)=g(x)(x\text{-}c)$ имеет не больше p корней. Шаг индукции завершен и теорема доказана.

Третье доказательство. Идея этого доказательства принадлежит французскому математику Эдмону Никола Лагерру (1834–1886). Доказательство будем вести индукцией по m. Для $m=1$ утверждение уже доказано. Впрочем, можно было бы начать и с $m=0$, для которого оно очевидно. Остается провести шаг индукции.

Предположим, что уже доказано утверждение: любой многочлен, последовательность коэффициентов которого в стандартной записи содержит $q<m$ перемен знака, имеет не более q корней. Рассмотрим многочлен $f(x)$, имеющий m перемен знака. Не ограничивая общности, можно считать, что показатели $n_0, n_1, \ldots, n_k$ степеней, входящих в многочлен с ненулевыми коэффициентами, четны. В противном случае вместо многочлена $f(x)$ можно было бы рассмотреть многочлен $f(x^2)$, имеющий то же число положительных корней и такое же число перемен знаков в последовательности коэффициентов.

Пусть l – какое-то место перемены знака в последовательности его коэффициентов, то есть

$$f(x) = a_k x^{n_k} + a_{k-1} x^{n_{k-1}} + \ldots + a_l x^{n_l} + a_{l-1} x^{n_{l-1}} + \ldots + a_1 x^{n_1} + a_0 x^{n_0}$$

и $a_{l-1} a_l < 0$.

Проделаем с этим многочленом следующую операцию. Сначала разделим его на $x^{n_l - 1}$, потом продифференцируем, а затем умножим на x^{n_l}. Получим новый многочлен

$$g(x)=a_k(n_k-n_l+1)x^{n_k}+a_{k-1}(n_{k-1}-n_l+1)x^{n_{k-1}}+\ldots+a_l(n_l-n_l+1)x^{n_{l-1}}+$$
$$+a_{l-1}(n_{l-1}-n_l+1)x^{n_{l-1}}+\ldots+a_1(n_1-n_l+1)x^{n_1}+a_0(n_0-n_l+1)x^{n_0}.$$

Посмотрим, как при этом изменится число перемен знака и число положительных корней многочлена.

При переходе от многочлена $f(x)$ к многочлену $g(x)$ все коэффициенты с номерами, меньшими l, умножаются на отрицательные числа. Поэтому на месте $i<l$ в последовательности коэффициентов многочлена $f(x)$ имеется перемена знака тогда и только тогда, когда перемена знака на том же месте имеется в последовательности коэффициентов многочлена $g(x)$. Точно так же на месте $i>l$ в последовательности коэффициентов многочлена $f(x)$ имеется перемена знака тогда и только тогда, когда перемена знака на месте i имеется в последовательности коэффициентов многочлена $g(x)$. А перемена знака на месте l исчезла, так как коэффициент a_{l-1} умножился на отрицательное число $(n_{l-1}-n_l+1)$, а коэффициент a_l умножается на положительное число $(n_l-n_l+1)=1$. Таким образом, число перемен знаков в результате проделанной операции уменьшится на единицу.

Разберемся теперь с числом положительных корней. При делении многочлена на x^{n_l} число положительных корней не меняется. При дифференцировании число корней может уменьшиться. Но в силу теоремы Ролля, между любыми двумя *соседними корнями* многочлена лежит корень производной, поэтому, если функция имеет p различных корней, то ее производная имеет не менее $p-1$ корня, т. е. число корней может уменьшиться не больше, чем на 1. При умножении на x^{n_l+1} число положительных корней снова не меняется.

Итак, число перемен знака в последовательности коэффициентов многочлена $f(x)$ на единицу больше, чем число перемен знака в последовательности коэффициентов многочлена $g(x)$, а число корней многочлена $f(x)$ не меньше, чем число корней многочлена $g(x)$, увеличенное на 1. Но к многочлену $g(x)$ применимо предположение индукции, откуда немедленно следует нужный результат.

Теорема 1 была сформулирована Декартом в 1637 г. Сам Декарт доказательства своего правила не привел.

Второе доказательство правила Декарта сосем элементарно. В частности, оно не использует понятия производной. Третье доказательство имеет то преимущество, что оно охватывает гораздо более общую ситуацию. В самом деле, мы почти не использовались тем, что степени $n_0, n_1,\ldots,n_k$ – целые числа. Лишь когда мы говорили о *соседних корнях*, использовался тот факт, что число корней у рассматриваемой функции конечно. Но таким свойством функция вида (1) обладает при любых действительных $n_0, n_1,\ldots,n_k$ (см. упр. 31).

Интересен исторический фон, на котором появилось правило Декарта. Начнем с вопроса: сколько корней имеет алгебраическое уравнение? Важность его, надеюсь, не вызывает сомнений. Еще в годы моего учения ответ на него носил название «основной теоремы алгебры». Сейчас это название несколько устарело, поскольку само понятие алгебры заметно расширилось. Однако важность этого вопроса для теории алгебраических уравнений не стала меньше.

Современный школьник, пожалуй, ответит на него так: «Число корней уравнения не превосходит его степени». Более продвинутый читатель может сказать, что число корней уравнения степени n в точности равно n. И тот, и другой ответ верен, и как не странно, оба ответа полны. Просто в школе сейчас «не проходят» комплексные числа, и школьник считает только действительные корни, а более подготовленный читатель – и комплексные тоже.

А как на тот же вопрос должен был бы отвечать Декарт? В те времена ученые уже имели некоторое представление об отрицательных и мнимых числах, однако отнюдь не рассматривали их как «настоящие». Поэтому наш вопрос в те времена понимался так: сколько положительных действительных корней имеет данное алгебраическое уравнение? На него и дает ответ правило Декарта. Кстати, на тот же вопрос отвечает и основная теорема алгебры, только ответ, даваемый правилом Декарта, точнее.

Оба эти результата появились у Декарта одновременно, в его «Геометрии». Правда, основная теорема алгебры была сформулирована Альбертом Жираром чуть раньше, в 1629 г. (хотя это могло быть неизвестным Декарту). А правило Декарта было новым, и это не случайно. Декарт первым начал записывать уравнения примерно в той форме, которая для нас является привычной. До него уравнения записывали «словами», а в таком виде даже сформулировать правило непросто, не то, что догадаться до него.

Кстати, еще одно обстоятельство могло помочь Декарту. По сформулированным выше причинам он обозначал буквами только положительные числа. Поэтому все уравнения данной степени разбивались на классы в зависимости от того, какой знак имел тот или иной коэффициент (уравнение $ax^2+bx+c=0$ принадлежало одному классу, а уравнение $ax^2-bx+c=0$ – другому). А в этом контексте правило знаков выглядит весьма естественно. Между прочим, и современный прогресс в теории малочленов, по-видимому, существенно связан с переходом на более удобный язык.

Заметим, что и правило Декарта и основную теорему алгебры можно сформулировать единым образом, сказав, что число корней уравнения не превосходит его сложности. Только в одном случае сложность определяется числом перемен знаков, а в другом – степенью уравнения.

Теорема 1 позволяет оценить и число отрицательных корней многочлена $f(x)$. Достаточно применить ее к многочлену $f(-x)$.

В отличие от результата упражнения 2 правило Декарта в общем случае дает лишь верхнюю оценку для количества положительных корней, которая может и не достигаться. Но и улучшить эту оценку нельзя[5], так как у любого многочлена n-й степени, имеющего n положительных корней, последовательность коэффициентов содержит n перемен знака. Впрочем, одно уточнение все же можно делать. Кстати оно позволяет понять, почему в случае одной перемены знака правило Декарта дает точное число корней. Обо всем этом в следующих задачах.

Упражнения

13. Пусть a,b,c – натуральные числа. Сколько перемен знаков имеет последовательность коэффициентов многочлена

---

[5] Процедуру, позволяющую по коэффициентам многочлена определить точное число его положительных корней, предложил в 1829 г. французский математик Жак Шарль Франсуа Штурм (1803–1855). Она заметно сложнее правила Декарта, и потому возможности ее применения на практике гораздо скромнее, особенно если коэффициенты многочлена «буквенные». Хотя не исключено, что с развитием компьютерных систем символьных вычислений эти возможности существенно расширятся.

$$f(x)=x^{4a+b+c}+x^{a+4b+c}+x^{a+b+4c}-x^{3a+3b}-x^{3a+3c}-x^{3b+3c}$$

в стандартной записи?

14. Докажите, что уравнение $x^4+5x^3-4x^2+7x+4=0$ не имеет положительных корней.

15. {Л.1986} Найдите все положительные решения уравнения

$$x^{1986}+1986^{1985}=x^{1985}+1986^{1986}.$$

16. Пусть n – четное число. Докажите, что существует многочлен, последовательность коэффициентов которого содержит ровно n перемен знака, а сам многочлен вовсе не имеет корней.

17. Пусть n – нечетное число. Докажите, что существует многочлен, последовательность коэффициентов которого содержит ровно n перемен знака, а сам многочлен имеет ровно один корень.

18. Докажите, что многочлен $x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\ldots-2nx+2n+1$ не имеет действительных корней.

19. {h469a.1977} Уравнение $x^4+ax^3+bx+c=0$ имеет четыре различных действительных корня. Докажите, что $ab<0$.

20. {h469б.1977} Уравнение

$$x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{n-1}x^{k-n+1}+a_{n+1}x^{k-n-1}+\ldots+a_k=0$$

имеет k различных действительных корней. Докажите, что $a_{n-1}a_{n+1}<0$.

21. Пусть в многочлене $f(t)=a_kt^k+a_{k-1}t^{k-1}+\ldots+a_1t+a_0$ коэффициент $a_0\neq 0$, а два соседних коэффициента a_l и a_{l+1} равны нулю. Докажите, что число действительных корней многочлена $f(t)$ меньше k.

22. Пусть в многочлене $f(t)=a_kt^k+a_{k-1}t^{k-1}+\ldots+a_1t+a_0$ коэффициент $a_0\neq 0$ и $a_{l-1}\neq 0$, $a_l=\ldots=a_{l+m-1}=0$, $a_{l+m}\neq 0$. Тогда количество корней многочлена не превосходит $k-m$, если число m четно, и не превосходит $k-m+1$ в противном случае.

23. {А.1957} Пусть три последовательных коэффициента многочлена $f(t)=a_kt^k+a_{k-1}t^{k-1}+\ldots+a_1t+a_0$ равны и отличны от нуля. Докажите, что число действительных корней многочлена $f(t)$ меньше k.

24. Пусть три последовательных коэффициента многочлена $f(t)=a_kt^k+a_{k-1}t^{k-1}+\ldots+a_1t+a_0$ отличны от нуля и образуют геометрическую прогрессию. Докажите, что число действительных корней многочлена $f(t)$ меньше k.

25. Пусть четыре последовательных коэффициента многочлена $f(t)=a_kt^k+a_{k-1}t^{k-1}+\ldots+a_1t+a_0$ отличны от нуля и образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что число действительных корней многочлена $f(t)$ меньше k.

26. Пусть многочлен $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ имеет k различных положительных корней. Тогда $\left(\frac{a_n}{C_k^n}\right)^2 \geq \frac{a_{n+1}}{C_k^{n+1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{C_k^{n-1}}$ для $n=1,\ldots,k-1$.

27. {h565a.1979} Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – положительные числа. Обозначим $b_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$ и $b_2 = \frac{2\left(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots + a_{k-1} a_k\right)}{k(k-1)}$. Докажите, что $b_1 \geq \sqrt{b_2}$.

28. {h565a.1979} Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – различные положительные числа. Обозначим через b_n среднее арифметическое всевозможных произведений по n данных чисел ($n=1,2,\ldots,k$):

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k},$$

$$b_2 = \frac{2\left(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots + a_{k-1} a_k\right)}{k(k-1)},$$

$$\ldots$$

$$b_k = a_1 a_2 \ldots a_k.$$

Докажите неравенства $b_n^2 \geq b_{n-1} b_{n+1}$, $n = 2, \ldots, k-1$.

29. {Н.1974} Докажите, что многочлен $1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ при четном n не имеет корней, а при нечетном n имеет ровно один положительный корень.

30. Докажите, что число перемен знака в последовательности коэффициентов многочлена, записанного в стандартной форме, и число его положительных корней имеют одинаковую четность.

31. Докажите, что если $n_0=0$, то функция вида (1), где $n_0,\ldots,n_k$ – произвольные действительные числа, имеет не более $k+1$ положительного корня.

4. Применения правила Декарта

Докажем следующее неравенство.

Задача 4. Пусть $x \geq 0$. Докажите неравенство

$$(1+x+\ldots+x^{100})(1+x^{100}) \geq 202x^{100}.$$

Решение. Рассмотрим многочлен

$$f(x)=(1+x+\ldots+x^{100})(1+x^{100})-202x^{100}.$$

Если мы его запишем в стандартной форме, то последовательность его коэффициентов будет иметь две перемены знака: одну на сотом месте, другую на сто первом. Значит, число его положительных корней четно и не превосходит двух. Но один корень $x=1$ очевиден. Следовательно, у нашего многочлена два положительных корня. Если бы эти корни были различны, то каждый из них был бы простым. Тогда вблизи каждого из них многочлен менял бы знак, и доказываемое неравенство не могло бы быть верным. Поэтому нам нужно доказать, что положительных корней, отличных от 1, у рассматриваемого многочлена нет.

