Синтез рациональных процедур обмена информацией в иерархической игре двух лиц[1]

М. А. Горелов
(119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)
email: griefer@ccas.ru

Поступила в редакцию 20.11.01 г.

Исследуются четыре задачи синтеза рациональных способов обмена информацией в простейшей двухуровневой игре. Рациональность оценивается по двум критериям: максимальному гарантированному результату центра и сложности способа обмена информацией, формализуемой в терминах квазиинформационных расширений. Библ. 6.

Введение

Один из основных тезисов информационной теории иерархических систем Ю. Б. Гермейера и Н. Н. Моисеева [1], [2] заключается в следующем. Для успешного решения многих практических задач необходимо перерабатывать значительные объемы информации. Если эти объемы слишком велики, чтобы всю информацию можно было бы переработать централизованно, то процесс принятия решений декомпозируют. Таким образом возникают иерархические системы. У элементов этих систем естественным образом возникают собственные цели. Поэтому эффективность управления всей системой (в смысле решения первоначальной задачи) может оказаться недостаточно высокой. Эту проблему можно попытаться решить, организовав обмен информацией между элементами системы. Естественно возникает вопрос о том, как это сделать наилучшим образом?

Из сказанного выше следует, что имеется по крайней мере два показателя “качества” процедуры обмена информацией: степень достижения всей системой изначальных целей и сложность самой процедуры обмена информацией.

Достаточно хорошо изучены задачи поиска процедур обмена информацией, оптимальных в смысле первого из этих критериев. Первые результаты были получены Н. С. Кукушкиным [3]. Достаточно много результатов этого типа и дальнейшие ссылки можно найти в [2] – [4].

Однако найденные при этом оптимальные процедуры обмена информацией оказываются достаточно сложными в том смысле, что требуют передачи значительных объемов информации. Поэтому естественно возникает желание учесть оба указанных выше критерия.

Можно взглянуть на проблему с несколько иной точки зрения. Каждый из элементов иерархической системы может передавать лишь ту информацию, которую он “добыл” самостоятельно или получил от других элементов. При этом разумно передавать не всю информацию, а лишь какую-то выжимку. Поэтому можно говорить о рациональных способах агрегирования информации.

Таким образом получается весьма большой спектр задач, которые различаются изначальной информированностью элементов системы, способом формализации указанных выше критериев и способом свертки этих двух критериев.

По-видимому, впервые задача такого рода была сформулирована А. Ф. Кононенко. Ряд таких моделей исследован Е. З. Мохонько и В. С. Алиевым и А. Ф. Кононенко (см., например, [5], [6]).

Ниже исследуются следующие варианты постановки. Рассматривается игра двух лиц. Предполагается, что один из игроков (элемент нижнего уровня) не может самостоятельно “добыть” информацию о действиях своего партнера (центра). Эффективность управления

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 990100791).

системой оценивается с помощью максимального гарантированного результата центра. Обмены информацией формализуются с помощью понятия квазиинформационного расширения [3]. То же понятие используется для сравнения сложности двух способов обмена информацией. Исследуются два варианта свертки критериев. В первом при заданном ограничении на эффективность управления системой ищется наиболее простой способ обмена информацией. Во втором при ограничении на сложность способа обмена информацией ищется процедура, обеспечивающая наибольшую эффективность. Поскольку понятие квазиинформационного расширения позволяет сравнивать не всякие два способа обмена информацией, эти две постановки допускают различные уточнения. Четыре наиболее естественных из них рассматриваются в данной работе.

1. Определения и обозначения

Введем обозначения. Если X, Y - множества, то $\Phi(X,Y)$ – множество всех функций из X в Y. Множество всех действительных чисел обозначается буквой **R**.

Игрой двух лиц в нормальной форме будем называть четверку $\Gamma=<U,V,g,h>$, где U, V - множества, а g и h - функции из декартова произведения $U\times V$ в **R**. Элементы множеств U и V будем называть стратегиями первого и второго игрока соответственно. Функции g и h будем называть функциями выигрыша или критериями первого и второго игрока. Считаем, что каждый их них стремится к максимизации своего критерия.

Все игры будем обозначать одной и той же буквой Γ с различными нижними индексами; тот же индекс будет отличать соответствующие множества стратегий и критерии: $\Gamma_*=<U_*,V_*,g_*,h_*>$.

Пусть $\Gamma=<U,V,g,h>$, $\Gamma_*=<U_*,V_*,g_*,h_*>$ - игры, $\pi\in\Phi(U_*\times V_*,U\times V)$, $c\in\Phi(U,U_*)$, $d\in\Phi(V,V_*)$. Будем говорить, что четверка $<\Gamma,\pi,c,d>$ является квазиинформационным расширением игры Γ, если выполнены следующие условия:

1) $g_* = g\circ\pi, h_* = h\circ\pi$;

2) для любых $u\in U$, $v\in V$, $u_*\in U_*$, $v_*\in V_*$

$$\mathrm{pr}_1(\pi(c(u),v_*))=u,\ \mathrm{pr}_2(\pi(u_*,d(v)))=v,$$

где pr_1 и pr_2 - канонические проекции декартова произведения $U\times V$ на первый и второй сомножитель соответственно, а значок $\circ$ означает композицию отображений.

