КОНКУРЕНТНОЕ РАВНОВЕСИЕ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ

Горелов М.А.
(Вычислительный центр РАН, Москва)
griefer@ccas.ru

Предлагается модель формирования цен на финансовом рынке при несовпадающих ожиданиях участников торгов. Доказывается существование цен, балансирующих спрос и предложение. Указывается метод численного поиска таких цен. Показано, что модель допускает агрегирование с сохранением ее структуры.

Ключевые слова: Конкурентное равновесие, иерархические игры, финансовые рынки.

Введение

В первой половине пятидесятых годов прошлого века появились модели, формализующие гораздо более ранние представления о рыночном равновесии [8]. В частности, было доказано существование цен, балансирующих спрос и предложение.

Примерно в то же время были предложены первые модели управления финансовыми активами [10]. Позднее на их основе были построены модели равновесия на финансовом рынке [9],[11]. Эти модели весьма популярны по сей день, хотя при их изложении работы по рыночному равновесию почему-то не упоминаются [7].

Модели равновесия на финансовом рынке обладают, на мой взгляд, существенным недостатком: в них предполагается, что все участники рынка, принимая решение, ориентируются на один и тот же прогноз. В то же время, одна из основных функций финансового рынка заключается в том, что он агрегирует мнения инвесторов относительно будущего и за счет такого «коллективного разума» обеспечивает рациональный переток капиталов между отраслями экономики. При этом существенно, что имеются оплаченные реальными деньгами, но различные мнения. В противном случае рыночный механизм был бы не нужен, а необходимую информацию можно было бы получать, например, путем экспертных оценок.

Предлагаемая ниже модель отличается от традиционных двумя моментами. Во-первых, в ней явно учтены несовпадающие прогнозы инвесторов относительно развития рынка. Во-вторых, в ней не учитывается наличие неопределенности прогноза. Если эту неопределенность учитывать так, как это предлагает Г. Марковиц [10] (см. также [7]), мы придем к ситуации, описываемой классической моделью Эрроу–Дебре [1], [4], [5]. Мне такой способ устранения неопределенности представляется не слишком естественным. Во всяком случае, он не является единственным возможным. Некоторые другие способы учета неопределенности прогноза (например, принцип максимального гарантированного результата) приводят к модели, описанной ниже.

Позволю себе замечание общего характера. Мне приходилось слышать мнение, что *иерархическая* теория игр для специалистов по *рыночной* экономике бесполезна. Простая теорема 1 показывает наличие прозрачной связи между иерархическими играми и традиционными моделями идеального рынка.

Более того, использование этой взаимосвязи является ключевой идеей при получении элементарного доказательства существования равновесных цен. Вдобавок, традиционные доказательства существования равновесия (см., например, [1], [4], [5]) опираются на теорему Какутани о неподвижной точке, а потому с трудом поддаются интерпретации в экономических терминах. Предлагаемое ниже доказательство совершенно естественно как раз с точки зрения экономического здравого смысла.

Подчеркнем, что, вводя при доказательстве этой теоремы субъекта, назначающего цены, мы отнюдь не меняем моделируемую действительность. Речь при этом не идет о введении регулируемого рынка. Мы меняем только модель.

Доказываемая ниже теорема 2 не является прямым следствием теоремы Эрроу–Дебре, поскольку в классической модели функции полезности строго вогнуты, а в нашем случае они линейны. В принципе, можно поступить следующим образом: малым возмущением сделать функции полезности строго вогнутыми, сослаться не теорему Эрооу–Дебре, а затем перейти к пределу, устремляя возмущение к нулю. Возможно, такое доказательство и короче, но оно гораздо менее прозрачно.

Кроме того, таким образом мы получим чистую теорему существования. Конечно, поиск неподвижных точек можно попытаться конструктивизировать, однако соответствующие алгоритмы получаются крайне неэффективными [6]. Наше доказательство позволяет свести поиск равновесных цен к стандартной задаче выпуклого программирования.

За рамками классической теории равновесия обычно остается вопрос о том, откуда берется равновесие. В доказательстве теоремы 2 нетрудно усмотреть описание процедуры нащупывания равновесия рынком.