В этом нам поможет важная идея симметрии. А именно, заметим, что $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^{200}}f(x)$. Поэтому, если x_0 – положительный корень нашего многочлена, то $1/x_0$ – тоже его положительный корень. Таким образом, если у нашего многочлена есть положительный корень, отличный от 1, то он имеет, по меньшей мере, три положительных корня, а это противоречит правилу Декарта.

Итак, мы установили, что наш многочлен имеет один положительный корень кратности 2. Следовательно, на интервале $[0,+\infty)$ он не меняет знака. Остается заметить, что $f(0)=1$. Задача решена.

Вот еще несколько примеров того же рода.

Упражнения

32. Решите неравенство $t^8-t^5-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^4} \geq 0$.

33. {Л.1967} Докажите, что $(1+x^2+\ldots+x^{100})(1+x^{100})-102x^{101} \geq 0$.

34. {К.1963} Найти все действительные корни уравнения $(1+x^{2k})\,(1+x^2+\ldots+x^{2k-2})=2kx^{2k-1}$, где k – натуральное число.

35. {О. 1994} Докажите, что для любых x и y справедливо неравенство $2x^4+2y^4 \geq xy(x+y)^2$.

36. Пусть $k>l>m>n$ и $k+n=l+m$. Докажите, что для неотрицательных значений x и y справедливо неравенство $x^ny^k+x^ky^n \geq x^my^l+x^ly^m$.

37. Пусть $x \geq 0$, а $m \geq 1$. Докажите, что $mx^{m-1}(x-1) \geq x^m - 1 \geq m(x-1)$.

38. Пусть $x \geq 0$, а $0 \leq m \leq 1$. Докажите, что $mx^{m-1}(x-1) \leq x^m - 1 \leq m(x-1)$.

39. Пусть $x \geq 0$, а $m \leq 0$. Докажите, что $mx^{m-1}(x-1) \geq x^m - 1 \geq m(x-1)$.

40. Пусть $x \geq 0$, а m – натуральное число. Докажите, что тогда $x^{2m} - 1 \geq m(x^{m+1} - x^{m-1})$.

5. Квазимногочлены

Квазимногочленами называют функции вида

$$f(x) = a_k b_k^x + a_{k-1} b_{k-1}^x + \ldots + a_1 b_1^x + a_0 b_0^x.$$

Приставка «квази», которая означает «как будто», свидетельствует о том, что функции такого вида ведут себя так, как будто они обычные многочлены. В частности число их корней можно оценить так, как будто мы имеем дело с обычным многочленом.

Договоримся записывать квазимногочлены таким образом, что $b_k > b_{k-1} > \ldots > b_1 > b_0 > 0$, а среди коэффициентов $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$ нет нулей. Такую форму записи будем называть стандартной.

Теорема 2. Число действительных корней квазимногочлена, записанного в стандартной форме, не превосходит числа перемен знака в последовательности его коэффициентов.

Доказательство Лагерра переносится на этот случай почти дословно.

Если число перемен знака в последовательности коэффициентов равно нулю, то все числа $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$ имеют один знак и тот же знак имеет значение квазимногочлена в любой точке. Поэтому корней у него в таком случае нет. Это дает базу индукции.

Саму индукцию будем проводить по числу перемен знака в последовательности коэффициентов квазимногочлена. Пусть $a_l a_{l+1} < 0$. Выберем произвольное число b так, что $b_l < b < b_{l+1}$. Рассмотрим квазимногочлен

$$g(x) = \frac{f(x)}{b^x} = a_k c_k^x + a_{k-1} c_{k-1}^x + \ldots + a_1 c_1^x + a_0 c_0^x,$$

где $c_i = \dfrac{b_i}{b}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Заметим, что в силу выбора числа b при $i \leq l$ выполняются неравенства $c_i < 1$, а при $i > l$ – неравенства $c_i > 1$.

У квазимногочлена $g(x)$ столько же корней, сколько у $f(x)$, а перемены знака в последовательности его коэффициентов имеются на тех же местах, что и у $f(x)$. Пусть эти квазимногочлены имеют корни $x_1, x_2, \dots x_n$ кратностей $m_1, m_2, \dots, m_n$ соответственно. Если обозначить буквой p число перемен знака в последовательности их коэффициентов, то нам нужно доказать, что $m_1 + m_2 + \dots + m_n < p$.

Для этого рассмотрим производную функции $g(x)$:

$$g'(x) = a_k \ln c_k c_k^x + a_{k-1} \ln c_{k-1} c_{k-1}^x + \dots + a_1 \ln c_1 c_1^x + a_0 \ln c_0 c_0^x$$

Индекс l является местом перемены знака в последовательности коэффициентов квазимногочлена $g(x)$, но не является местом перемены знака в последовательности коэффициентов квазимногочлена $g'(x)$, так как $\ln c_l < 0$, а $\ln c_{l+1} > 0$. Все остальные перемены знака при дифференцировании остаются на своих местах, так как соседние коэффициенты умножаются при этом на числа одного знака. Значит, последовательность коэффициентов квазимногочлена $g'(x)$ имеет $p-1$ перемену знака. Функция $g'(x)$ имеет корни кратностей m_1-1, $m_2-1, \dots, m_n-1$ в точках $x_1, x_2, \dots x_n$ соответственно. Да еще по теореме Ролля она имеет, по крайней мере, по одному корню на каждом из интервалов (x_1,x_2), $(x_2,x_3), \dots, (x_n,x_{n-1})$. Значит, число его корней

$$q \geq (m_1-1)+(m_2-1)+\dots+(m_n-1)+n-1 = m_1+m_2+\dots+m_n-1.$$

Но к квазимногочлену $g'(x)$ применимо предположение индукции, поэтому $q \leq p-1$, откуда немедленно следует нужное нам неравенство. Шаг индукции завершен.

Теорему 2 тоже называют правилом Декарта. Заметим, что правило Декарта для многочленов может быть получено из правила Декарта для квазимногочленов заменами переменных x на $\ln x$, а b_i на e^i при $i=0,1,\dots,k$ (здесь e – основание натуральных логарифмов). Верно и обратное. А поэтому справедливо и следующее уточнение.

Упражнение 41. Докажите, что число перемен знака в последовательности коэффициентов квазимногочлена, записанного в стандартной форме, и число его положительных корней имеют одинаковую четность.

Применения правила Декарта для квазимногочленов даже более многочисленны, чем применения аналогичного результата для многочленов. Приведем примеры.

Упражнения

42. {S.1999} Докажите, что для действительных чисел $x \geq 1$ выполняется неравенство $\frac{2^x+3^x}{3^x+4^x} \leq \frac{5}{7}$.

43. Решите уравнение $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+1=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$.

44. Доказать, что уравнение $a^x+b^x=c^x+\alpha$, где числа a, b, c положительны и не равны 1, имеет не более трех различных решений.

45. {h177.1972} Найдите все решения уравнения $\sqrt[n]{x^n-a^n}+\sqrt[n]{2a^n-x^n}=a$, где a – заданное вещественное число, n – натуральное число, большее единицы.

46. {И.2004} Сумма нескольких положительных чисел равна сумме их квадратов. Что больше: сумма четвертых степеней этих чисел или сумма их кубов?

47. {M.1960} Даны числа $a_1,a_2,...,a_k$, причем для всех нечетных n имеет место равенство $a_1^n+a_2^n+...+a_k^n=0$. Доказать, что те из чисел, которые не равны нулю, можно разбить на пары таким образом, чтобы два числа, входящих в одну пару, были равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку.

48. {W.1967} Рассматривается последовательность $\{c_n\}$ $c_1=a_1+a_2+...+a_8$, $c_2=a_1^2+a_2^2+...+a_8^2, \ldots, c_n=a_1^n+a_2^n+...+a_8^n, \ldots$ где $a_1,a_2,...,a_8$ – действительные числа, не все равные нулю. Среди членов последовательности бесконечно много равных нулю. Найдите все n, для которых $c_n=0$.

49. {B.2003} Пусть a,b,c,d – такие положительные числа, что при всех x выполняется равенство $\sin ax+\sin bx=\sin cx+\sin dx$. Докажите, что $a=c$ или $a=d$.

50. {M.1963} a,b,c - такие три числа, что $abc>0$ и $a+b+c>0$. Доказать, что $a^n+b^n+c^n>0$ при любом n.

51. Докажите, что не существует четырех различных положительных чисел a,b,c,d таких, что $a+b=c+d$ и $a^3+b^3=c^3+d^3$.

52. {Л.1970} Положительные числа a,b,c,d таковы, что $a^2+b^2=c^2+d^2$ и $a^3+b^3=c^3+d^3$. Докажите, что $ab=cd$.

53. Докажите, что если $a+b+c+d=0$ и $a^{1987}+b^{1987}+c^{1987}+d^{1987}=0$, то $a^3+b^3+c^3+d^3=0$.

54. {M.1985} Найдите все значения x, y, z, удовлетворяющие равенству $(x-y+z)^2=x^2-y^2+z^2$.

55. {M.1985} Найдите все значения x, y, z, удовлетворяющие равенству $\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

56. {M.1937} Решите систему

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$$

57. {S.2005} Известно, что $x^2+y^2+z^2=1$, $x^3+y^3+z^3=-1$, $x^5+y^5+z^5=-1$. Чему равно $x+y+z$?

58. Докажите, что если $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$, то при любом нечетном n выполняется равенство $\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}=\frac{1}{x^n+y^n+z^n}$.

59. Докажите, что для любых положительных чисел $a\neq1$, $x<1$ справедливо неравенство $\frac{1-a^x}{1-a}<(1+a)^{x-1}$.

60. Докажите, что для любого значения $x\leq1$ и любых чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$, удовлетворяющих условиям $1\geq a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n>0$ справедливо неравенство $(1+a_1+a_2+\ldots+a_n)^x\leq1+1^{x-1}a_1^x+2^{x-1}a_2^x+\ldots+n^{x-1}a_n^x$.

61. Докажите, что для любых положительных чисел a,b и c справедливо неравенство $\frac{a^{10}}{c}+\frac{c^{10}}{b}+\frac{b^{10}}{a}\geq a^8b+c^8a+b^8c$.

62. {W.1979, h599.1979} Найдите все действительные числа a, для которых существуют неотрицательные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, удовлетворяющие соотношениям $b_1+2b_2+3b_3+4b_4+5b_5=a$, $b_1+2^3b_2+3^3b_3+4^3b_4+5^3b_5=a^2$, $b_1+2^5b_2+3^5b_3+4^5b_4+5^5b_5=a^3$.

6. Классические неравенства

Задача 5. Пусть $b_1<b_2<\ldots<b_k$ – положительные числа. Докажите, что $\left(\frac{b_1^x+b_2^x+\ldots+b_k^x}{k}\right)^{\frac{1}{x}} \geq \frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k}$, если $x\geq 1$, и $\left(\frac{b_1^x+b_2^x+\ldots+b_k^x}{k}\right)^{\frac{1}{x}} \leq \frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k}$, если $x<1$ и $x\neq 0$.

Решение. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(x)=\frac{b_1^x+b_2^x+\ldots+b_k^x}{k}-\left(\frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k}\right)^x. \tag{2}$$

Он имеет всего один отрицательный коэффициент. Поэтому, если мы запишем его в стандартной форме, последовательность его коэффициентов будет содержать не больше двух перемен знака. А значит, он имеет не больше двух корней. Но два корня $x=1$ и $x=0$ очевидны. Поэтому перемен знака ровно две и, следовательно,

$$b_1<\frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k}<b_k. \tag{3}$$

А тогда знак нашего квазимногочлена при больших x определяется знаком коэффициента при b_k^x, который положителен.

Отсюда следует, что $\frac{b_1^x+b_2^x+\ldots+b_k^x}{k}>\left(\frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k}\right)^x$ при $x>1$ или $x<0$, и выполняется неравенство противоположного знака, если $0<x<1$. Остается воспользоваться монотонностью степенной функции, которая возрастает, когда показатель степени положителен, и убывает в противном случае. И, разумеется, от условия $b_1<b_2<\ldots<b_k$ теперь можно отказаться, так как от перестановки слагаемых неравенство не меняется. В данной и некоторых следующих задачах это условие введено только в качестве подсказки.

Нетрудно заметить, что приведенное доказательство проходит и тогда, когда не все числа $b_1, b_2,\ldots,b_k$ различны. Особого рассмотрения требует лишь случай, когда все эти числа равны, но этот случай тривиален.

Фиксируя различные значения *x,* отсюда можно получит много интересного. Так при x=2 получаем неравенство

$$\sqrt{\frac{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_k^2}{k}} \geq \frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k}$$

между средним квадратическим и средним арифметическим, а при x=–1 – неравенство

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k} \geq \frac{k}{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_k}}$$

между средним арифметическим и средним гармоническим. Да и доказанное попутно неравенство (3), хотя и совсем простое, но тоже заслуживает внимания. Но и этим число «бесплатных» следствий не ограничивается.

Задача 6. Пусть $b_1<b_2<\ldots<b_k$ – положительные числа. Докажите, что $\frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k} \geq \sqrt[k]{b_1 b_2 \ldots b_k}$.

Решение. Решая предыдущую задачу, мы выяснили, что квазимногочлен (2) принимает положительные значения при x<0, и отрицательные – при 0<x<1. Значит, он убывает вблизи точки x=0. Но тогда его производная в этой точке

$$\frac{\ln b_1+\ln b_2+\ldots+\ln b_k}{k} - \ln\frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k}$$

отрицательна. Отсюда немедленно получается нужное неравенство.