Когда это не может вызвать недоразумений, будем, допуская вольность речи, говорить, что игра Γ_* является квазиинформационным расширением игры Γ (не указывая явно отображения π,c,d).

Стратегия $u_*\in U_*$ интерпретируется как некий способ выбора управления $u\in U$ в зависимости от поступающей первому игроку информации о действиях второго. Аналогично интерпретируются стратегии $v_*\in V_*$ второго игрока.

Для дальнейшего нам важен следующий неформальный тезис: всякий способ обмена информацией может быть формализован как квазиинформационное расширение.

Подробности, касающиеся понятия квазиинформационного расширения, можно найти в [3] или [4].

В дальнейшем для нас будет наиболее интересно следующее квазиинформационное расширение. Пусть $\Gamma=<U,V,g,h>$ - игра, $U_2=\Phi(V,U), V_2=V$. Отображение π определяется условием $\pi(u_2,v_2)=(u,v)$, если $v=v_2$, $u=u_2(v_2)$. Отображение c ставит в соответствие элементу $u\in U$ функцию u_2 из V в U, тождественно равную u; d - тождественное отображение. Тогда игра $\Gamma_2=<U_2,V_2,g_2,h_2>$ с отображениями π, c, d является квазиинформационным расширением игры Γ. В соответствии с традицией индекс “2” будем сохранять именно за этим квазиинформационным расширением.

Пусть Г=<*U,V,g,h*>. Определим множество *B(u)* рациональных ответов второго игрока на выбор игроком 1 стратегии *u* следующими условиями: если верхняя грань $\sup_{v\in V} h(u,v)$ достигается, то

$$B(u)=\{v\in V : h(u,v)=\max_{v'\in V} h(u,v')\},$$

в противном случае непустое множество *B(u)* задано произвольным (но конкретным) способом.

Число $R(\Gamma)=\sup_{u\in U}\inf_{v\in B(u)} g(u,v)$ будем называть максимальным гарантированным результатом первого игрока в игре Г.

В дальнейшем будем неоднократно пользоваться следующим простым, но важным утверждением из работы [3]: *если Г* - квазиинформационное расширение игры Г, то R(Г*)≥R(Г).* Ее доказательство непосредственно следует из определений квазиинформационного расширения и максимального гарантированного результата.

2. Постановки задач

Зафиксируем игру Г=<*U,V,g,h*>. Соответственно будет зафиксировано ее стандартное квазиинформационное расширение $<\Gamma_2, \pi, c, d>$.

Непосредственно проверяется [7], что если $<\Gamma_*, \pi_*, c_* d_*>$ – квазиинформационное расширение игры Г, $<\Gamma_\#, \pi_{*\#}, c_{*\#} d_{*\#}>$ – квазиинформационное расширение игры Γ_*, а

$$\pi_\# = \pi_* \circ \pi_{*\#}, c_\# = c_{*\#} \circ c_*, d_\# = d_{*\#} \circ d_*,$$

то $<\Gamma_\#, \pi_\#, c_\#, d_\#>$ – квазиинформационное расширение игры Г.

Данное обстоятельство можно интерпретировать следующим образом. Пусть Γ_* и $\Gamma_\#$ - квазиинформационные расширения игры Г, и, кроме того, $\Gamma_\#$ - квазиинформационное расширение игры Γ_*. Можно считать, что игра Г моделирует технологические ограничения на выборы игроков и их интересы. Тогда игры Γ_* и $\Gamma_\#$ моделируют некоторые процедуры выбора решений на основе обмена информацией, причем игре $\Gamma_\#$ соответствует более сложный способ обмена информацией.

Исходя из этой интерпретации, можно сформулировать четыре постановки задачи. Для краткости будем писать $\Gamma_* \leq \Gamma_\#$, если найдутся отображения $\pi_{*\#}, c_{*\#}, d_{*\#}$ такие, что $<\Gamma_\#, \pi_{*\#}, c_{*\#}, d_{*\#}>$ – квазиинформационное расширение игры Γ_*.

Задача 1. Задано число γ. Требуется найти игру Γ_*, удовлетворяющую условиям:

1) $\Gamma \leq \Gamma_* \leq \Gamma_2$ и $R(\Gamma_*) \geq \gamma$;

2) если существует другая игра $\Gamma_\#$ такая, что $\Gamma \leq \Gamma_\# \leq \Gamma_*$ и $R(\Gamma_\#) \geq \gamma$, то $\Gamma_* \leq \Gamma_\#$.