В последнем разделе данной заметки показывается, что рассматриваемая в ней модель допускает агрегирование с сохранением ее структуры. Это достаточно характерно для моделей равновесия.

1. Принятие решений портфельным инвестором

Предлагаемая ниже простая модель поведения инвесторов хорошо описывает валютный рынок или рынок дисконтных ценных бумаг. Впрочем, после преобразований к тому же виду могут быть приведены модели поведения инвесторов и на других сегментах финансового рынка. Поскольку в дальнейшем будут существенны лишь некоторые качественные особенности поведения инвесторов, которые при таких преобразованиях сохраняются, мы ограничимся рассмотрением этого варианта.

Будем считать, что на рынке обращается l видов финансовых активов (в их число удобно включать и деньги). Обозначим $N=\{1,\dots,n\}$ – множество работающих на данном рынке инвесторов. Пусть в начальный момент времени k-ый инвестор имеет портфель $\left(\omega_k^1,...,\omega_k^l\right)$, где ω_k^i – количество актива i-го вида «в штуках». Рассмотрим задачу инвестирования на заданный период времени.

Предположим, что k-ый инвестор имеет собственный прогноз цен $\left(q_k^1,...,q_k^l\right)$ на конец планового периода. Тогда ценность портфеля $x_k=\left(x_k^1,...,x_k^l\right)$ для этого инвестора естественно отождествлять со стоимостью этого портфеля в конце планового периода $\sum_{i=1}^{l} q_k^i x_k^i$. При формировании портфеля, разумеется, выполняется финансовое ограничение $\sum_{i=1}^{l} p^i x_k^i=\sum_{i=1}^{l} p^i \omega_k^i$, где $p=\left(p^1,...,p^l\right)$ – вектор цен на момент формирования портфеля. По экономическому смыслу компоненты вектора p неотрицательны и не равны нулю одновременно.

Таким образом, инвестор решает задачу линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{l} q_k^i x_k^i \to \max ,$$

(1) $$\sum_{i=1}^{l} p^i x_k^i=\sum_{i=1}^{l} p^i \omega_k^i ,$$

(2) $$x_k^i \geq 0, i=1,...,l .$$

Множество решений $B_k(p)$ этой задачи в общем случае представляет собой симплекс, описываемый следующим образом. Пусть $S_k(p)=\left\{i\in\{1,...,l\}:\frac{q_k^i}{p^i}=\max_{1\leq j\leq l}\frac{q_k^j}{p^j}\right\}$. Тогда

$$B_k(p)=\left\{(x_k^1,...,x_k^l):x_k^i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{l} p^i x_k^i=\sum_{i=1}^{l} p^i \omega_k^i,\ i\notin S_k(p)\Rightarrow x_k^i=0\right\}.$$

В «типичном» случае множество $B_k(p)$, разумеется, вырождается в точку, но в дальнейшем нам придется рассматривать зависимость этого множества от p, и в таком параметрическом семействе вырожденные случаи могут быть неустранимыми.

2. Конкурентное равновесие

На содержательном уровне под равновесием понимают такое состояние рыка, при котором спрос равен предложению. В классической теории (см., например, [1],[4],[5]) рассматриваются строго выпуклые задачи, поэтому при заданных ценах спрос и предложение каждого участника рынка определяются однозначно. В таком случае указанное понимание естественным образом трансформируется в строгое определение.

Для рассматриваемой нами линейной задачи это уже не так, поэтому требуется некоторое уточнение. Сделаем его следующим образом.

Определение. Вектор цен p называется равновесным, если существуют такие портфели $x_k \in B_k(p)$, что равенства $\sum_{k=1}^{n} x_k^i = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^i$ выполняются для всех i=1,…,l.

Содержательно такой способ уточнения представляется весьма естественным. Если какой-то инвестор, придя на рынок, обнаружит, что активы i-го вида уже раскуплены, но имеются в продаже активы j-го вида, которые ему кажутся не менее привлекательными, он удовлетворится покупкой этих активов и при этом будет вполне доволен.

В классической теории равновесные цены устанавливает «невидимая рука рынка». Нам будет удобно персонифицировать рынок. Кстати, это соответствует экономической практике, поскольку на некоторых сегментах рынка цены устанавливают «живые» market maker'ы.