Таким образом, мы почти без труда получили знаменитое неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим. Говоря об этом неравенстве, обычно ссылаются на «Курс анализа» Коши, первое издание которого вышло в 1821 г. Впрочем, мне не приходилось видеть утверждения о том, что именно там это неравенство появилось впервые. Его частные случаи заведомо были известны и раньше. Так неравенство Коши для двух чисел содержится уже в «Началах» Евклида.[6]

---

[6] Огюстен Коши (1789–1857) – французский математик. Евклид (365–ок.300 г. до н. э.) – древнегреческий математик.

Задача 7. Пусть $b_1<b_2<\ldots<b_k$ – положительные числа. Докажите, что

$$\frac{b_1\ln b_1+b_2\ln b_2+\ldots+b_k\ln b_k}{k}>\frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k}\ln\frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k}.$$

Решение. Как и в предыдущей задаче замечаем, что производная функции (2) при x=1 положительна.

Это неравенство не имеет «имени собственного». Но оно имеет фундаментальное значение в теории информации и статистической физике (оно имеет прямое отношение ко второму началу термодинамики). Поэтому на него стоит обратить внимание.

Задача 8. Пусть $b_1,b_2,\ldots,b_{k+1}$ – положительные числа. Докажите, что

$$k\left(\frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k}-\sqrt[k]{b_1b_2\ldots b_k}\right)\le$$
$$\le(k+1)\left(\frac{b_1+b_2+\ldots b_k+b_{k+1}}{k+1}-\sqrt[k+1]{b_1b_2\ldots b_kb_{k+1}}\right).$$

Решение. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(x)=k\left(\frac{b_1^x+b_2^x+\ldots+b_k^x}{k}-\left(\sqrt[k]{b_1b_2\ldots b_k}\right)^x\right)-$$
$$-(k+1)\left(\frac{b_1^x+b_2^x+\ldots b_k^x+b_{k+1}^x}{k+1}-\left(\sqrt[k+1]{b_1b_2\ldots b_kb_{k+1}}\right)^x\right).$$

После приведения подобных в нем останется всего три члена, поэтому он не может иметь более двух корней. Но и сам квазимногочлен, и его производная обращаются в ноль при x=0. Значит, во-первых, он не меняет знака, а, во-вторых, последовательность его коэффициентов содержит две перемены знака. А тогда его знак будет определяться знаком «крайних» членов, которые отрицательны.

Задача 9. Пусть $b_1<b_2<\ldots<b_k$ – положительные числа. Докажите, что $b_1<\left(\frac{b_1^x+b_2^x+\ldots+b_k^x}{k}\right)^{\frac{1}{x}}<b_k$.

Решение. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(x)=\frac{b_1^x+b_2^x+...+b_k^x}{k}-c^x\ .$$

Если мы запишем его в стандартной форме, то последовательность его коэффициентов будет иметь две перемены знака при $b_1<c<b_k$, и одну перемену знака в противном случае. Значит, этот многочлен не имеет ненулевых корней при $c\geq b_k$ и при $c\leq b_1$, откуда и следует утверждение задачи.

Задача 10. Пусть $b_1<b_2<...<b_k$ – положительные числа. Докажите, что функция

$$F(x)=\left(\frac{b_1^x+b_2^x+...+b_k^x}{k}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad (4)$$

имеет предел при $x\to 0$, и найдите его.

Решение. Исследуем более подробно множество значений функции $F(x)$. Мы уже знаем, что оно содержится в интервале (b_1,b_k). Если c лежит в этом интервале, то квазимногочлен $f(x)=\frac{b_1^x+b_2^x+...+b_k^x}{k}-c^x$ имеет два корня. Один из них всегда нулевой, а другой может меняться в зависимости от c. Если этот второй корень отличен от нуля, то он является одновременно и корнем уравнения $F(x)=c$. Если же и второй корень равен нулю, то уравнение $F(x)=c$ решений не имеет.

Таким образом, нам нужно выяснить, при каких c квазимногочлен $f(x)$ имеет в нуле кратный корень. Но это происходит тогда и только тогда, когда его производная в точке $x=0$ обращается в нуль, то есть $f'(0)=\frac{\ln b_1+\ln b_2+...+\ln b_k}{k}-\ln c=0$, или $c=c_0=\sqrt[k]{b_1b_2...b_k}$.

Итак, множество значений функции $F(x)$ состоит из двух интервалов: (b_1,c_0) и (c_0,b_k). Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существуют числа x_1 и x_2 такие, что $F(x_1)=c_0+\varepsilon$ и $F(x_2)=c_0-\varepsilon$.

Но функция $F(x)$ непрерывна на каждом из интервалов $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$ и принимает каждое свое значение не более одного раза. Значит, в силу результата задачи 3, она монотонна на каждом из этих интервалов. Неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим позволяет сделать вывод, что на интервале $(0,+\infty)$ она возрастает. Аналогично устанавливается, что она возрастает и на интервале $(-\infty,0)$. А, следовательно, если $x_2<x<x_1$ и $x\neq 0$, то $c_0-\varepsilon= F(x_2)<F(x)< F(x_1)=c_0+\varepsilon$, что и означает существование предела, который равен c_0.

Итак, мы доказали, что функция (4), доопределенная условием $F(0)=\sqrt[k]{b_1 b_2 \ldots b_k}$, непрерывна и возрастает от b_1 до b_k, когда x меняется от минус до плюс бесконечности.[7]

Упражнения

63. {М.1952} Докажите, что при целом $n\geq 2$ и $|a|<1$ справедливо неравенство $(1-a)^n+(1+a)^n<2^n$.

64. Пусть $a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_k$ – произвольные числа, $|\alpha|<2$. Докажите, что $\sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i^2+b_i^2+\alpha a_i b_i} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{k}a_i^2+\sum_{i=1}^{k}b_i^2+\alpha\sum_{i=1}^{k}a_i b_i}$.

65. {В.2000} Пусть $-1<x_1<x_2<\ldots<x_k<1$, $y_1<y_2<\ldots<y_k$, и $x_1^{13}+x_2^{13}+\ldots+x_k^{13}=x_1+x_2+\ldots+x_k$. Докажите, что

$$x_1^{13}y_1+x_2^{13}y_2+\ldots+x_k^{13}y_k<x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ky_k.$$

66. {О.1989} Пусть *a, b, c* – длины сторон треугольника, *p* – его полупериметр. Докажите следующие неравенства

$$\sqrt{p}<\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\leq\sqrt{3p}.$$

67. Пусть точка *M* лежит внутри треугольника *ABC*, *u,v,w* – расстояния от *M* до сторон *BC, AC* и *AB*, а h_a, h_b и h_c – соответствующие высоты. Докажите неравенство $\frac{h_a}{u}+\frac{h_b}{v}+\frac{h_c}{w}\geq 9$.

68. В тех же обозначениях докажите что $h_a h_b h_c\geq 27uvw$.

69. {Л.1965} Докажите неравенство $(a+b)^n\leq 2^{n-1}(a^n+b^n)$, где a и b – неотрицательные числа, а n – натуральное число.

[7] Этот результат был доказан в 1858 г. немецким математиком Оскаром Шлемильхом (1823–1901) для случая, когда x – либо целое, либо имеет вид $1/n$, где n – целое. В общем виде он доказан в 1888 г. Х. Симоном.

70. {К.1962} Докажите неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x \ge \frac{1}{4}$.

71. {К.1967} Докажите неравенство $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x \ge \frac{1}{2^{n-1}}$.

72. Докажите, что при любом $a\in[0,1]$ и любом $t\ge1$ справедливо неравенство $2\le(1+a)^t+(1-a)^t\le2^t$.

73. Сравните числа $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}+\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{100}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{100}$.

74. Докажите неравенство $a^x-b^x+c^x\ge(a-b+c)^x$, где $a\ge b\ge c$ и $x\ge1$.

75. Докажите, что если a и b – положительные действительные числа, n – целое число, то $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \ge 2^{n+1}$.

76. {P.2005} Докажите, что для любого $x>0$ и натурального n выполнено неравенство $1+x^{n+1}\ge\frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}$.

77. {Л.1988} Пусть a, b, c, d – положительные числа. Докажите, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\ge\frac{64}{a+b+c+d}$.

78. {S.1998} Пусть $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $a+b+c=1$. Докажите, что $\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+a+c}+\frac{c}{1+a+b}\ge\frac{3}{5}$.

79. {h182.1973} Докажите, что

а) если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$;

б) если $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$, то

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}\ge\frac{4}{3};$$

в) если $a_1, a_2,\dots,a_k$ – положительные числа ($k\ge2$), то

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\dots+a_k}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\dots+a_k}+\dots+\frac{a_k}{a_1+a_2+\dots+a_{k-1}}\ge\frac{k}{k-1}.$$

80. Докажите, что для положительных чисел a_1, a_2,…,a_k выполняется неравенство

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)\geq(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\,.$$

81. Докажите, что для положительных чисел a_1, a_2,…,a_k выполняется неравенство

$$\left(1+\frac{a_1^5}{a_2^3}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2^5}{a_3^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_n^5}{a_1^3}\right)\geq(1+a_1^2)\cdot(1+a_2^2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n^2)\,.$$

82. Докажите, что для положительных чисел a_1, a_2,…,a_k выполняется неравенство

$$\left(a_1+\frac{a_2^2}{a_n}\right)\cdot\left(a_2+\frac{a_3^2}{a_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_n+\frac{a_1^2}{a_{n-1}}\right)\geq(a_1+a_2)\cdot(a_2+a_3)\cdot\ldots\cdot(a_n+a_1)\,.$$

83. {h840б.1983} Докажите, что для любых положительных чисел a,b,c выполнено неравенство $a^3b+b^3c+c^3a\geq a^2bc+b^2ca+c^2ab$.

84. {h762.1982} Докажите, что для любых положительных чисел a,b,c выполняются неравенства

$$a+b+c\leq\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\leq\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\,.$$

85. Докажите, что для любых положительных чисел a,b,c выполнено неравенство $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}\geq\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}$.

86. Пусть $a\geq0$ и $b\geq0$. Докажите, что если $0<x<1$, то

$$(1+a)^x(1+b)^{1-x}\geq1+a^xb^{1-x}.$$

87. {Л.1995} Числа a,b,c,d положительны. Докажите неравенство $(ac+bd)^5+(ad+bc)^5\leq(a+b)^5(c^5+d^5)$.

88. Пусть $b_1<b_2<\ldots<b_k$ – положительные, а p и q произвольные действительные числа. Докажите, что если p и q одного знака, то $\frac{b_1^{p+q}+b_2^{p+q}+\ldots+b_k^{p+q}}{k}\geq\frac{b_1^p+b_2^p+\ldots+b_k^p}{k}\cdot\frac{b_1^q+b_2^q+\ldots+b_k^q}{k}$, а если p и q имеют разные знаки, то выполняется обратное неравенство.

89. Докажите, что если a_1, $a_2,\ldots,a_k$ – положительные числа, то имеет место неравенство $\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{k-1}^2}{a_k}+\frac{a_k^2}{a_1}\ge a_1+a_2+\ldots+a_k$.

90. Докажите, что если a_1, $a_2,\ldots,a_k$ – положительные числа, то

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{k-1}^2}{a_{k-1}+a_k}+\frac{a_k^2}{a_k+a_1}\ge\frac{1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_k).$$

91. {W.1995} Пусть a, b, c – положительные числа такие, что abc=1. Докажите, что $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$.

92. Предположим, что $a_1,a_2,\ldots,a_k$ и $b_1,b_2,\ldots,b_k$ – положительные числа, удовлетворяющие условию $a_1+a_2+\ldots+a_k=b_1+b_2+\ldots+b_k$. Докажите неравенство $\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\ldots+\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\ge\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{2}$.

93. Докажите, что если a_1, $a_2,\ldots,a_k$, b_1, $b_2,\ldots,b_k$ – положительные числа и x>1 или x<0, то $\frac{a_1^x}{b_1^{x-1}}+\frac{a_2^x}{b_2^{x-1}}+\ldots+\frac{a_k^x}{b_k^{x-1}}\ge\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)^x}{(b_1+b_2+\ldots+b_k)^{x-1}}$, а если 0<$x$<1, то имеет место обратное неравенство.[8]

94. {Л.2008} Для любых положительных чисел a, b, c, удовлетворяющих условию $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, докажите неравенство

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}\ge\frac{3}{4}.$$

95. {h969.1986} Докажите, что для положительных чисел a, b, c верно неравенство $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$.

96. Из точки P внутри данного треугольника ABC опускаются перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на прямые BC, AC и AB. Для каких

---

[8] Это неравенство было получено австрийским математиком Иоганном Радоном (1887–1956) в 1913 г.

точек P внутри треугольника ABC величина $\frac{BC}{PA_1}+\frac{CA}{PB_1}+\frac{AB}{PC_1}$ принимает наименьшее значение?

97. Докажите, что если a_1, $a_2,\ldots,a_k$ – положительные числа, то имеет место неравенство

$$\frac{a_1^3}{a_1+a_2}+\frac{a_2^3}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{k-1}^3}{a_{k-1}+a_k}+\frac{a_k^3}{a_k+a_1}\geq\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2).$$

98. Пусть a и b положительны. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\leq a+b.$$

99. Пусть a, b, c – положительные числа. Докажите, что $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}+2\sqrt{\frac{ab+bc+ac}{3}}\leq a+b+c$.

100. Для неотрицательных чисел a_1, $a_2,\ldots,a_k$ докажите неравенство $\sqrt{\frac{2(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_1a_k+a_2a_3+\ldots+a_{k-1}a_k)}{k(k-1)}}\leq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$.