Задача 2. Задано число γ. Требуется найти игру Γ_*, удовлетворяющую условиям:

1) $\Gamma \leq \Gamma_* \leq \Gamma_2$ и $R(\Gamma_*) \geq \gamma$;

2) если существует другая игра $\Gamma_\#$, такая, что $\Gamma \leq \Gamma_\# \leq \Gamma_2$ и $R(\Gamma_\#) \geq \gamma$, то $\Gamma_* \leq \Gamma_\#$.

Задача 3. Задана игра $\Gamma_\#$ такая, что $\Gamma \leq \Gamma_\# \leq \Gamma_2$. Требуется найти игру Γ_* такую, что $\Gamma \leq \Gamma_* \leq \Gamma_\#$ и величина $R(\Gamma_*)$ максимальна.

Задача 4. Задана игра $\Gamma_\#$ такая, что $\Gamma \leq \Gamma_\# \leq \Gamma_2$. Требуется найти игру Γ_* удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\Gamma \leq \Gamma_* \leq \Gamma_2$;

2) если $\Gamma_* \leq \Gamma_\#$, то и $\Gamma_\# \leq \Gamma_*$;

3) величина $R(\Gamma_*)$ максимальна.

Очевидно, что всякое решение задачи 2, если оно существует, является решением задачи 1. Аналогично, всякое решение задачи 4 является решением задачи 3.

3. Теорема о двух морфизмах

Докажем одно вспомогательное утверждение, которое дает ключ к решению задач, сформулированных в разд. 2.

Теорема. *Пусть* $\Gamma=\langle U,V,g,h\rangle$ *- произвольная игра,* $\langle\Gamma_2,\pi,c,d\rangle$ *- ее стандартное расширение (*$\Gamma_2=\langle U_2,V_2,g_2,h_2\rangle$*). Пусть* $\Gamma_\#=\langle U_\#,V_\#,g_\#,h_\#\rangle$ *– такая игра, что* $\langle\Gamma_\#,\pi_\#,c_\#,d_\#\rangle$ *- квазиинформационное расширение игры Г, а* $\langle\Gamma_2,\pi_{\#2},c_{\#2},d_{\#2}\rangle$ *- квазиинформационное расширение игры* $\Gamma_\#$*. Пусть, наконец,* $V_*=V_\#$*,* U_* *- произвольное множество такое, что* $c_\#(U)\subset U_*\subset U_\#$*,* g_* *и* h_* *– ограничения функций* g_2 *и* h_2*, соответственно, на* $U_*\times V_*$ *и* $\Gamma_*=\langle U_*,V_*,g_*,h_*\rangle$*. Тогда существуют отображения* $\pi_*,c_*,d_*,\pi_{*\#},c_{*\#},d_{*\#}$ *такие, что* $\langle\Gamma_*,\pi_*,c_*,d_*\rangle$ *- квазиинформационное расширение игры Г, а* $\langle\Gamma_\#,\pi_{*\#},c_{*\#},d_{*\#}\rangle$ *- квазиинформационное расширение игры* Γ_**.*

Доказательство. По определению стандартного расширения Γ_2, очевидно, имеем $V_*=V_\#=V$. Поэтому мы вправе выбрать в качестве d и $d_{*\#}$ тождественные отображения. Положим $c_*=c_\#$. В силу условия $c_\#(U)\subset U_*$ это сделать можно. Наконец, в силу условия $U_*\subset U_\#$, для любого $u_*\in U_*$ $c_{\#2}(u_*)$ - функция из V в U. Поэтому можно определить проекцию π_* условием $\pi_*(u_*,v_*)=(c_{\#*}(u_*)(v_*),v_*)$. Набор $\langle\Gamma_*,\pi_*,c_*,d_*\rangle$ - искомое квазиинформационное расширение игры Г. Необходимые свойства построенных отображений проверяются непосредственно.

Пусть $c_{*\#}$ - каноническое вложение U_* в $U_\#$ (по условию теоремы $U_*\subset U_\#$). Определим отображение $\pi_{*\#}$, положив $\pi_{*\#}=(u_\#,v_\#)$, если $u_\#\in U_*$, и $\pi_{*\#}=(c\times d)(\pi_\#(u_\#,v_\#))$ в противном случае. Непосредственная проверка показывает, что $\langle\Gamma_\#,\pi_{*\#},c_{*\#},d_{*\#}\rangle$ - квазиинформационное расширение игры Γ_*. Теорема доказана.

Замечание 1. Непосредственно проверяется, что для построенных отображений справедливы равенства $\pi_*\circ\pi_{*\#}=\pi_\#$, $c_{*\#}\circ c_*=c_\#$, $d_{*\#}\circ d_*=d_\#$.

Следствие. Игра Γ_2 является квазиинформационным расширением описанной в условии теоремы игры Γ_*.

Доказательство следует из сформулированного в разд. 2 утверждения о том, что композиция квазиинформационных расширений есть снова квазиинформационное расширение.