Рассмотрим следующую игру. Множество игроков $N_0=\{0,1,\ldots,n\}$ состоит из выделенного игрока с номером 0 («рынка») и n инвесторов. Множество управлений «рынка»

$P=\left\{\left(p^1,...,p^l\right):p\neq 0, p^i\geq 0, i=1,...,l\right\}$. Множество управлений k-го инвестора $X_k=\left\{\left(x_k^1,...,x_k^l\right):\sum_{i=1}^{l}p^i x_k^i=\sum_{i=1}^{l}p^i\omega_k^i, x_k^i\geq 0, i=1,...,l\right\}$.
Цель «рынка» состоит в уменьшении дефицита, что формально описывается стремлением к минимизации критерия $g_0(p,x_1,...,x_n)=\max_{1\leq i\leq l}\left\{\sum_{k=1}^{n}x_k^i-\sum_{k=1}^{n}\omega_k^i\right\}$. Цели инвесторов, как и выше, задаются критериями $g_k(p,x_k)=\sum_{i=1}^{l}q_k^i x^i, k=1,...,n$ (разумеется, инвесторы их максимизируют).

Итак, задана игра $\Gamma=\left\langle N_0,P,X_1,...,X_n,g_0,g_1,...,g_n\right\rangle$. Следуя [2],[3] определим максимальный гарантированный результат γ «рынка» при условии доброжелательности остальных игроков:

(3) $\gamma=\min_{p\in P}\min_{\substack{x_k\in B_k(p)\\ k=1,...,n}} g_0(p,x_1,...,x_n)$.

Теорема 1. На рассматриваемом сегменте рынка существует равновесный вектор цен тогда и только тогда, когда $\gamma=0$.

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть вектор цен p – равновесный. Тогда по определению найдутся портфели $x_k\in B_k(p)$, $k=1,\ldots,n$, для которых $g_0(p,x_1,\ldots,x_n)=0$. Значит, $\gamma\leq 0$.

Допустим, $\gamma<0$. Тогда для некоторых p и $x_k\in B_k(p)$, $k=1,\ldots,n$, имеют место соотношения $\sum_{k=1}^{n}x_k^i-\sum_{k=1}^{n}\omega_k^i<0$. Умножая на соответствующие цены и суммируя их по i, мы придем к выводу, что $\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}p^i x_k^i-\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}p^i\omega_k^i<0$. А, суммируя равенства (1) по k, получим

(4) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{l}p^i x_k^i=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{l}p^i\omega_k^i$.

Полученное противоречие доказывает, что на самом деле $\gamma=0$.

Установим достаточность. Пусть вектор цен p реализует минимум в (3). Тогда, для $x_k \in B_k(p)$, $k=1,\ldots,n$, выполняется равенство

$$(5)\quad \max_{1 \le i \le l} \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k^i - \sum_{k=1}^{n} \omega_k^i \right\} = 0 .$$

Если бы для некоторого i цена актива i-го вида равнялась нулю, спрос на актив этого вида был бы бесконечно большим, и значит, соответствующий вектор цен не мог реализовывать минимум в (3). А в условиях положительности компонент вектора p из условий (4) и (5) следует, что равенства $\sum_{k=1}^{n} x_i^k = \sum_{k=1}^{n} \omega_i^k$ выполняются для всех $i=1,\ldots,l$.

Теорема доказана.

Замечание. Таким образом, показано, что задача поиска равновесия на рынке формально эквивалентна некой задаче управления рынком. Причина, по которой возникает необходимость в рыночных механизмах, заключается в том, что управляемая система (рынок) является «большой». Для эффективного управления ею необходимо знать критерии агентов (в нашем случае их прогнозы q_k^i). На практике это невозможно.

3. Существование равновесия

Теорема 2. В рассматриваемой модели существует равновесный вектор цен.