101. Пусть a_1, $a_2,\ldots,a_k$ – неотрицательные числа. Докажите что

$$(k-1)\sqrt{\frac{2(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_1a_k+a_2a_3+\ldots+a_{k-1}a_k}{k(k-1)}}+\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2}{k}}\leq$$
$$\leq a_1+a_2+\ldots+a_k.$$

102. {Р.1985} Докажите, что для любых чисел x и y, отличных от нуля, выполняется неравенство $x^4+y^4\leq\frac{x^6}{y^2}+\frac{y^6}{x^2}$.

103. Пусть α,β,γ – углы остроугольного треугольника. Докажите что $\mathrm{tg}^t\alpha+\mathrm{tg}^t\beta+\mathrm{tg}^t\gamma\geq 3\left(\frac{\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma}{3}\right)^t$ при $t\geq 1$.

104. Пусть α,β,γ – углы остроугольного треугольника. Докажите что $\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma\geq 3\sqrt{3}$.

105. Пусть α,β,γ – углы остроугольного треугольника. Докажите что $\operatorname{tg}^t\alpha+\operatorname{tg}^t\beta+\operatorname{tg}^t\gamma\ge 3^{\frac{t+2}{2}}$.

106. Пусть α,β,γ – углы некоторого треугольника. Докажите неравенства

$$\frac{8}{27}\left(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right)^3\ge\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma>2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

107. Пусть α,β,γ – углы треугольника. Докажите неравенство

$$3\sqrt[4]{\frac{2}{3}\left(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right)}\ge\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}\,.$$

108. Пусть α,β,γ – углы остроугольного треугольника. Докажите неравенство $\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}\ge 2+\sqrt[4]{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

109. Пусть α,β,γ – углы некоторого треугольника. Докажите неравенства

$$\left(\left(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right)^2\right)^{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\ge(\sin\alpha)^{2\sin\alpha}(\sin\beta)^{2\sin\beta}(\sin\gamma)^{2\sin\gamma}\ge$$

$$\ge\left(\frac{2}{3}(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\right)^{2(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}$$

110. Пусть α,β,γ – углы некоторого треугольника. Докажите неравенство[9] $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\le\frac{1}{8}$.

111. Пусть α,β,γ – углы некоторого треугольника. Докажите неравенство[10] $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

112. Пусть α,β,γ – углы некоторого треугольника. Докажите неравенства[11] $2\le\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}\le 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$.

---

[9] Данное неравенство впервые получено в 1925 г. Т. Поповичи (Popovici).
[10] Данное неравенство опубликовано в 1939 г. Уилкинсом (Wilkins).
[11] Левое неравенство получено в 1979 г. А. Маршаллом и И. Олкином (Marshall, Olkin), а правое – в 1963 г. Альбу (Albu).

113. {h1007.1986} Докажите, что треугольники с длинами сторон a, b, c и a_1, b_1, c_1 подобны тогда и только тогда, когда $\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1}=\sqrt{(a_1+b_1+c_1)(a+b+c)}$.

114. Докажите, что если a_1, a_2,…,a_k – положительные числа, то $k(a_1+a_2+...+a_k)\le(a_1^2+a_2^2+...+a_k^2)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}\right)$.

115. Пусть a_1, a_2,…,a_k, b_1, b_2,…,b_k – положительные числа. Докажите, что если $1\le z\le y$ или $y\le z\le 1$, то

$$(a_1^y b_1^{2-y}+a_2^y b_2^{2-y}+...+a_n^y b_n^{2-y})(a_1^{2-y}b_1^y+a_2^{2-y}b_2^y+...+a_n^{2-y}b_n^y)\ge$$
$$\ge(a_1^z b_1^{2-z}+a_2^z b_2^{2-z}+...+a_n^z b_n^{2-z})(a_1^{2-z}b_1^z+a_2^{2-z}b_2^z+...+a_n^{2-z}b_n^z).$$

116. Докажите, что для любых чисел a_1, a_2,…,a_k, b_1, b_2,…,b_k выполняется неравенство

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_kb_k)^2\le(a_1^2+a_2^2+...+a_k^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_k^2)\,.$$ [12]

117. Пусть $a_1,a_2,…,a_k$, $b_1,b_2,…,b_k$ –неотрицательные числа и $\alpha+\beta=1$. Докажите, что если числа α и β положительны, то

$$a_1^\alpha b_1^\beta+a_2^\alpha b_2^\beta+...+a_k^\alpha b_k^\beta\le(a_1+a_2+...+a_k)^\alpha(b_1+b_2+...+b_k)^\beta,$$

а если одно из чисел α или β отрицательно, то выполняется обратное неравенство.

118. Пусть A_1, A_2,…,A_k, B_1, B_2,…,B_k – неотрицательные числа и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Докажите, что если числа p и q положительны, то

---

[12] Это знаменитое неравенство Коши–Буняковского. Оно имеет хорошую геометрическую интерпретацию: скалярное произведение двух векторов не превосходит произведения их длин. А поэтому оно играет важную роль всякий раз, когда используются идеи евклидовой геометрии.

Данный результат был опубликован в 1821 г. Огюстеном Коши. Двойное название связано с тем, что в 1859 г. русский математик Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889) доказал интегральный аналог этого неравенства. Последний результат остался неизвестным на западе и был переоткрыт в 1884 г. Германом Шварцем (1843–1921). Поэтому в западной литературе его чаще называют неравенством Коши–Шварца. Иногда встречается название и со всеми тремя фамилиями.

$$A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots + A_kB_k \le \left(A_1^p + A_2^p + \ldots + A_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(B_1^q + B_2^q + \ldots + B_k^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

а если одно из чисел p или q отрицательно, то выполняется обратное неравенство.[13]

119. Пусть $f(x)$ – многочлен с неотрицательными коэффициентами. Докажите неравенство $(f(xy))^2 \le f(x^2)f(y^2)$.

120. Пусть $f(x)$ – многочлен с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что неравенство $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \ge 1$ справедливо при всех $x \ge 0$, если оно справедливо при $x=1$.

121. Пусть a_0, a_1, b_0, b_1 – положительные числа. Докажите, что тогда $(a_0^2 - a_1^2)(b_0^2 - b_1^2) \le (a_0b_0 - a_1b_1)^2$.

122. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_k$, $b_0, b_1, \ldots, b_k$ – такие действительные числа, что выполняется хотя бы одно из неравенств $a_0^2 > a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$, $b_0^2 > b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_k^2$. Докажите, что тогда справедливо неравенство[14]

$$(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_k^2)(b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_k^2) \le$$
$$\le (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - \ldots - a_kb_k)^2.$$

123. {h620.1980} Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – действительные числа такие, что $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Докажите, что сумма модулей 2^n чисел $\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$ (по всевозможным комбинациям знаков «+» и «–») не превосходит 2^n.

124. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – действительные числа. Тогда при $t \ge 2$ и $t \le 0$ имеет место неравенство

---

[13] Это неравенство Гёльдера, одна из двух «рабочих лошадок» анализа [5]. Его получил в 1889 г. немецкий математик Отто Гёльдер (1859–1937).

[14] Этот результат носит название неравенства Я. Ацеля. Он был опубликован в 1956 г., хотя, по-видимому, физики «знали» его гораздо раньше. В самом деле, это неравенство играет в релятивистской физике ту же роль, что неравенство Коши–Буняковского в ньютоновской физике. В частности, оно отвечает за знаменитый «парадокс близнецов», который был известен задолго до 1956 г.

$$\sum\left|\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n\right|^t \geq 2^n\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)^{\frac{t}{2}},$$

а при $0<t<2$ справедливо противоположное неравенство (суммирование в левой части производится по всевозможным комбинациям знаков «+» и «–»).[15]

125. Пусть числа a,b,c положительны. Докажите неравенство $2^{a+b}+2^{a+c}+2^{b+c}<1+2^{a+b+c+1}$.

126. Пусть r_a, r_b, r_c – радиусы вневписанных окружностей некоторого треугольника, p – его полупериметр. Докажите, что

$$\sqrt{r_a r_b}+\sqrt{r_a r_c}+\sqrt{r_b r_c} \leq \sqrt{3} p .$$

127. {М.1980} Доказать, что если $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{10}$, то

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_6}{6} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{10}}{10} .$$

128. Пусть $a_1<a_2<\ldots<a_k$, $b_1<b_2<\ldots<b_k$. Докажите, что тогда $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k} \cdot \frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k} \leq \frac{a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_k b_k}{k}$.[16]

129. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_k,b_1,b_2,\ldots,b_k$ – положительные числа. Докажите, что

$$\min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_k}{b_k}\right\} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{b_1+b_2+\ldots+b_k} \leq \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_k}{b_k}\right\}.$$

130. Произведение положительных чисел a_1, $a_2,\ldots,a_k$ равно 1. Докажите неравенство $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_k} \leq a_1+a_2+\ldots+a_k$.

131. Произведение положительных чисел a_1, $a_2,\ldots,a_k$ равно 1. Докажите, что при натуральных n выполняется неравенство

$$a_1^n+a_2^n+\ldots+a_k^n \geq a_1+a_2+\ldots+a_k .$$

132. Числа a, b, c и d положительны. Докажите неравенство

---

[15] Утверждение этой задачи появилось в «Кванте» без доказательства, но со ссылкой на серьезный журнал «American Mathematical Monthly» после длинного и сложного решения предыдущей задачи. Надеюсь, вы согласитесь, что при нашем подходе более общий результат доказать проще!

[16] Этот результат носит название неравенства Чебышева. Это и ряд похожих неравенств были установлены в 1882 г. русским математиком Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821–1894).

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1999}+\left(\frac{b}{c}\right)^{1999}+\left(\frac{c}{d}\right)^{1999}+\left(\frac{d}{a}\right)^{1999}\geq\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{d}{a}\right).$$

133. Числа *a, b, c, d* и *e* отличны от нуля. Докажите неравенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{4}+\left(\frac{b}{c}\right)^{4}+\left(\frac{c}{d}\right)^{4}+\left(\frac{d}{e}\right)^{4}+\left(\frac{e}{a}\right)^{4}\geq\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{d}{e}\right)+\left(\frac{e}{a}\right).$$

134. Докажите неравенство $\dfrac{a^p-b^p}{a^p+b^p}>\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, где $a>b>0$, $p>n$.

135. Какое число больше $\dfrac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$ или $\dfrac{10^{11}+1}{10^{12}+1}$?

136. Докажите, что функция $f(x)=\dfrac{2^x-1}{3^x-1}$ монотонна.[17]

137. Докажите, что если n – положительное число, то функция $F(x)=\dfrac{x^n\ln x}{x^n-1}$ возрастает при $x>0$.

138. Пусть $a_1, a_2,\ldots,a_k$, $p_1, p_2,\ldots,p_k$ – положительные числа. Докажите, что $a_1^{p_1}a_2^{p_2}\ldots a_k^{p_k}\leq\left(\dfrac{p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_ka_k}{p_1+p_2+\ldots+p_k}\right)^{p_1+p_2+\ldots+p_k}$.[18]

139. Докажите, что если a и b – произвольные положительные числа, m и n – натуральные числа, причем $m\geq n$, то $\sqrt[m]{a^m+b^m}\leq\sqrt[n]{a^n+b^n}$.

140. {h1144.1989} Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_k$ – неотрицательные числа. Что больше $\sqrt[1988]{a_1^{1988}+a_2^{1988}+\ldots+a_k^{1988}}$ или $\sqrt[1989]{a_1^{1989}+a_2^{1989}+\ldots+a_k^{1989}}$?

141. Докажите, что если $a_1,a_2,\ldots,a_k$ – положительные числа, то функция $f(x)=\left(a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x\right)^{\frac{1}{x}}$ убывает на интервалах $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$. Является ли она монотонной на всей области определения?[19]

---

[17] Простота этой задачи обманчива. Попробуйте решить ее, не ссылаясь на правило Декарта.

[18] Очевидно, это неравенство обобщает неравенство Коши. Аналогичным образом обобщаются и многие другие неравенства.

142. Докажите, что для любых положительных чисел $a \le b \le c \le d$ справедливо неравенство $a^b b^c c^d d^a \ge b^a c^b d^c a^d$.

143. {Л.1996} Докажите для любых положительных чисел a и b неравенство $a^b b^a \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$.

144. {О.1977} Выясните, какое из двух чисел больше $1978^{1976} \cdot 1976^{1978}$ или $1977^{2\cdot 1977}$.

145. Пусть a,b,c – положительные числа. Докажите неравенство $a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} \ge \frac{a+b+c}{3}$.

146. Пусть a, b, c – положительные числа. Докажите, что $a^a b^b c^c \ge (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

147. {Л1978} Пусть a_1, $a_2,\dots,a_k$,– положительные числа. Докажите, что $a_1^{ka_1} a_2^{ka_2} \dots a_k^{ka_n} \ge (a_1 a_2 \dots a_k)^{a_1+a_2+\dots+a_k}$.

148. Пусть a,b,c – положительные числа. Докажите неравенство $a^a b^b c^c \le \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c}$.