4. Решение задачи 1

В силу сформулированного в конце разд. 1 утверждения о монотонной зависимости максимального гарантированного результата от объема передаваемой информации, задача заведомо не имеет решения, если $\gamma>R(\Gamma_2)$ или $\gamma=R(\Gamma_2)$, но верхняя грань

$$R(\Gamma_2)=\sup_{u_2\in U_2}\inf_{v_2\in B(u_2)} g_2(u_2,v_2). \tag{4.1}$$

не достигается.

Рассмотрим случай, когда либо $\gamma<R(\Gamma_2)$, либо $\gamma=R(\Gamma_2)$ и верхняя грань в (4.1) достигается. Тогда существует стратегия $u_*\in U_2$ такая, что

$$\inf_{v\in B(u_*)} g_2(u_*,v)\geq\gamma. \tag{4.2}$$

Положим $U_*=c(U)\cup\{u_*\}$. Очевидно, $c(U)\subset U_*\subset U_2$. Пусть $V_*=V=V_2$, g_* и h_* - ограничения функций g_2 и h_2, соответственно, на $U_*\times V_*$. В силу теоремы о двух морфизмах, игра $\Gamma_*=\langle U_*,V_*,g_*,h_*\rangle$ является квазиинформационным расширением игры Г, а с другой стороны, игра Γ_2 является квазиинформационным расширением игры Γ_*.

Далее

$$R(\Gamma_*)=\sup_{u\in U_*}\inf_{v_*\in B(u)} g_*(u,v_*)\geq\gamma,$$

так как в силу (4.2) и определения игры Γ_* уже

$$\inf_{v_*\in B(u_*)} g_2(u_*,v_*)\geq\gamma.$$

Остается выяснить, в каком случае построенное расширение Γ_* является самым простым.

Если $u_*\in c(U)$, то, очевидно, игра Γ_* изоморфна игре Γ, и потому ее дальнейшее упрощение невозможно.

Если $u_*\notin c(U)$ и $R(\Gamma)\geq\gamma$, то игра Γ_* не является решением задачи 1. Но случай $R(\Gamma)\geq\gamma$ мало интересен, так как при этом очевидно игра Γ и только ей изоморфные являются решением задачи 1.

Наиболее интересен случай $u_*\notin c(U)$ и $R(\Gamma)<\gamma$. Пусть $\Gamma_\#=\langle U_\#,V_\#,g_\#,h_\#\rangle$ такова, что $\langle\Gamma_\#,\pi_\#,c_\#,d_\#\rangle$ - квазиинформационное расширение игры Γ, а $\langle\Gamma_*,\pi_{\#*},c_{\#*},d_{\#*}\rangle$ - квазиинформационное расширение игры $\Gamma_\#$. Если $c(U)=U_\#$, то очевидно $R(\Gamma_\#)=R(\Gamma)<\gamma$. Пусть $u_\#\in U_\#\backslash c_\#(U)$. Если $c_{\#*}(u_\#)\in U_\#\backslash c_\#(U)$ для любого $u_\#\in U_\#\backslash c_\#(U)$, то, по-прежнему, $R(\Gamma_\#)=R(\Gamma)<\gamma$. Если же существует $u_\#\in U_\#\backslash c_\#(U)$ такой, что $c_{\#*}(u_\#)=u_*$ (по определению квазиинформационного расширения отображение $c_{\#*}$ инъективно, поэтому такой элемент может быть только один), то положим

$$\pi_{\#*}(u_\#^1,v_\#)=\begin{cases}(u_*,v_\#),u_\#^1=u_\#,\\(c_*\times d_*)(\pi_\#(u_\#^1,v_\#)),u_\#^1\neq u_\#,\end{cases}\tag{4.3}$$

$$c_{*\#}(u_*^1)=\begin{cases}u_\#,u_*^1=u_*,\\c_\#(u),u_*^1\neq u_*\,\&\,u_*^1=c_*(u),\end{cases}\tag{4.4}$$

а $d_{*\#}$ - тождественное отображение.

Непосредственно проверяется, что $\langle\Gamma_*,\pi_{*\#},c_{*\#},d_{*\#}\rangle$ - квазиинформационное расширение игры $\Gamma_\#$. Следовательно, в этом случае Γ_* - решение задачи 1.

Остается нерассмотренным случай, когда $\gamma=R(\Gamma_2)$, но верхняя грань в (4.1) не достигается. Если кроме того $\gamma=R(\Gamma)$, то только игры изоморфные Γ будут решением задачи 1. Если же $\gamma=R(\Gamma_2)>R(\Gamma)$ и верхняя грань в (1) не достигается, то задача 1 решения не имеет.