Доказательство. Введем обозначения. Пусть вектор цен p доставляет минимум в формуле (3). Выберем портфели $x_k \in B_k(p)$, $k=1,\ldots,n$, так, что $g_0(p, x_1, \ldots, x_n) = \min_{\substack{y_k \in B_k(p) \\ k=1,\ldots,n}} g_0(p, y_1, \ldots, y_n)$ и при этом множество индексов j для которых достигается максимум $\max_{1 \le j \le l} \left[\sum_{k=1}^{n} x_k^j - \sum_{k=1}^{n} \omega_k^j \right]$, состоит из наименьшего возможного числа элементов. Обозначим

$$L=\left\{i\in\{1,...,l\}:\sum_{k=1}^{n}x_k^i-\sum_{k=1}^{n}\omega_k^i=\max_{1\le j\le l}\left[\sum_{k=1}^{n}x_k^j-\sum_{k=1}^{n}\omega_k^j\right]\right\}.$$

Получим ряд необходимых условий оптимальности в задаче вычисления минимума (3).

Лемма 1. Существует такое множество инвесторов $M\subset N$, что выполняются условия

- $x_k^i=0$ для всех $i\notin L$ и $k\in M$;
- $x_k^j=0$ для всех $j\in L$ и $k\notin M$.

Доказательство. Допустим, существуют $k\in N$, $i\notin L$ и $j\in L$, для которых $x_k^i\neq 0$ и $x_k^i\neq 0$. Тогда $i\in S_k(p)$ и $j\in S_k(p)$, а значит для любого достаточно малого положительного ε портфель $x_k(\varepsilon)$, с компонентами $x_k^j(\varepsilon)=x_k^j-\dfrac{\varepsilon}{p^j}$ $x_k^i(\varepsilon)=x_k^i+\dfrac{\varepsilon}{p^i}$, $x_k^t(\varepsilon)=x_k^t, t\neq i,j$ принадлежит $B_k(p)$. Так как $i\notin L$, выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{n}x_k^i-\sum_{k=1}^{n}\omega_k^i<\max_{1\le t\le l}\left[\sum_{k=1}^{n}x_k^t-\sum_{k=1}^{n}\omega_k^t\right]$. Следовательно, для достаточно малых положительных ε выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{n}x_k^i(\varepsilon)-\sum_{k=1}^{n}\omega_k^i<\max_{1\le t\le l}\left[\sum_{k=1}^{n}x_k^t-\sum_{k=1}^{n}\omega_k^t\right]$, а, кроме того, и неравенство $\sum_{k=1}^{n}x_k^j(\varepsilon)-\sum_{k=1}^{n}\omega_k^j<\max_{1\le t\le l}\left[\sum_{k=1}^{n}x_k^t-\sum_{k=1}^{n}\omega_k^t\right]$. Последнее противоречит способу выбора портфелей x_k. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. Если $\gamma>0$, а множество M выбрано как в условиях леммы 1, то найдется $k\in M$ и $j\in L$ для которых $\omega_k^j>0$.

Доказательство. Пусть j доставляет максимум $\max_{1\le t\le l}\left[\sum_{k=1}^{n}x_k^t-\sum_{k=1}^{n}\omega_k^t\right]$, где портфели x_k выбраны так, как указано выше. Тогда в силу леммы 1

$$\sum_{k\in M} x_k^j - \sum_{k=1}^{n} \omega_k^j = \sum_{k=1}^{n} x_k^j - \sum_{k=1}^{n} \omega_k^j > 0\,.$$

Если предположить, вопреки доказываемому утверждению, что $\omega_k^j = 0$ для всех $k\in M$ и $j\in L$, то

$$\sum_{k\in M} x_k^j - \sum_{k\in M} \omega_k^j = \sum_{k\in M} x_k^j - \sum_{k=1}^{n} \omega_k^j > 0\,.$$

Суммируя эти неравенства по $j\in L$, получим $\sum_{j\in L}\sum_{k\in M} x_k^j - \sum_{j\in L}\sum_{k\in M} \omega_k^j > 0$. А, суммируя равенства (1) по $k\in M$, будем иметь $\sum_{k\in M}\sum_{j\in L} x_k^j - \sum_{k\in M}\sum_{j\in L} \omega_k^j = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Определим новый вектор цен $p(\delta)$ условиями

$$p^i(\delta) = \begin{cases} (1+\delta)p^i, \text{ если } i \in L, \\ p^i \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