149. Пусть $a_1,a_2,\dots,a_k$,– положительные числа. Докажите, что $a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_k^{a_k} \le \left(\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_k^2}{a_1+a_2+\dots+a_k}\right)^{a_1+a_2+\dots+a_k}$

150. Пусть $a_1,a_2,\dots,a_k$, $b_1,b_2,\dots,b_k$ – положительные числа. Докажите, что

$$b_1 \ln\frac{b_1}{a_1} + b_2 \ln\frac{b_2}{a_2} + \dots + b_k \ln\frac{b_k}{a_k} \ge (b_1+b_2+\dots+b_k)\ln\frac{b_1+b_2+\dots+b_k}{a_1+a_2+\dots+a_k}.$$

---

[19] Интересно сравнить этот результат с результатом задач 5-10. Этот факт был получен датским математиком Иоганом Людвигом Иенсеном (1859–1925) в 1906 г. как приложение его новой теории выпуклых функций. Впрочем Иенсен указывает, что оно было доказано в 1902 г. А. Принсгеймом, а тот в свою очередь ссылается на Люрота

151. Пусть a,b,c – длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что $\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c \le 1$.

152. Пусть числа a,b,c положительны и $a+b+c=1$. Докажите, что
$$\left(\frac{(1-a)(1-b)}{c}\right)^{\frac{(1-a)(1-b)}{c}}\left(\frac{(1-b)(1-c)}{a}\right)^{\frac{(1-b)(1-c)}{a}}\left(\frac{(1-c)(1-a)}{b}\right)^{\frac{(1-c)(1-a)}{b}} \ge \frac{256}{81}.$$

153. Пусть a_1, $a_2,\ldots,a_k$,– положительные числа. Обозначим $p=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2$, $q=(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2$, $r=a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{k-1}a_k$. Докажите, что $2^{q+2r}p^pr^r \ge q^q$.

154. {Л.2008} Докажите, что при любых положительных a и b верно неравенство $(ab)^{a^2+b^2}\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{2ab} \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2(a+b)^2}$.

7. Обращения классических неравенств

Речь в этом разделе пойдет вот о чем. Возьмем для примера неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим. Выше доказано, что при положительных значениях переменных второе меньше первого. Но насколько меньше? Этим вопросом мы и будем заниматься. В этом и многих других случаях сказать что-либо содержательное, если переменные могут принимать *любые* положительные значения, не удается. Но если область изменения переменных сузить, получаются довольно интересные результаты.

Неравенства, рассмотренные в предыдущем разделе, получены в основном в XIX в. Их обращения – это уже математика века двадцатого. Нельзя сказать, чтобы эта тема занимала центральное место в математике прошлого века. Однако в этой области отметились первоклассные ученые. Имена Дьердя Пойа, Ричарда Беллмана и Леонида Витальевича Канторовича говорят сами за себя. Приводимые указания первоисточников, по-моему, убедительно доказывают, как непросто они давались. Ниже рассмотрен прием, позволяющий получать обращение параллельно с «основным» неравенством.

Задача 11. Пусть m и M – положительные числа и при любом i=1,…,k выполняются неравенства $m \le b_i \le M$. Докажите, что тогда

$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_k) + mM\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_k}\right) \le k(m + M).$$

Решение. В этом неравенстве нетрудно увидеть среднее арифметическое и среднее гармоническое. Поэтому имеет смысл вспомнить функцию $f(x) = \dfrac{b_1^x + b_2^x + \ldots + b_k^x}{k} - \left(\dfrac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k}\right)^x$, которая помогла нам доказать неравенство между этими двумя средними. С помощью чисел m и M сконструируем еще квазимногочлен $g(x) = \alpha m^x + \beta M^x - (\alpha m + \beta M)^x$. Параметры α и β подберем так, чтобы выполнялись равенства $\alpha + \beta = 1$ и $\alpha m + \beta M = A = \dfrac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k}$. Для этого нужно взять $\alpha = \dfrac{M - A}{M - m}$ и $\beta = \dfrac{A - m}{M - m}$. В силу результата задачи 9 числа α и β неотрицательны.

Рассмотрим квазимногочлен $h(x) = f(x) - g(x)$. Параметры α и β выбраны так, что отрицательные члены квазимногочленов $f(x)$ и $g(x)$ сократятся и в последовательности коэффициентов квазимногочлена $h(x)$ будет две перемены знаков: на первом и последнем местах. Но по построению $f(0)=f(1)=0$ и $g(0)=g(1)=0$. Поэтому квазимногочлен $h(x)$ имеет два корня 0 и 1. А значит, $h(x)>0$ при $0<x<1$ и $h(x)<0$ при $x<0$ и при $x>1$. В частности, $h(-1) \le 0$, что и требуется доказать.

Задача 12. {В.1978} Пусть m и M – положительные числа и при любом i=1,…,k выполняются неравенства $m \le b_i \le M$. Докажите, что тогда

$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_k)\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_k}\right) \le \frac{(m + M)^2}{4mM} k^2.$$

Этот результат был получен П. Швейцером в 1914 г.

Решение. В силу результата предыдущей задачи

$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_k)\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_k}\right) \le \frac{1}{mM} k^2 A(m + M - A),$$

где $A=\dfrac{b_1+b_2+...+b_k}{k}$. Остается заметить, что в силу простейшего варианта неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$A(m+M-A)\le\frac{(A+(m+M-A))^2}{4}=\frac{(m+M)^2}{4}.$$

Итак, мы доказали, что при выполнении условий задачи отношение среднего арифметического к среднему гармоническому нескольких чисел не превосходит $\dfrac{(m+M)^2}{4mM}k^2$. В этом смысле оно обращает «классическое» неравенство, согласно которому это отношение больше единицы.

Упражнения

155. Пусть m и M – положительные числа и при любом i=1,…,k выполняются неравенства $m\le b_i\le M$, а положительные числа $p_1,p_2,...,p_k$ удовлетворяют условию $p_1+p_2+...+p_k=1$. Докажите, что тогда $(p_1b_1+p_2b_2+...+p_kb_k)+mM\left(\dfrac{p_1}{b_1}+\dfrac{p_2}{b_2}+...+\dfrac{p_k}{b_k}\right)\le k(m+M)$.

156. Обозначим $A_n=\left(\dfrac{b_1^n+b_2^n+...+b_k^n}{k}\right)^{\frac{1}{n}}$. Пусть m и M – положительные числа и $m\le b_i\le M$ (i=1,…,k). Докажите, что тогда $(M-m)A_n^n-(M^n-m^n)A_1\le Mm^n-mM^n$, если n<0 или n>1, и имеет место противоположное неравенство, если 0<n<1.

157. Пусть положительные числа $p_1,p_2,...,p_k$ удовлетворяют условию $p_1+p_2+...+p_k=1$. Обозначим $A_n=\left(p_1b_1^n+p_2b_2^n+...+p_kb_k^n\right)^{\frac{1}{n}}$. Пусть m и M – положительные числа и при любом i=1,…,k выполняются неравенства $m\le b_i\le M$. Докажите, что тогда $(M-m)A_n^n-(M^n-m^n)A_1\le Mm^n-mM^n$, если n<0 или n>1, и имеет место противоположное неравенство, если 0<n<1.

158. Обозначим $A_n = \left(\dfrac{b_1^n + b_2^n + ... + b_k^n}{k} \right)^{\frac{1}{n}}$. Пусть n и r – отличные от нуля действительные числа, $n<r$, m и M – положительные числа и при любом $i=1,\dots,k$ выполняются неравенства $m \le b_i \le M$. Докажите, что тогда $(M^r - m^r)A_n^n - (M^n - m^n)A_r^r \le M^r m^n - m^r M^n$, если $nr<0$, и имеет место противоположное неравенство, если $nr>0$.

159. Пусть положительные числа $p_1, p_2, ..., p_k$ удовлетворяют условию $p_1+p_2+...+p_k=1$. Обозначим $A_n = \left(p_1 b_1^n + p_2 b_2^n + ... + p_k b_k^n \right)^{\frac{1}{n}}$. Пусть n и r – отличные от нуля действительные числа, $n<r$, m и M – положительные числа и $m \le b_i \le M$ $(i=1,\dots,k)$. Докажите, что тогда $(M^r - m^r)A_n^n - (M^n - m^n)A_r^r \le M^r m^n - m^r M^n$, если $nr<0$, и имеет место противоположное неравенство, если $nr>0$.[20]

160. Пусть m и M – положительные числа и при любом $i=1,\dots,k$ выполняются неравенства $m \le b_i \le M$, а $a_1, a_2, ..., a_k$ – произвольные действительные числа. Докажите, что тогда[21]

$$(a_1^2 b_1 + a_2^2 b_2 + ... + a_k^2 b_k)\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_k^2}{b_k} \right) \le$$

$$\le \frac{(m+M)^2}{4mM}\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2 \right)^2.$$

161. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 1. Докажите, что $3 + \sqrt{5} \le \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} \le 4\sqrt{2}$.

162. {Л.1988} Числа $a_1, a_2, \dots, a_k$ неотрицательны и $a_1+a_2+\dots+a_k=1/2$. Докажите, что $\dfrac{1-a_1}{1+a_1} \cdot \dfrac{1-a_2}{1+a_2} \cdot ... \cdot \dfrac{1-a_k}{1+a_k} \ge \dfrac{1}{3}$.

---

[20] Результаты предыдущих пяти упражнений получены в 1963–1964 гг. различными методами сразу несколькими авторами: Б. Ренье, А. Голдманом и А. Маршаллом и И. Олкином.

[21] Это неравенство доказано Л. В. Канторовичем в 1948 г.

163. Для заданного числа $n\geq 2$ найти наибольшее и наименьшее значения произведения $a_1a_2\ldots a_n$ при условии, что $a_i\geq 1/n$ ($i=1,2,\ldots,n$) и $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1$.

164. Пусть a, b, c – стороны некоторого треугольника. Докажите, что $(a+b+c)^3<4(a+b)(a+c)(b+c)$.

165. {W.1991, h1317.1991} Дан треугольник ABC. Пусть A', B', C' – точки пересечения биссектрис углов CAB, ABC, BCA со сторонами BC, CA, AB соответственно и I – центр вписанной окружности. Докажите, что $\frac{1}{4}<\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leq\frac{8}{27}$.

8. Квазимногочлены с тремя корнями

До сих пор в приложениях мы рассматривали квазимногочлены с одним или двумя корнями. В следующих задачах полезны более сложные квазимногочлены.

Задача 13. Пусть числа a,b,c положительны и их произведение равно 1. Решите уравнение $a^t+b^t+c^t=\frac{1}{a^t}+\frac{1}{b^t}+\frac{1}{c^t}$.

Решение. Не ограничивая общности, можем считать, что $a\geq b\geq c$. Тогда $\frac{1}{c}\geq\frac{1}{b}\geq\frac{1}{a}$. Рассмотрим случай $a\geq\frac{1}{c}$ (случай $a\leq\frac{1}{c}$ сводится к нему заменой переменных). Тогда $a\geq\frac{1}{c}=ab$ и, следовательно, $b\leq 1$. Итак, $a\geq\frac{1}{c}\geq\frac{1}{b}\geq 1\geq b\geq c\geq\frac{1}{a}$, т. е. запись квазимногочлена $f(t)=a^t-\left(\frac{1}{c}\right)^t-\left(\frac{1}{b}\right)^t+b^t+c^t-\left(\frac{1}{a}\right)^t$ является стандартной и последовательность его коэффициентов имеет три перемены знаков. Следовательно, этот квазимногочлен имеет не более трех корней. Очевидно, 0 – его корень. В силу того, что произведение чисел a,b,c равно 1, его производная в точке 0 также равна нулю, то есть этот корень как минимум двукратный. Функция $f(t)$ нечетна, значит 0 – ее корень нечетной кратности. Поэтому его кратность не меньше трех.

Но в силу правила Декарта этот квазимногочлен не может иметь больше трех корней с учетом кратности. Значит, других корней нет.

Упражнения

166. {Р.1999} Произведение положительных чисел *a, b* и *c* равно 1. Докажите, что если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq a+b+c$, то для любого натурального *k* выполнено неравенство $\frac{1}{a^k}+\frac{1}{b^k}+\frac{1}{c^k}\geq a^k+b^k+c^k$.

167. {О.1993} Докажите, что для любых действительных чисел *a, b* и *c* таких, что $a>b>c>0$, выполнено неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}.$$

168. {С.1999–2000} Если $a^4b^3+b^4c^3+c^4a^3=a^3b^4+b^3c^4+c^3a^4$, то $(a-b)(b-c)(c-a)=0$. Докажите это.

169. {М.2003} Для положительных чисел *a, b* и *c* выполнено равенство $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}=\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{b^2}{a}$. Докажите, что хотя бы два из чисел *a, b, c* равны между собой.

170. {h1402.1993} Докажите для положительных чисел $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$ $(n>2)$ неравенство $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}\geq\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}$.

171. Докажите, что для $a>0$ и $t\geq 2$ выполняется неравенство

$$a^t+a^{-t}+2^t\leq(a+a^{-1})^t+2.$$

172. {h1207.1990} Пусть *m* натуральное число. Докажите неравенство $\left(x^2+y^2\right)^m\geq 2^m x^m y^m+\left(x^m-y^m\right)^2$.