Допустим противное. Пусть Γ_* - решение задачи 1. Если

$$\inf_{v_*\in B(u_*)} g_*(u_*,v_*)=\sup_{u_*\in U_*}\inf_{v_*\in B(u_*)} g_*(u_*,v_*)=\gamma,$$

то

$$\inf_{v_2\in B(c_{*2}(u_*))} g_2(c_{*2}(u_*),v_2)=\gamma=\sup_{u_2\in U_2}\inf_{v_2\in B(u_2)} g_2(u_2,v_2),$$

и значит, $c_{*2}(u_*)$ реализует верхнюю грань в (4.1), что противоречит предположению. Значит, верхняя грань

$$R(\Gamma_*)=\sup_{u_*\in U_*}\inf_{v_*\in B(u_*)} g_*(u_*,v_*)$$

тоже не достигается. Выберем δ так, что $R(\Gamma)<\delta<\gamma$ и

$$\delta>\inf_{v_*\in B(u_0)} g_*(u_0,v_*)>R(\Gamma),\tag{4.5}$$

для некоторого $u_0\in U_*$. Положим

$$U_\#=\{u_*\in U_*:\inf_{v_*\in B(u_*)} g_*(u_*,v_*)>\delta\}\bigcup c_*(U),$$

$V_\#=V$, $g_\#$ и $h_\#$ - ограничения функций g_* и h_* на $U_\#\times V_\#$. По теореме о двух морфизмах игра Γ_* - квазиинформационное расширение игры $\Gamma_\#$. Но эти игры не изоморфны, так как в игре Γ_* есть стратегия u_0, для которой выполняется условие (4.5), а в игре $\Gamma_\#$ такой стратегии нет. Получили противоречие тому, что Γ_* - решение задачи 1.

Итак, задача 1 полностью решена.

Замечание 2. В постановке задачи 1 мы не требовали, чтобы

$$\pi_* \circ \pi_{2*} = \pi, c_{2*} \circ c_* = c, d_{2*} \circ d_* = d. \tag{4.6}$$

Поэтому нам пришлось воспользоваться довольно громоздкими конструкциями (4.3) и (4.4). Дополнительная трудность здесь возникает в связи с тем, что бесконечное множество может быть взаимно однозначно отображено на свое собственное подмножество. Если потребовать выполнения условия (4.6) или ограничиться рассмотрением конечных игр, решение задачи 1 можно несколько упростить.

5. Решение задачи 2

Непосредственно из определений вытекает следующее:

а) всякое решение задачи 2 является решением задачи 1;

б) если решение задачи 2 существует, то любые два решения Γ_* и $\Gamma_\#$ задачи 1 изоморфны (в том смысле, что Γ_* является квазиинформационным расширением игры $\Gamma_\#$ и наоборот);

в) обратно, если любые два решения задачи 1 изоморфны, то все они являются решениями задачи 2;

Поэтому из результатов разд. 4 непосредственно следует, что если $\gamma \le R(\Gamma)$, то игры изоморфные Γ и только они являются решением задачи 2. Если же $\gamma > R(\Gamma_2)$, то решения задачи 2 не существует, поскольку не существует даже решения задачи 1.

Остается рассмотреть случай $R(\Gamma) < \gamma \le R(\Gamma_2)$. Для понимания дальнейшего нужно знать структуру оптимальных стратегий в игре Γ_2 (см., например, [1]). Для простоты ограничимся случаем, когда U и V - компактные топологические пространства, а функции g и h непрерывны по совокупности переменных.

Из результатов разд. 4 следует, что всякое решение задачи 1 в рассматриваемом случае получается присоединением к множеству $c(U)$ ровно одной функции из V в U (разумеется, с точностью до изоморфизма игр). Из замечаний б) и в), сделанных в начале этого раздела следует, что для любых двух решений задачи 1 эти функции должны совпадать. Это означает, что существует единственная функция $u_2 \in U_2$ такая, что

$$\inf_{v \in B(u_2)} g(u_2(v), v). \tag{5.1}$$

Получим необходимые и достаточные условия существования и единственности такой функции.

Введем необходимые обозначения. Пусть

$$L = \max_{v \in V} \min_{u \in U} h(u,v), \ \ u_p(v) = \arg\min_{u \in U} h(u,v),$$

$$u_a(v) = \arg\max_{u \in U} g(u,v),$$

$$E = \{v \in V : \min_{u \in U} h(u,v) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} h(u,v)\},$$

$$M = \min_{v \in E} \max_{u \in U} g(u,v).$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$H = \{(u,v) \in U \times V / g(u,v) \ge \gamma, \ h(u,v) > L\} \ne \varnothing.$$

В таком случае для единственности функции, удовлетворяющей условию (5.1), необходимо выполнение следующих требований.

Условие 1. Множество H состояло из одной точки.

В самом деле, если (u_*, v_*) и $(u_\#, v_\#)$ принадлежат H, то обе функции

$$u_{2*}(v)=\begin{cases} u_*, v=v_*, \\ u_p(v), v\neq v_*, \end{cases} \tag{5.2}$$

$$u_{2\#}(v)=\begin{cases} u_\#, v=v_\#, \\ u_p(v), v\neq v_\# \end{cases}$$

удовлетворяют условию (5.1).