В силу оптимальности вектор цен p не имеет нулевых компонент (иначе спрос на соответствующие активы был бы бесконечным). Кроме того, не ограничивая общности, можно считать, что $\sum_{i=1}^{l} p^i \omega_k^i > 0$ для любого $k=1,\ldots,n$. Пусть портфели $x_k(\delta)$ имеют компоненты

$$x_k^i(\delta) = \frac{\sum_{j=1}^{l} p^j(\delta)\omega_k^j}{\sum_{j=1}^{l} p^j \omega_k^j} \cdot \frac{p^i}{p^i(\delta)} x_k^i\,.$$

Лемма 3. При достаточно малых $\delta>0$ имеют место включения $x_k(\delta)\in B_k(p(\delta))$.

Доказательство. Пусть M – множество, определенное в лемме 1.

Рассмотрим сначала случай $k \in M$. Тогда $S_k(p) \subset L$. Для любых i и j из $S_k(p)$ выполняется равенство $\frac{q_k^i}{p^i} = \frac{q_k^j}{p^j}$, а значит и равенство $\frac{q_k^i}{p^i(\delta)} = \frac{q_k^j}{p^j(\delta)}$. Если же $i \in S_k(p)$, а $j \notin S_k(p)$, то выполняется неравенство $\frac{q_k^i}{p^i} > \frac{q_k^j}{p^j}$, следовательно, при достаточно малом $\delta > 0$ справедливо неравенство $\frac{q_k^i}{p^i(\delta)} > \frac{q_k^j}{p^j(\delta)}$. Поэтому $S_k(p) = S_k(p(\delta))$.

Из условия $x_k \in B_k(p)$ следует, что $x_k^j = 0$ при $j \notin S_k(p)$. Но тогда $x_k^j(\delta) = 0$ при $j \notin S_k(p(\delta))$. Следовательно, $x_k(p(\delta)) \in B_k(p(\delta))$.

Обратимся к случаю $k \notin M$. Тогда $S_k(p) \cap L = \varnothing$. Дальнейшие рассуждения дословно такие же, как в предыдущем случае.

Лемма доказана.

Если δ настолько мало, что выполняется утверждение леммы 3, то для всех $i \in L$ имеют место неравенства $\sum_{k=1}^{n} x_k^i(\delta) - \sum_{k=1}^{n} \omega_k^i \le \sum_{k=1}^{n} x_k^i - \sum_{k=1}^{n} \omega_k^i$, так как $x_k^i(\delta) \le x_k^i$.

Если $\gamma > 0$, то в силу леммы 2, для некоторого $k \in M$ и для всех $i \in S_k(p)$ выполняются неравенства $x_k^i(\delta) < x_k^i$. Следовательно, для таких i имеет место неравенство $\sum_{k=1}^{n} x_k^i(\delta) - \sum_{k=1}^{n} \omega_k^i < \sum_{k=1}^{n} x_k^i - \sum_{k=1}^{n} \omega_k^i$.

Если при этом множество L состоит из одного элемента, получается противоречие с тем, что вектор p доставляет минимум в (3).

В противном случае, исходя из оптимальных вектора цен p и портфелей x_k, мы получаем новый оптимальный набор из вектора цен $p(\delta)$ и портфелей $x_k(\delta)$, для которого соответствующее множество L содержит меньше элементов. Проделав такую процедуру конечное число раз, мы вновь придем к противоречию.

Итак, установлено, что $\gamma \leq 0$. При доказательстве теоремы 1 показано, что отсюда следует равенство $\gamma = 0$. Остается сослаться на достаточное условие теоремы 1.

Замечание. Экономический смысл использованных конструкций достаточно прозрачен. Если какие-то активы пользуются ажиотажным спросом, цены на них следует поднять. Для нашего доказательства важно, чтобы при этом не возникло эффекта Гиффина, то есть спрос на эти активы не возрос. Это самый сложный технически элемент доказательства. В лемме 1 показывается, что если какие-то активы пользуются повышенным спросом, то инвесторы, подавшие заявки на их приобретение строго предпочитают эти активы всем прочим. В лемме 2 показано, что если на каком-то сегменте рынка спрос превышает предложение, то на него приходят какие-то деньги извне. В лемме 3 устанавливается, что если мы пропорционально увеличим цены на активы повышенного спроса и оставим неизменной структуру портфелей (в стоимостном выражении), то портфели останутся оптимальными для инвесторов, но будут лучше для «рынка».