9. Указания

1. Разделите на x^{n-1}.
2. Разделите на x^{n-k}.
3. Равенство $f(0)=0$ возможно лишь при $b=1$ и $c=1$.
4. Разделите на x^{95}. Ответ: {0,1}.
5. Неравенство приводится к виду $a^2-ab+b^2-1\leq 0$.
6. Рассмотрим многочлен

$$f(x)=[3(a^2+b^2)-2ab]x^2-2ab(a+b)x-3(1-a^2b^2).$$

По условию $1-a^2b^2\geq 0$, поэтому последовательность его коэффициентов содержит одну перемену знаков и, кроме того, $f(0)<0$. Поэтому достаточно доказать, что $f(1)\leq 0$, то есть

$$3(a^2+b^2)-2ab-2ab(a+b)-3(1-a^2b^2)\leq 0.$$

Рассмотрим функцию $g(x)=(3-2a-3a^2)x^2-(2a+2a^2)x-3(1-a^2)$. По условию $1-a^2\geq 0$, следовательно, уравнение $g(x)=0$ имеет не более одного положительного корня и $g(0)\leq 0$. Поэтому достаточно доказать, что $g(1)\leq 0$, то есть $4a^2-4a\leq 0$. Последнее неравенство проверяется легко.

7. $f(x)=x^{17}-b^7x^{10}-c^{10}x^7-(b^{10}c^7+1-b^{17}-c^{17})$, $g(x)=x^{17}-c^7x^{10}-(1-c^{17})$ и $h(x)=x^{17}-c^7x^{10}-x^7-(c^{10}-c^{17})$. Дословно повторите решение задачи 2.

8. Докажем даже больше: для всех x из отрезка $\left[1,\frac{1}{k}\right]$ выполняется неравенство

$$\left(1+x\right)^k-1-kx-k^2x^2=$$
$$=x^k+kx^{k-1}+\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)}{6}x^3-\frac{k^2+k}{2}x^2\leq 0.$$

Для этого рассмотрим многочлен

$$f(x)=x^{k-2}+kx^{k-3}+\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)}{6}x-\frac{k^2+k}{2}x.$$

Все его коэффициенты, кроме последнего, положительны, следовательно, в силу результата задачи 3, он имеет не более одного положительного корня. А поскольку очевидно $f(0)<0$, достаточно доказать, что $f\left(\frac{1}{k}\right)<0$, то есть, $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\leq 3$, а это – факт известный.

9. $f(x)=x^{n+1}-x^n-\ldots-1>0$ при $x\geq 2$. Это следует из $f(2)=1$ и $f(\infty)>0$.

10. $f(x)=x^{1999}-x^{1998}-2x-2$, $f(1)<0$, $f(2)>0$, разделите на x^{1998}.

11–12. Воспользуйтесь теоремой Виета.

13. Считая, что $a\geq b\geq c$, рассмотрите случаи $2b\geq a+c$ и $2b<a+b$.

14. Запишите уравнение в виде $(x^2-2)^2+5x^3+7x=0$.

15. $f(x)=x^{1986}-x^{1985}-(1986^{1986}-1986^{1985})$. Один корень $x=1986$.

16. Свободный член положителен. Сделайте его большим.

17. Сдвиньте график многочлена вниз.

18. Очевидно, неположительных корней у данного многочлена нет. Умножив его на $(x+1)^2$ (лучше сделать это в два приема), получим многочлен с положительными коэффициентами, у которого нет положительных корней. Значит, таковых не было и у исходного многочлена.

19. Продифференцируйте, разделите на x^3 и продифференцируйте. Используйте теорему Ролля.

20. Многократно примените тот же трюк.

21. Воспользуйтесь индукцией по степени многочлена.

22. Степень многочлена и количество его корней имеют одинаковую четность.

23. Умножьте многочлен на $t-1$ и воспользуйтесь результатами предыдущих упражнений.

24. Замена переменной $qt \to t$ сводит задачу к предыдущей.

25. Умножьте многочлен на $(t-1)^2$.

26. $k-n+1$ раз продифференцируйте, разделите на x^{n+1} и еще $n-1$ раз продифференцируйте. Воспользуйтесь теоремой Ролля. Дискриминант получившегося квадратного трехчлена положителен.

27. Примените результат предыдущей задачи к многочлену $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)$ при $n=1$.

28. Задача решается аналогично предыдущей.

29. Допустим, что многочлен имеет два положительных корня. Рассмотрим два соседних. В силу равенства $f(x) = -f'(x) + (-1)^n \dfrac{x^n}{n!}$ эти корни не могут быть кратными, а значит, в одном из них многочлен убывает, а в другом возрастает, то есть производная многочлена в этих двух точках принимает значения разного знака. Но в силу того же равенства значения производной во всех точках, где $f(x)=0$ имеет тот же знак, что и $(-1)^{n+1}$. Получено противоречие.

30. Сравните значения многочлена при $x=0$ и при $x\to\infty$.

31. Чтобы осуществить шаг индукции по числу членов воспользуйтесь следующей операцией: сначала продифференцировать многочлен, а затем разделить результат на подходящую степень переменной, чтобы свободный член стал опять ненулевым.

32. Данное неравенство эквивалентно системе $f(t)=t^{12}-t^9-t^3+1\geq 0$, $t\neq 0$. $f(1)=f'(1)=0$ и в силу правила Декарта других корней нет.

33. У многочлена $f(x)=(1+x^2+\ldots+x^{100})(1+x^{100})-102x^{101}$ отрицательных корней нет, а в силу правила Декарта положительных – не более двух. Но $x=1$ – корень, и если x – корень, то и $1/x$ – тоже корень. Значит, $x=1$ – двукратный корень и других нет.

34. Работает та же идея, что в предыдущем упражнении.

35. Обозначим $t=x/y$. Нам достаточно доказать неравенство $2t^4-t(t+1)^2+2\geq 0$ при неотрицательных значениях t. И вновь проходит прежняя схема рассуждений.

36. Идея решения предыдущей задачи проходит без изменений.

37. Докажем правое неравенство. Пусть $f(x)=x^m-mx+(m-1)$. Так как $f(1)=0$ и $f'(1)=0$, то $x=1$ – двукратный корень. В силу правила Декарта других корней нет. Левое неравенство доказывается так же.

38–40. Решения полностью аналогичны.

41. Рассмотрите значения квазимногочлена при $t\to-\infty$ и $t\to+\infty$.

42. Избавившись от знаменателей и приведя подобные, получим равносильное неравенство $7\cdot 2^x+2\cdot 3^x-5\cdot 4^x\leq 0$.

43. Непосредственно проверяется, что $x=2$ – корень данного уравнения. Отсюда, в частности, следует, что $2+\sqrt{3}<2\sqrt{2+\sqrt{3}}$, а потому этот корень единственный.

44. Разность левой и правой частей уравнения содержит три знака сложения и вычитания, а значит, не более трех перемен знака.

45. Если $a^n<x^n<2a^n$, то рассмотрите квазимногочлен $f(t)=(x^n-a^n)^t+(2a^n-x^n)^t-(a^n)^t$, а если $x^n<a^n$ и $x^n>2a^n$ – то квазимногочлены $g(t)=(2a^n-x^n)^t-(a^n-x^n)^t-(a^n)^t$ и $h(t)=(x^n-a^n)^t-(x^n-2a^n)^t-(a^n)^t$.

46. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_k$ – данные числа. Квазимногочлен $f(t)=(a_1-1)a_1^t+(a_2-1)a_2^t+\ldots+(a_k-1)a_k^t$. Он имеет один корень $t=1$.

47. Можно считать, что числа a_i отличны от нуля. По условию квазимногочлен $f(x)=\frac{a_1}{|a_1|}|a_1|^x+\frac{a_2}{|a_2|}|a_2|^x+\ldots+\frac{a_k}{|a_k|}|a_k|^x$ обращается в нуль более чем в k точках. Значит, он тождественно равен нулю.

48. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

49. По условию $\sin ax+\sin bx-\sin cx-\sin dx=0$. Дифференцируя это равенство, получим $a\cos ax+b\cos bx-c\cos cx-d\cos dx=0$. Вновь дифференцируя, получим $a^2\sin ax+b^2\sin bx-c^2\sin cx-d^2\sin dx=0$ и т. д.. Полагая $x=0$, получим равенства $a+b=c+d$, $a^3+b^3=c^3+d^3$,…. Остается воспользоваться результатом упражнения 47.

50. В силу первого условия либо все числа положительны, либо одно положительны, а два отрицательны. Первый случай тривиален. Во втором случае можем, не ограничивая общности, считать, что положительно число a. Тогда в силу второго условия оно самое большое по модулю и квазимногочлен $f(x)=a^x-(-b)^x-(-c)^x$ только один раз меняет знак. Но он положителен при $x=1$ и при очень больших x. Следовательно, он положителен при всех $x>1$.

51. Если a – наибольшее из чисел, то из первого равенства следует, что b – наименьшее. Значит, последовательность коэффициентов квазимногочлена $f(t)=a^i-c^t-d^t+b^t$ содержит две перемены знаков. Но этот квазимногочлен имеет три корня: 0, 1 и 3 – противоречие.

52. Как и в решении предыдущего упражнения, убеждаемся, что условия $a>c$ и $a>d$ приводят к противоречию. Значит, число a равно одному из чисел c или d.

53. Не уменьшая общности, считаем, что $a\geq b\geq c\geq d$ и $|a|\geq|d|$. Если $b<0$, рассмотрим квазимногочлен $f(x)=a^x-|b|^x-|c|^x-|d|^x$. Последовательность его коэффициентов имеет одну перемену знака, а сам он обращается в ноль в двух точках $x=1$ и $x=1987$. Следовательно, он нулевой. Если $b>0$, то $c<0$ и $|c|\geq|b|$. В этом случае рассмотрим квазимногочлен $g(x)=a^x-|d|^x-|c|^x+b^x$. Последовательность его коэффициентов имеет две перемены знака, а сам он имеет три корня: $x=0$, $x=1$ и $x=1987$. Следовательно, он нулевой.

54. Рассмотрим квазимногочлен $f(t)=x^t+z^t-y^t-(x-y+z)^t$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x\geq z$. Ввиду равенства $x+z=y+(x-y+z)$ при стандартной записи последовательность его коэффициентов содержит две перемены знаков. Но он имеет три корня 0, 1 и 2. Значит, по правилу Декарта он тождественно равен нулю.

55. Те же рассуждения с заменой корня $t=2$ на корень $t=1/2$.

56. Рассмотрите различные комбинации знаков неизвестных. Ответ: два из чисел x,y,z должны быть раны нулю, а третье равно a.

57. Квазимногочлен $f(t)=1+\operatorname{sign}x|x|^t+\operatorname{sign}y|y|^t+\operatorname{sign}z|z|^t$ при любом количестве отрицательных чисел имеет больше корней, чем число перемен знаков в последовательности его коэффициентов.

58. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=\operatorname{sign}x|x|^t+\operatorname{sign}y|y|^t+\operatorname{sign}z|z|^t-\operatorname{sign}(x+y+z)|x+y+z|^t.$$

Очевидно, $f(1)=f(-1)=0$. Как и в решении упражнения 47, убеждаемся, что квазимногочлен тождественно равен нулю.

59. Пусть $f(x)=\frac{1}{1+a}(1+a)^x+\frac{1}{1-a}a^x-\frac{1}{1-a}$. Этот квазимногочлен имеет ровно два корня 1 и 2.

60. По условию $ka_k\le a_1+a_2+\ldots+a_k<1+a_1+a_2+\ldots+a_n$. Поэтому последовательность коэффициентов квазимногочлена

$$f(x)=(1+a_1+a_2+\ldots+a_n)^x-1-\frac{1}{1}(1a_1)^x-\frac{1}{2}(2a_2)^x-\ldots-\frac{1}{n}(na_n)^x$$

имеет одну перемену знака. Значит, этот квазимногочлен имеет один корень $x=1$. Остается заметить, что $f(0)=1-1-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n}<0$.

61. Пусть $f(t)=\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{a}\right)a^t+\left(\frac{b}{a}-\frac{c}{b}\right)b^t+\left(\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right)c^t$. Коэффициент при экспоненте с наибольшим основанием положителен, а коэффициент при экспоненте с наименьшим основанием отрицателен. Независимо от знака третьего коэффициента, последовательность коэффициентов квазимногочлена имеет одну перемену знака.

62. Пусть $f(t)=x_1+2x_2\cdot 2^t+3x_3\cdot 3^t+4x_4\cdot 4^t+5x_5\cdot 5^t-\left(\sqrt{a}\right)^t$. По условию этот квазимногочлен должен иметь три корня (1, 2 и 3), а последовательность его коэффициентов не может содержать больше двух перемен знака. Следовательно, этот квазимногочлен должен быть нулевым. А так как a^t может сократиться только с одним слагаемым, все остальные члены должны быть равны нулю.

63. Рассмотрим функцию $f(x)=(1-a)^x+(1+a)^x-2^x$. Очевидно, $f(1)=0$, а согласно правилу Декарта эта функция имеет не более одного корня. Остается заметить, что при о очень больших x она отрицательна.

64. Так как $|\alpha| < 2$, каждое из чисел $a_i^2 + b_i^2 + \alpha a_i b_i$ неотрицательно и не превосходит суммы всех этих чисел. Поэтому запись квазимногочлена $f(t) = \left(\sum_{i=1}^{k} \left(a_i^2 + b_i^2 + \alpha a_i b_i \right) \right)^t - \sum_{i=1}^{k} \left(a_i^2 + b_i^2 + \alpha a_i b_i \right)^t$, является стандартной. Значит, в силу правила Декарта квазимногочлен имеет один корень $t=1$. В этой точке квазимногочлен меняет знак с минуса на плюс, значит, его значения при $t<1$ отрицательны.