Далее, необходимо, чтобы выполнялось следующее требование.

Условие 2. $M<\gamma$.

В противном случае наряду с функцией вида (5.2) функция

$$u_{2**}(v)=\begin{cases} u_a(v), v\in E, \\ u_p(v), v\notin E \end{cases} \tag{5.3}$$

будет удовлетворять условию (5.1).

Наконец, если (u_*,v_*) - единственная точка множества H, то для единственности функции, удовлетворяющей условию (5.1), необходимо, чтобы выполнялось следующее требование.

Условие 3. Для любого $v\neq v_*$ существовала ровно одна точка u такая, что

$$h(u,v)<h(u_*,v_*).$$

В самом деле, если для некоторой точки v_+ существуют две точки u_+ и u_- такие, что

$$h(u_+,v_+)<h(u_*,v_*) \text{ и } h(u_-,v_+)<h(u_*,v_*)$$

то обе функции

$$u_{2+}(v)=\begin{cases} u_{2*}(v), v\neq v_+, \\ u_+, v=v_+, \end{cases}$$

$$u_{2-}(v)=\begin{cases} u_{2*}(v), v\neq v_+, \\ u_-, v=v_+, \end{cases}$$

удовлетворяют условию (5.1) (здесь u_{2*} - функция, определенная равенством (5.2)).

Условия 1 – 3 вместе являются и достаточными для единственности функции, удовлетворяющей условию (5.1) в случае $H\neq\varnothing$, поскольку при выполнении этих условий функция u_p определена однозначно, точка (u_*,v_*) определена однозначно и только функция, заданная равенством (5.2), удовлетворяет неравенству (5.1).

Остается рассмотреть случай $H=\varnothing$. Поскольку мы предполагаем $\gamma\leq R(\Gamma_2)$, это означает, что $\gamma\leq M$. Рассуждения, аналогичные предыдущим, показывают, что в этом случае для единственности функции u_2, удовлетворяющей условию (5.1), необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

(i) для каждого $v\in E$ существует единственная точка $u\in U$ такая, что $g(u,v)\geq\gamma$;

(ii) для каждого $v\notin E$ существует единственная точка $u\in U$ такая, что $h(u,v)<L$.

При выполнении этих условий неравенству (5.1) удовлетворяет функция, определенная условием (5.3) и только она.

Итак, условия существования и структура решения задачи 2 установлены.

6. Решение задачи 3

В силу монотонной зависимости максимального гарантированного результата от объема передаваемой информации (см. разд. 1), сама игра $\Gamma_\#$ является решением задачи 3.

Далее, пусть U_* - такое подмножество множества $U_\#$, что

$$\sup_{u_*\in U_*}\inf_{v_\#\in V_\#} g_\#(u_*,v_\#)=\sup_{u_\#\in U_\#}\inf_{v_\#\in V_\#} g_\#(u_\#,v_\#)=R(\Gamma_\#) \tag{6.1}$$

и $c_{\#}(U)\subset U_*$. Пусть $V_*=V_{\#}=V,\ g_*$ и h_* - ограничения функций $g_{\#}$ и $h_{\#}$ на $U_*\times V_*$. В силу теоремы о двух морфизмах (см. разд. 3) и условия (6.1), игра Γ_* является решением задачи 3.

Итак, описан способ получения решений задачи 3. Покажем, что все решения задачи 3 (с точностью до изоморфизма) могут быть получены этим способом.

Пусть $\Gamma_+=\langle U_+,V_+,g_+,h_+\rangle$ - решение задачи 3, $\langle\Gamma,\pi_+,c_+,d_+\rangle$ - квазиинформационное расширение игры Г, $\langle\Gamma_{\#},\pi_{+\#},c_{+\#},d_{+\#}\rangle$ - квазиинформационное расширение игры Γ_+.

Пусть $U_*=c_{+\#}(U_+),\ V_*=V,\ g_*$ и h_* - ограничения функций $g_{\#}$ и $h_{\#}$ на $U_*\times V_*$. По теореме о двух морфизмах, Γ_* - квазиинформационное расширение игры Г, а $\Gamma_{\#}$ - квазиинформационное расширение игры Γ_*. По определению квазиинформационного расширения, произведение $c_{+\#}\times d_{+\#}$ взаимно обратно ограничению π_{+*} отображения $\pi_{+\#}$ на $U_*\times V_*$, поэтому игры Γ_* и Γ_+ изоморфны. А раз одна из них является решением задачи 3, то и другая - тоже решение этой задачи.

7. Решение задачи 4

Если игра $\Gamma_{\#}$ изоморфна игре Г, то игры изоморфные игре Г и только они являются решениями задачи 4.