4. Поиск равновесия

Приведенное выше доказательство существования конкурентного равновесия использует лишь элементарные средства. В нем, по сути, моделируется поведение разумного market maker’a. В принципе, его конструкции можно превратить в алгоритм поиска равновесных цен и соответствующих оптимальных портфелей. Впрочем, эту задачу можно свести к задаче выпуклого программирования и решать ее стандартными методами.

Преобразуем задачу вычисления минимума (3) к стандартному виду.

Чтобы избавиться от максимума в определении функции g_0, введем вспомогательную переменную u, стесненную ограничениями

(6) $u \ge \sum_{k=1}^{n} x_k^i - \sum_{k=1}^{n} \omega_k^i$, i=1,…,l.

Так как максимум линейной функции на многограннике непременно достигается в одной из его вершин, условия $x_k \in B_k(p)$, k=1,…,n, равносильны системе неравенств

$$\sum_{j=1}^{l} q_k^j x_k^j \ge q_k^i \cdot \frac{\sum_{j=1}^{l} p^j \omega_k^j}{p^i}, \; i=1,\dots,l, \; k=1,\dots,n,$$

или

(7) $p^i \sum_{j=1}^{l} q_k^j x_k^j \ge q_k^i \cdot \sum_{j=1}^{l} p^j \omega_k^j$, i=1,…,l, k=1,…,n.

Кроме того, по экономическому смыслу

(8) $p^i \ge 0$, i=1,…,l.

В силу однородности, можно, не ограничивая общности, считать, что

(9) $\sum_{i=1}^{l} p^i = 1$.

Очевидно, что если переменные u, p^i, i=1,…,l, x_k^i , i=1,…,l, k=1,…,n, являются решением задачи минимизации величины u при ограничениях (1), (2), (6), (7), (8) и (9), то переменные p^i, i=1,…,l, и x_k^i , i=1,…,l, k=1,…,n, доставляют минимум в формуле (3).

5. Равновесное агрегирование

Модель, описанную во втором разделе данной заметки, в дальнейшем будем называть исходной. Наряду с ней будем рассматривать еще одну модель того же типа, которую ниже будем именовать агрегированной.

Фиксируем вектор цен $p = \left(p^1,..., p^l\right)$ в исходной модели. Множества инвесторов в обеих моделях совпадают. В агрегированной модели имеется m+1 видов активов ($m+1<l$). Первые m из

них характеризуются теми же запасами ω_k^i и теми же прогнозами q_k^i у всех инвесторов (здесь i=1,…,m, k=1,…,n). Оставшийся актив имеется у k-го инвестора в количестве $\Omega_k = \sum\limits_{j=m+1}^{l} p^j \omega_k^j$, а прогноз его цены определяется равенством $Q_k = \max\limits_{m+1 \le j \le l} \dfrac{q_k^j}{p^j}$.

Теорема 3. Если вектор цен $p = \left(p^1, ..., p^l\right)$ является равновесным в исходной модели, то вектор цен $\overline{p} = \left(p^1, ..., p^m, 1\right)$ будет равновесным в агрегированной.

Доказательство. Обозначим $\overline{B}_k(\overline{p})$ множество решений задачи

$$\sum_{i=1}^{m} q_k^i x_k^i + Q_k y_k \to \max,$$

$$(10)\quad \sum_{i=1}^{m} p^i x_k^i + y_k = \sum_{i=1}^{m} p^i \omega_k^i + \Omega_k,$$

$$x_k^i \ge 0, i = 1, ..., m,\ y_k \ge 0.$$

Пусть портфели $x_k = \left(x_k^1, ..., x_k^l\right)$ удовлетворяют условиям $x_k \in B_k(p)$, k=1,…,n, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^i = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k^i$, i=1,…,l. Покажем, что тогда портфели $\overline{x}_k = \left(x_k^1, ..., x_k^m, \sum\limits_{j=m+1}^{l} p^j x_k^j\right)$ удовлетворяют условиям $\overline{x}_k \in \overline{B}_k(\overline{p})$, k=1,…,n, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^i = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k^i$, i=1,…,m и $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \Omega_k$.