65. Доказываемое неравенство не изменится, если ко всем числам y_i добавить одно и то же положительное число. Поэтому можно считать, что числа y_i положительны. Рассмотрим квазимногочлен $f(t) = \left(x_k - x_k^{13} \right) y_k^t + \left(x_{k-1} - x_{k-1}^{13} \right) y_{k-1}^t + \ldots + \left(x_1 - x_1^{13} \right) y_1^t$. Данная его запись является стандартной, причем первые несколько его членов имеют положительные коэффициенты, а остальные – отрицательные. В силу правила Декарта $f(t)$ имеет один корень $t=0$ и, кроме того, $f(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Но тогда $f(1)>0$, что и требуется доказать.

66. Для доказательства левого неравенства рассмотрите квазимногочлен $f(t) = p^t - (p-a)^t - (p-b)^t - (p-c)^t$.

Для доказательства правого неравенства рассмотрите квазимногочлен $g(t) = 3\left(\frac{p}{3} \right)^t - (p-a)^t - (p-b)^t - (p-c)^t$.

67. Пусть S_a, S_b, S_c и S – площади треугольников *MBC, MAC, MAB* и *ABC* соответственно. Тогда $S_a+S_b+S_c=S$ и доказываемое неравенство может быть переписано в виде $\frac{S}{S_a} + \frac{S}{S_b} + \frac{S}{S_c} \geq 9$. Рассмотрите квазимногочлен $f(t) = S_a^t + S_b^t + S_c^t - 3\left(\frac{S_a + S_b + S_c}{3} \right)^t$.

68. Из анализа предыдущего решения следует, что производная рассмотренного там квазимногочлена $f(t)$ при $t=0$ неположительна.

69. Рассмотрим функцию $f(x)=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^x-\dfrac{a^x+b^x}{2}$. Имеем не более двух перемен знака и два очевидных корня $x=0$ и $x=1$. Остается воспользоваться легко проверяемым неравенством $f(2)\le 0$.

70–71. Повторите рассуждения предыдущей задачи с

$$f(t)=\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2}\right)^t-\frac{\left(\sin^2 x\right)^t+\left(\cos^2 x\right)^t}{2}.$$

72. Правое неравенство доказано в упражнении 63. Для доказательства левого неравенства рассмотрим квазимногочлен $g(t)=(1+a)^t-2+(1-a)^t$. Последовательность его коэффициентов содержит две перемены знаков, следовательно, он имеет два корня $t=0$ и $t=1$ и на интервале $[1,+\infty)$ он не меняет знака. Он положителен, так как $g(2)>0$.

73. Последовательность коэффициентов квазимногочлена $f(t)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^t-\left(\dfrac{2}{3}\right)^t-\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^t$ имеет две перемены знака. Сам квазимногочлен имеет два корня $t=0$ и $t=1$.

74. См. указание к упражнению 54.

75. Пусть $f(x)=\left(1+\dfrac{a}{b}\right)^x+\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^x-2\cdot 2^x$. Последовательность коэффициентов квазимногочлена имеет не более двух перемен знака, и $f(0)=f(-1)=0$. Значит, $f(x)>0$ при $x<-1$ и $x>0$.

76. Пусть $f(t)=\dfrac{1}{1+x}(1+x)^t+\dfrac{x}{1+x}(x(1+x))^t-(2x)^t$. Надо доказать, что $f(n)\ge 0$. Если $x<1$, то $x(1+x)<2x<1+x$, а если $x>1$, то $1+x<2x<x(1+x)$. В любом случае последовательность коэффициентов этого квазимногочлена $f(t)$ имеет две перемены знака, и отрицательным является средний коэффициент, при этом $f(0)=0$ и $f(1)\ge 0$.

77. Пусть $f(t)=a^t+b^t+2\left(\dfrac{c}{2}\right)^t+4\left(\dfrac{d}{4}\right)^t-8\left(\dfrac{a+b+c+d}{8}\right)^t$. Этот квазимногочлен имеет ровно два корня 0 и 1, а потому положителен на интервале $(-\infty,0)$. Неравенство $f(-1)\ge 0$ искомое.

78. Добавив 1 к каждой из дробей, с учетом условия получим эквивалентное неравенство $\frac{2}{1+b+c}+\frac{2}{1+a+c}+\frac{2}{1+a+b}\geq\frac{18}{5}$. Квазимногочлен $f(t)=(1+b+c)^t+(1+a+c)^t+(1+a+b)^t-3\left(\frac{5}{3}\right)^t$ имеет два корня 0 и 1, и поскольку отрицательный член всего один, других корней у него нет. Поэтому $f(-1)\geq 0$, что и требуется доказать.

79. Перепишем неравенство пункта *в)* в эквивалентной форме, добавив к каждой дроби в левой части единицу. Получим $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{a_2+a_3+\ldots+a_k}+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{a_1+a_3+\ldots+a_k}+\ldots+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}\geq\frac{k^2}{k-1}$. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=\left(\frac{(k-1)(a_1+a_2+\ldots+a_k)}{k(a_2+a_3+\ldots+a_k)}\right)^t+\ldots+\left(\frac{(k-1)(a_1+a_2+\ldots+a_k)}{k(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})}\right)^t-k.$$

В силу правила Декарта он имеет ровно два корня 0 и –1 и положителен при $t>0$, в частности, при $t=1$, что и требуется доказать.

80. После раскрытия скобок функция

$$f(t)=\left(1+a_1\cdot\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^t\right)\cdot\left(1+a_2\cdot\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^t\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+a_1\cdot\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^t\right)-(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)$$

превратится квазимногочлен с одним отрицательным слагаемым, который имеет два корня 0 и –1, а потому положителен при $t=1$.

81. Рассмотрим функцию

$$f(t)=\left(1+a_1^2\cdot\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^t\right)\cdot\left(1+a_2^2\cdot\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^t\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+a_n^2\cdot\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^t\right)-(1+a_1^2)\cdot(1+a_2^2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n^2)\cdot$$

Как и в решении предыдущей задачи, убеждаемся, что она имеет два коня 0 и –2, а потому положительна при $t=3$.

82. Как и в решениях двух предыдущих задач, убеждаемся, что

$$f(t)=\left(a_1+a_2\cdot\left(\frac{a_2}{a_n}\right)^t\right)\cdot\left(a_2+a_3\cdot\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^t\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_n+a_1\cdot\left(\frac{a_1}{a_{n-1}}\right)^t\right)-$$

$$-(a_1+a_2)\cdot(a_2+a_3)\cdot\ldots\cdot(a_n+a_1)$$

имеет два корня 0 и –1, и потому $f(1)\geq 0$.

83. Разделите неравенство на abc и рассмотрите квазимногочлен $f(t)=a\left(\frac{a}{c}\right)^t+b\left(\frac{b}{a}\right)^t+c\left(\frac{c}{b}\right)^t-\left(a+b+c\right)\cdot 1^t$.

84. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^t+\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^t+\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^t+\frac{c}{2}\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^t+\frac{c}{2}\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^t+$$

$$+\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^t-\left(a+b+c\right)\cdot 1^t.$$

Он имеет ровно два корня t=0 и t=–1. Поэтому значение квазимногочлена при t=1 положительно, что и доказывает левое неравенство.

Для доказательства правого рассмотрим квазимногочлен

$$g(t)=\frac{a^2}{2b}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^t+\frac{a^2}{2c}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^t+\frac{b^2}{2a}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^t+\frac{b^2}{2c}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^t+$$

$$+\frac{c^2}{2a}\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^t+\frac{c^2}{2b}\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^t-\left(\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\right)\cdot 1^t.$$

В силу правила Декарта он имеет не более двух корней и, кроме того, положителен при очень больших и очень маленьких значениях t. Один корень равен 0. Второй лежит на интервале $(-\infty,-1)$, так как $g(-1)=-\frac{\left(a-b\right)^2}{2c}-\frac{\left(b-c\right)^2}{2a}-\frac{\left(c-a\right)^2}{2b}<0$. Следовательно, на интервале $(0,+\infty)$ корней нет и $g(1)\geq 0$, что и требуется доказать.

85. Пусть $f(t)=\frac{a^2}{c}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^t+\frac{b^2}{a}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^t+\frac{c^2}{b}\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^t-\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\right)$.

Так как произведение чисел $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ и $\frac{c}{a}$ равно 1, в стандартной записи последовательность коэффициентов многочлена имеет две перемены знаков. Согласно правилу Декарта квазимногочлен имеет четное число корней, но не более двух. t=0 – корень, следовательно, корней ровно два. Если второй корень меньше 0, то квазимногочлен положителен при t>0, в частности $f(1)\geq 0$, а это – нужное нам неравенство.

Если же этот корень больше 0, то квазимногочлен положителен при $t<0$, в частности, $f(-3)\geq 0$, а это опять то, что нам нужно.

86. Рассмотрите функцию $f(x)=(1+b)\left(\frac{1+a}{1+b}\right)^x-b\left(\frac{a}{b}\right)^x-1$.

87. Если $c\leq d$, то очевидно $ac+bc\leq ac+bd$, $ac+bd\leq ad+bd$, $ac+bc\leq ad+bc$, $ad+bc\leq ad+bd$. А если $d\leq c$, то выполняются обратные неравенства. В любом случае последовательность коэффициентов квазимногочлена $f(t)=(ac+bd)^t+(ad+bc)^t-(ac+bc)^t-(ad+bd)^t$ содержит две перемены знака, а значит, сам квазимногочлен имеет не более двух корней. Но очевидно, $f(0)=f(1)=0$, поэтому $f(t)\leq 0$ при $t\geq 1$.

88. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(x)=\frac{b_1^q b_1^x+b_2^q b_2^x+\ldots+b_k^q b_k^x}{k}-\frac{b_1^q+b_2^q+\ldots+b_k^q}{k}\cdot\frac{b_1^x+b_2^x+\ldots+b_k^x}{k}.$$

Он имеет одну перемену знака (сообразите, почему!) и корень $x=0$.

89. Рассмотрите квазимногочлен

$$f(t)=a_1\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^t+a_2\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^t+\ldots+a_k\left(\frac{a_k}{a_1}\right)^t-(a_1+a_2+\ldots+a_k).$$

90. Рассмотрите квазимногочлен

$$f(t)=a_1\left(\frac{2a_1}{a_1+a_2}\right)^t+\ldots+a_{k-1}\left(\frac{2a_{k-1}}{a_{k-1}+a_k}\right)^t+a_k\left(\frac{2a_k}{a_k+a_1}\right)^t-(a_1+\ldots+a_k).$$

91. Перепишем неравенство в эквивалентной форме $\frac{2A^2}{B+C}+\frac{2B^2}{A+C}+\frac{2C^2}{A+B}\geq 3$, где $A=bc$, $B=ac$, $C=ab$. Квазимногочлен $f(t)=A\left(\frac{2A}{B+C}\right)^t+B\left(\frac{2B}{A+B}\right)^t+C\left(\frac{2C}{A+B}\right)^t-(A+B+C)$ имеет два корня 0 и -1 и всего один отрицательный член. Неравенство $f(1)\geq 0$ дает $\frac{2A^2}{B+C}+\frac{2B^2}{A+C}+\frac{2C^2}{A+B}\geq A+B+C$, что даже сильнее, чем нужно, так как $A+B+C\geq 3\sqrt[3]{ABC}=3\sqrt[3]{(abc)^2}=3$.

92. Рассмотрите квазимногочлен

$$f(t)=a_1\left(\frac{2a_1}{a_1+b_1}\right)^t+a_2\left(\frac{2a_2}{a_2+b_2}\right)^t+\ldots+a_k\left(\frac{2a_k}{a_k+b_k}\right)^t-(a_1+a_2+\ldots+a_k)\,.$$

93. Рассмотрите квазимногочлен

$$f(x)=b_1\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^x+\ldots+b_k\left(\frac{a_k}{b_k}\right)^x-(b_1+\ldots+b_k)\left(\frac{a_1+\ldots+a_k}{b_1+\ldots+b_k}\right)^x.$$

94. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=a\left(\frac{a}{a^2+abc}\right)^t+b\left(\frac{b}{b^2+abc}\right)^t+c\left(\frac{c}{c^2+abc}\right)^t-$$

$$-(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+3abc}\right)^t.$$

Неравенство $f(1)\geq 0$ сильнее, чем нужно.

95. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=a^2\left(\frac{a^2}{a^3+a^2b+ab^2}\right)^t+b^2\left(\frac{b^2}{b^3+b^2c+bc^2}\right)^t+c^2\left(\frac{c^2}{c^3+c^2a+ca^2}\right)^t-$$

$$-\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+a^2b+ab^2+b^3+b^2c+bc^2+c^3+c^2a+ca^2}\right)^t.$$

Имеем $f(-1)=f(0)=0$, и, следовательно $f(1)\geq 0$.

96. Пусть a,b,c – длины сторон треугольника, u,v,w – расстояния до них от точки P. Квазимногочлен $f(t)=a\left(\frac{a}{au}\right)^t+b\left(\frac{b}{bv}\right)^t+c\left(\frac{c}{cw}\right)^t-\left(a+b+c\right)\left(\frac{a+b+c}{au+bv+cw}\right)^t$ имеет ровно два корня 0 и –1, а потому неотрицателен при $t=1$.

97. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=a_1^2\left(\frac{2a_1}{a_1+a_2}\right)^t+a_2^2\left(\frac{2a_2}{a_2+a_3}\right)^t+\ldots$$

$$\ldots+a_{k-1}^1\left(\frac{2a_{k-1}}{a_{k-1}+a_k}\right)^t+a_k^2\left(\frac{2a_k}{a_k+a_1}\right)^t-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2).$$

Так как $f(0)=0$ и $f(-1)\leq 0$, то $f(1)\geq 0$.