Пусть игра $\Gamma_{\#}$ не изоморфна игре Г. Тогда множество

$$\Delta=c(U_{\#})\backslash c_{\#2}(c_{\#}(U))\neq\varnothing.$$

Пусть, кроме того, $R(\Gamma_{\#})<R(\Gamma_2)$. Выберем множество $U_*\subset U_2$ такое, что $c(U)\subset U_*,\ U_* \mathrm{I}\ \Delta\neq\Delta$ и

$$\sup_{u_*\in U_*}\inf_{v_2\in V_2} g_2(u_*,v_2)=R(\Gamma_2). \tag{7.1}$$

Положим $V_*=V_2,\ g_*$ и h_* - ограничения g_2 и h_2 на $U_*\times V_*$. Непосредственно проверяется, что игра Γ_* - решение задачи 4. Рассуждения, аналогичные рассуждениям разд. 6, показывают, что все решения задачи 4 (с точностью до изоморфизма) могут быть получены указанным способом.

Остается рассмотреть случай, когда $\Delta\neq\varnothing$, а $R(\Gamma_*)=R(\Gamma_2)$. В этом случае сама игра $\Gamma_{\#}$ является решением задачи 4. Если, кроме того, существует подмножество $U_*\subset U_2$ такое, что Δ не содержится в U_* и выполняется равенство (7.1), то соответствующая ему игра тоже будет решением задачи 4, и все решения задачи 4 могут быть получены указанным способом.

8. Уточнение постановок

Вернемся к задаче 1. При попытке интерпретации найденного решения задачи возникает по крайней мере одна трудность. Будем говорить о наиболее интересном случае $R(\Gamma)<\gamma<R(\Gamma_2)$. В таком случае решение задачи 1 получается присоединением к множеству U одной непостоянной функции $u_*:V\to U$. Поскольку функция u_* непостоянна, существуют два элемента v_+ и v_- множества V такие, что $u_*(v_+)\neq u_*(v_-)$. Содержательно это означает, что в момент выбора своего управления игрок 1 обладает достаточной информацией, чтобы различить стратегии партнера v_+ и v_-. Но тогда тогда невозможно запретить ему при получении соответствующей информации выбрать любые другие управления из множества U.

Указанная трудность проистекает из несовершенства понятия квазиинформационного расширения. Известно [3], что не всякое квазиинформационное расширение допускает содержательную интерпретацию. К сожалению, получается так, что именно такие, не имеющие интерпретации квазиинформационные расширения являются решениями задачи 1.

Положение можно попытаться исправить, добавив к определению квазиинформационного расширения (см. разд. 1) следующее условие свободы выбора: для любой стратегии $u_*\in U_*$ и любой функции $\varphi:U\to U$ существует стратегия $w_*\in U_*$ такая, что для любого $v_*\in V_*$ выполняется равенство

$$(\varphi(\mathrm{pr}_1(\pi(u_*,v_*))),v)=\pi(w_*,v_*).$$

Выясним структуру решения задачи 1 в этой уточненной постановке. Пусть $\Gamma_*=\langle U_*,V_*,g_*,h_*\rangle$ - решение задачи 1. На множестве $V_*=V$ естественным образом задается отношение эквивалентности S: v_*Sw_* тогда и только тогда, когда для любой стратегии $u_*\in U_*$ выполняется равенство $\pi(u_*,v_*)=\pi(u_*,w_*)$. Пусть W - множество классов эквивалентности, а $P: V\to W$ - каноническая проекция, соответствующие этому отношению эквивалентности.

Из условия свободы выбора следует, что существует отображение ψ множества U_* на все множество $U_S=\Phi(W,U)$ такое, что для любой $u_*\in U_*$ выполняется равенство

$$\pi(u_*,v_*)=(\psi(u_*)(v_*),v_*).$$

Из теоремы о двух морфизмах следует, что если Γ_* - решение задачи 1, то это отображение взаимнооднозначно. В самом деле, если $\psi(u_*)=\psi(u_+)$, то выбросив из множества U_* стратегию u_+, получим игру, для которой Γ_* будет нетривиальным квазиинформационным расширением с тем же максимальным гарантированным результатом. Следовательно, игра Γ_* изоморфна игре $\Gamma_S=\langle U_S,V_S,g_S,h_S\rangle$, где $U_S=\Phi(W,U)$, $V_S=V$, $g_S(u_S,v_S)=g(u_S(P(v_S),v_S)$, $h_S(u_S,v_S)=h(u_S(P(v_S),v_S)$.

Таким образом, чтобы найти все решения уточненной задачи 1, нужно перебрать все отношения эквивалентности S на V и выбрать соответствующие игры Γ_S, удовлетворяющие условиям задачи.

Отношения эквивалентности на V можно естественным образом рассматривать как подмножества декартова произведения $V\times V$. Поэтому множество отношений эквивалентности естественным образом частично упорядочено по включению. Непосредственно проверяется, что если S и T - отношения эквивалентности на V и $S\subset T$, то игра Γ_S является квазиинформационным расширением игры Γ_T. Следовательно, в поисках решения задачи 1 можно ограничиться рассмотрением максимальных по включению отношений эквивалентности.