Второе из этих условий очевидно. Третье получается суммированием равенств $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^i = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k^i$, i=m+1,…,l с весами p^i. Остается проверить первое. Возможны три случая.

Рассмотрим случай $\max\limits_{1\le i\le m}\dfrac{q_k^i}{p^i}<Q_k$. Тогда условие $\overline{x}_k\in\overline{B}_k(\overline{p})$ равносильно условиям $x_k^i=0$, i=1,…,m и $y_k=\sum\limits_{i=1}^{l}p^i\omega_k^i+\Omega_k$. В силу определения величины Q_k в этом случае найдется j=m+1,…,l, для которого неравенства $\dfrac{q_k^i}{p^i}<\dfrac{q_k^j}{p^j}$ выполняются для всех i=1,…,m. Но тогда условия $x_k\in B_k(p)$ влекут $x_k^i=0$, i=1,…,m, а равенство $y_k=\sum\limits_{i=1}^{l}p^i\omega_k^i+\Omega_k$ вытекает из формулы (10).

Случаи $\max\limits_{1\le i\le m}\dfrac{q_k^i}{p^i}=Q_k$ и $\max\limits_{1\le i\le m}\dfrac{q_k^i}{p^i}>Q_k$ рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

Разумеется, множество M={m+1,…,l} агрегируемых активов выбрано именно таким только для упрощения формул. В принципе, оно может быть выбрано произвольно. В частности, в агрегированной модели множество активов {1,…,m} тоже может быть агрегировано. В результате получим новую модель с двумя видами активов, в которой вектор цен (1,1) будет равновесным. Понятно, что при этом порядок агрегирования может выбираться произвольно, так же как и количество «агрегированных» активов может быть больше двух.

Эти результаты, на самом деле показывают, что выполняются некие необходимые условия для того, чтобы рассматриваемую нами модель можно было считать адекватной. Действительно, на современном финансовом рынке обращается огромное количество инструментов. При этом отдельный инвестор работает на каком-то небольшом сегменте этого рынка. Обычно он достаточно детально представляет ситуацию о «своей» части рынка, и не может иметь столь же подробной информации обо всем остальном. Выше показано, что модель «не разрушится», если он будет пользоваться агрегированной информацией об «окружающей среде».

Примечательно, что при этом для агрегирования прогнозов используется свертка типа максимума, а не традиционная для экономики свертка типа взвешенной суммы.

Литература

1. АЛИПРАНТИС К., БРАУН Д., БЁРКЕНШО О. *Существование и оптимальность конкурентного равновесия*. М.: Мир, 1995. – 384 с.
2. БУРКОВ В.Н. *Основы математической теории активных систем*. М.: Наука, 1977. – 256 с.
3. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами*. М.: Наука, 1976. – 327 с.
4. КАРЛИН С. *Математические методы в теории игр, программировании и экономике*. М.: Мир, 1964. – 838 с.
5. НИКАЙДО Х. *Выпуклые структуры и математическая экономика*. М.: Мир, 1972. – 517 с.
6. ТОДД М. ДЖ. *Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике*. М.: Наука, 1983. – 112 с.
7. ШАРП У., АЛЕКСАНДЕР Г., БЭЙЛИ ДЖ. *Инвестиции*. М.: ИНФРА-М, 1997. – 1024 с.
8. ARROW K.J., DEBREU G. *Existence of an equilibrium for a competitive economy* // Econometrica. Vol. 22. 1954. P. 265 – 290.
9. LINTNER J. *The Valuation of Risk Asserts and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets* // Review of Economics and Statistics. Vol. 47. 1965. № 1. P. 13 – 37.
10. MARKOWITZ H.M. *Portfolio Selection* // Journal of Finance. Vol. 7. 1952. № 1. P. 77 – 91.
11. SHARP W.F. *Capital Assert Prices: a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk* // Journal of Finance. Vol. 19. 1964. № 3. P. 425 – 442.