98. Если $f(t)=\left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\right)^t-2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^t+\left(\sqrt{ab}\right)^t$, то $f(0)=f(2)=0$.

99. $f(t)=\left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^t-3\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^t+2\left(\sqrt{\dfrac{ab+bc+ac}{3}}\right)^t$.

100–101. Неравенство упражнения 101 сильнее, и получается рассмотрением квазимногочлена

$$f(t)=\left(\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_k^2}{k}}\right)^t-k\left(\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}\right)^t+$$

$$+(k-1)\left(\sqrt{\frac{2(a_1a_2+a_1a_3+...+a_1a_k+a_2a_3+...+a_{k-1}a_k}{k(k-1)}}\right)^t.$$

102. $f(0)=f'(0)=0$, где $f(t)=\left(\dfrac{x^6}{y^2}\right)^t-\left(x^4\right)^t-\left(y^y\right)^t+\left(\dfrac{y^6}{x^2}\right)^t$.

103–105. Функция $f(t)=\mathrm{tg}^t\alpha+\mathrm{tg}^t\beta+\mathrm{tg}^t\gamma-3\left(\dfrac{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma}{3}\right)^t$ имеет корни 0 и 1, поэтому ее производная в нуле неположительна. Третье неравенство получается с использованием первых двух.

106–109. Квазимногочлены

$$f(t)=(\sin^2\alpha)^t+(\sin^2\beta)^t+(\sin^2\gamma)^t-3\left(\frac{2}{3}(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\right)^t$$

и $g(t)=2-(\sin^2\alpha)^t-(\sin^2\beta)^t-(\sin^2\gamma)^t+\left(2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right)^t$ имеют корни 0 и 1 (каждый).

110. Квазимногочлен

$$f(t)=\left(\cos^2\alpha\right)^t+\left(\cos^2\beta\right)^t+\left(\cos^2\gamma\right)^t+\left(2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right)^t-4\left(\frac{1}{4}\right)^t$$

имеет два корня 0 и 1.

111–112. Воспользуйтесь полученными результатами.

113. Квазимногочлен

$$f(t)=\left[a\left(\frac{a_1}{a}\right)^t+b\left(\frac{b_1}{b}\right)^t+c\left(\frac{c_1}{c}\right)^t\right]\left[a_1\left(\frac{a}{a_1}\right)^t+b_1\left(\frac{b}{b_1}\right)^t+c_1\left(\frac{c}{c_1}\right)^t\right]-(a_1+b_1+c_1)(a+b+c)$$

имеет три корня 0, 1 и 1/2, значит, он тождественно равен нулю.

114. Рассмотрите квазимногочлен

$$f(t)=(a_1a_1^t+a_2a_2^t+\ldots+a_ka_k^t)\left(\left(\frac{1}{a_1}\right)^t+\left(\frac{1}{a_2}\right)^t+\ldots+\left(\frac{1}{a_k}\right)^t\right)-k(a_1+a_2+\ldots+a_k)\bullet 1^t\,.$$

115. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(x)=(a_1^xb_1^{2-x}+a_2^xb_2^{2-x}+\ldots+a_n^xb_n^{2-x})(a_1^{2-x}b_1^x+a_2^{2-x}b_2^x+\ldots+a_n^{2-x}b_n^x)-c\,,$$

где c – некоторая константа. Он имеет не более двух корней, но если x_0 – корень, то $1\text{-}x_0$ – тоже корень. Поэтому на каждом из интервалов $(-\infty,1]$ и $[1,+\infty)$ квазимногочлен имеет не более одного корня и в силу задачи 3 на каждом из этих интервалов функция $f(x)$ монотонна.

116–118. Воспользуйтесь результатом предыдущего упражнения.

119. Пусть $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ – данный многочлен. Рассмотрите функцию $g(t)g(-t)$, где $g(t)=\left(a_0+a_1xy\left(\frac{x}{y}\right)^t+\ldots+a_nx^ny^n\left(\frac{x^n}{y^n}\right)^t\right)$.

120. $g(t)=\left(a_0+a_1x^t+\ldots+a_n\left(x^n\right)^t\right)\left(a_0+a_1\left(\frac{1}{x}\right)^t+\ldots+a_n\left(\frac{1}{x^n}\right)^t\right)-1$.

121–122. Рассмотрите квазимногочлен

$$f(x)=(a_0^2)^x(b_0^2)^{1-x}-(a_1^2)^x(b_1^2)^{1-x}-\ldots-(a_k^2)^x(b_k^2)^{1-x}-(a_0^2-a_1^2-\ldots-a_k^2)^x(b_0^2-b_1^2-\ldots-b_k^2)^{1-x}\,.$$

123–124. Квазимногочлен от t, представляющий собой разность левой и правой частей неравенства упр. 125, имеет два корня 0 и 2.

125. Рассмотрите $f(t)=2\left(2^{a+b+c}\right)^t-\left(2^{a+b}\right)^t-\left(2^{a+c}\right)^t-\left(2^{b+c}\right)^t+1$. Корень t=0 кратный.

126. $f(t)=\left(r_ar_b\right)^t+\left(r_ar_b\right)^t+\left(r_ar_b\right)^t-3\left(\frac{p^2}{3}\right)^t$ имеет корни 0 и 1.

127. $f(x)=\dfrac{a_1^x+a_2^x+\ldots+a_6^x}{6}-\dfrac{a_1^x+a_2^x+\ldots+a_{10}^x}{10}$ имеет один корень.

128.
$$f(x)=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\cdot\frac{b_1^x+b_2^x+\ldots+b_k^x}{k}-\frac{a_1b_1^x+a_2b_2^x+\ldots+a_kb_k^x}{k}.$$

129. Здесь правило Декарта работает в «обратную» сторону (см. упражнение 94).

130–131. Квазимногочлен $f(t)=a_1^t+a_2^t+\ldots+a_k^t-(a_1+a_2+\ldots+a_k)$ имеет один двукратный корень.

132–133. Задачи сводятся к упражнению 132.

134–137. Воспользуйтесь результатом задачи 3.

138. $f(x)=\dfrac{p_1a_1^x+p_2a_2^x+\ldots+p_ka_k^x}{p_1+p_2+\ldots+p_k}-\left(\dfrac{p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_ka_k}{p_1+p_2+\ldots+p_k}\right)^x$.

139–141. При решении упражнения 142 используйте квазимногочлен $f(t)=\left(\sqrt[1988]{a_1^{1988}+a_2^{1988}+\ldots+a_k^{1988}}\right)^t-a_1^t-a_2^t-\ldots-a_k^t$.

142. Оцените $f'(0)$ для $f(t)=ba^t+cb^t+dc^t+ad^t-ab^t-bc^t-cd^t-da^t$.

143. Если $f(x)=ab^x+ba^x-(a+b)\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^x$, то $f'(0)\leq 0$.

144. Частный случай предыдущей задачи.

145. Если $f(x)=\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}-\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^x$, то $f'(0)\geq 0$.

146. Результат предыдущего упражнения сильнее.

147. Это очевидное обобщение предыдущей задачи.

148. Рассмотрите квазимногочлен $f(t)=a^t+b^t+c^t-AB^t$, причем подберите числа A и B так, чтобы $f(1)=f(2)=0$.

149. Действуйте аналогично.

150. См. упражнение 94.

151. $f(t)=\dfrac{1}{a+b+c}\left[a\left(1+\dfrac{b-c}{a}\right)^t+b\left(1+\dfrac{c-a}{b}\right)^t+c\left(1+\dfrac{a-b}{c}\right)^t\right]-1.$

152. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=\left(\frac{(1-a)(1-b)}{c}\right)^t+\left(\frac{(1-b)(1-c)}{a}\right)^t+\left(\frac{(1-c)(1-a)}{b}\right)^t-$$
$$-3\left[\frac{1}{3}\left(\frac{(1-a)(1-b)}{c}+\frac{(1-b)(1-c)}{a}+\frac{(1-c)(1-a)}{b}\right)\right]^t.$$

имеем $f(0)=f(1)=0$, а потому $f'(1)\ge 0$, то есть

$$\left(\frac{(1-a)(1-b)}{c}\right)^{\frac{(1-a)(1-b)}{c}}\left(\frac{(1-b)(1-c)}{a}\right)^{\frac{(1-b)(1-c)}{a}}\times$$
$$\times\left(\frac{(1-c)(1-a)}{b}\right)^{\frac{(1-c)(1-a)}{b}}\ge\left(\frac{S}{3}\right)^S,$$

где $S=\frac{(1-a)(1-b)}{c}+\frac{(1-b)(1-c)}{a}+\frac{(1-c)(1-a)}{b}$. А так как функция x^x монотонна, достаточно доказать неравенство $S\ge 4$.

153. Квазимногочлен $f(t)=p^t+(2r)^t-2\left(\frac{q}{2}\right)^t$ имеет корни 0 и 1.

154. $f(t)=\left(a^2+b^2\right)\left(ab\right)^t+2ab\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^t-\left(a+b\right)^2\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)^t$

155. Для функций $f(x)=(p_1a_1^x+\ldots+p_ka_k^x)-(p_1a_1+\ldots+p_ka_k)^x$ и $g(x)=\alpha m^x+\beta M^x-(\alpha m+\beta M)^x$, подберите параметры α и β так, чтобы выполнялись равенства $\alpha+\beta=1$ и $\alpha m+\beta M=p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_ka_k$.

156. См. решение задачи 11.

157. Это естественное обобщение предыдущей задачи.

158. Модифицируйте решение задачи 11, рассмотрев функцию $f(x)=\frac{b_1^x+b_2^x+\ldots+b_k^x}{k}-A_r^x$.

159. Модифицируйте решение предыдущей задачи.

160. Воспользуйтесь результатом упражнения 158, положив $p_i=\frac{a_i^2}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2}$, а затем повторите решение задачи 12.

161. Для доказательства правого неравенства рассмотрите квазимногочлен $f(x)=(4a+1)^x+(4b+1)^x+(4c+1)^x+(4d+1)^x-4\cdot 2^x$, а для доказательства левого – $g(x)=3-(4a+1)^x-(4b+1)^x-(4c+1)^x-(4d+1)^x+5^x$.

162. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=\left(\frac{3}{2}\right)^t-\left(1+a_k\right)^t-\ldots-\left(1+a_1\right)^t-+\left(1-a_1\right)^t+\ldots+\left(1-a_k\right)^t-\left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

Имеем $f(0)=f(1)=f(2)=0$ и $f'(0)\ge 0$.

163. $f(x)=(n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^x-a_1^x-a_2^x-\ldots-a_n^x+\left(\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}\right)^x.$

164. $f(t)=(a+b+c)^t-(a+b)^t-(a+c)^t-(b+c)^t+2\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^t.$

165. Левое неравенство следует из предыдущего упражнения.

166. $f(t)=\left(\frac{1}{a}\right)^t+\left(\frac{1}{b}\right)^t+\left(\frac{1}{c}\right)^t-a^t-b^t-c^t.$

167. $f(t)=\left(\frac{b}{a}\right)^t+\left(\frac{c}{b}\right)^t+\left(\frac{a}{c}\right)^t-\left(\frac{a}{b}\right)^t-\left(\frac{b}{c}\right)^t-\left(\frac{c}{a}\right)^t.$

168. $f(t)=(ab)^{\frac{7}{2}}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^t+(bc)^{\frac{7}{2}}\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^t+(ca)^{\frac{7}{2}}\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^t-$

$-(ab)^{\frac{7}{2}}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^t-(bc)^{\frac{7}{2}}\left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^t-(ca)^{\frac{7}{2}}\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^t.$

169. $f(t)=a\left(\frac{a}{b}\right)^t+b\left(\frac{b}{c}\right)^t+c\left(\frac{c}{a}\right)^t-a\left(\frac{a}{c}\right)^t-c\left(\frac{c}{b}\right)^t-b\left(\frac{b}{a}\right)^t.$

170. $f(t)=\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^t-\left[\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^t+\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^t+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^t\right]+$

$+\left[\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^t+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^t+\ldots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^t\right]-\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^t$

171. Рассмотрите квазимногочлен $f(t)=a^t-2\cdot 1^t+(a^{-1})^t+2^t-(a+a^{-1})^t$.

172. $f(t)=\left(x^2+y^2\right)^t-(2xy)^t-\left(x^2\right)^t+2(xy)^t-\left(y^2\right)^t$.

10. Приложение

W – международная олимпиада;
В – Всесоюзная или заключительный этап Всероссийской;
Р – четвертый (зональный) этап Всероссийской;
О – третий (областной) этап Всероссийской;
У – Всеукраинская;
М – Московская;
Л – Ленинградская (Санкт-Петербургская);
К – Киевская;
h – Задачник «Кванта» (с указанием номера);
С – конкурс им. А.П. Савина;
И – олимпиада «Интеллектуальный марафон»;
S – Соросовская олимпиада на Украине;
А – журнал American Mathematical Monthly;
Н – Венгерская олимпиада.

Литература

1. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986.

2. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978.

3. Хованский А.Г. Малочлены. М.: Фазис, 1997.

4. Харди Г., Литтлвуд Д., Пойа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.

5. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965.

6. Mitrinovic D. S. Analytic Inequalities. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1970.

7. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. М.: Мир, 1965.

8. Кречмар В. А. Задачник по алгебре. М.: Учпедгиз, 1961.

9. Седракян Н. М., Авоян А. М. Неравенства. Методы доказательства. М.: Физматлит, 2002.