Выберем любую стратегию $u_2\in U_2$, удовлетворяющую условию

$$\inf_{v_2\in B(u_2)} g_2(u_2,v_2)\ge\gamma. \tag{8.1}$$

Определим отношение эквивалентности S таким условием: vSw тогда и только тогда, когда $u_2(v)=u_2(w)$. Непосредственно проверяется, что для соответствующей игры Γ_S выполняется неравенство $R(\Gamma_S)\ge\gamma$. Вообще говоря, не для всякой стратегии u_2 получается максимальное по включению отношение эквивалентности. Но из теоремы о двух морфизмах следует, что все отношения эквивалентности максимальные по включению среди тех, для которых $R(\Gamma_S)\ge\gamma$, могут быть получены указанным способом.

Итак, уточненная задача 1 сводится к следующей: среди стратегий $u_2\in U_2$, удовлетворяющих условию (8.1), выбрать те, которым соответствуют максимальные по включению отношения эквивалентности. Решение этой задачи требует привлечения несколько иных идей, поэтому оно здесь не рассматривается.

9. Неформальное обсуждение результатов

Данный раздел посвятим неформальному обсуждению некоторых нюансов рассмотренных выше постановок задач и полученных решений.

Начнем с проблемы существования решений. Задачи 3 и 4 решения всегда имеют, поэтому обсуждению подлежат лишь постановки 1 и 2. Это обсуждение следует разделить.

Начнем с условий существования решения задачи 1. Решение этой задачи не существует, если $\gamma>R(\Gamma_2)$. Это говорит скорее в пользу данной постановки. В самом деле, можно показать [3], что ни в каком квазиинформационном расширении Γ_* не может быть $R(\Gamma_*)>R(\Gamma_2)$. Таким образом, в данном случае мы имеем дело с требованием к результату, не обеспеченным технологическими возможностями.

Решение задачи 1 также не существует, если $\gamma=R(\Gamma_2)$, но в игре Γ_2 нет оптимальной стратегии. Опираясь на структуру решения игры Γ_2 (см. [1]), можно показать, что в этом случае для любого $\gamma'<\gamma$ решение задачи (I) существует. Поэтому в данном случае проблема существования стоит не слишком остро. При желании ее можно пытаться решить стандартным приемом введения идеальных элементов. Поэтому отсутствие решения в данном случае также не дискредитирует постановку.

Рассмотрим задачу 2. Если задача 1 решения не имеет, то естественно его не имеет и задача 2. Причины этого обсуждались выше. Остается рассмотреть случай, когда задача 1 решение имеет, а соответствующая задача 2 - нет. Данная проблема связана с тем, что квазиинформационные расширения лишь частично упорядочивают семейство всех игр. Отсутствие решения у задачи 2 поэтому выглядит достаточно естественным. Впрочем, решение проблемы можно искать в уточнении понятия квазиинформационного расширения, однако вероятнее всего, в данном случае проблема связана с существом дела, а не с неудачным способом формализации. Так или иначе, данная трудность дискредитирует скорее существующие способы формализации понятия информационного расширения, чем постановку задачи агрегирования информации.

Обратимся к другому вопросу. Во введении мы начали говорить о задаче синтеза иерархических систем, а затем перешли к задаче агрегирования информации. Понятно, что это - две разные задачи. Однако в рассматриваемом нами частном случае они весьма близки.

Выше рассматривались лишь такие квазиинформационные расширения игры Г, для которых игра Γ_2, в свою очередь, является квазиинформационным расширением. Это условие можно ослабить, заменив его условием

$$d_*(V)=V_*. \tag{9.1}$$

Содержательно это означает, что второй игрок, выбирая свои управления, не располагает никакой информацией о действиях партнера. Этот случай, разумеется, не исчерпывает всех возможных вариантов, но, безусловно, заслуживает внимания.

Рассуждения, аналогичные проведенным в разд. 4 – 7 позволяют получить решения соответствующих аналогов задач 1 - 4. Более того, решения задач 1 и 2 оказываются изоморфными решениям их обобщений соответственно.

Аналоги условия (9.1) могут диктоваться, например, временными рамками принятия решений. Поэтому они вполне естественно смотрятся в задаче синтеза иерархических систем.

Отметим, кстати, что если отказаться от условия (9.1), то условие свободы выбора (см. разд. 8) сформулировать будет гораздо труднее.

В заключение заметим, что постановка задачи 4 интерпретируется с большими натяжками и была рассмотрена лишь для логической полноты теории. Остальные постановки представляются достаточно естественными, а решения соответствующих задач кажутся вполне разумными с точки зрения обычного здравого смысла. Этот факт говорит в пользу данных постановок.

Против них говорит следующее обстоятельство. Жизнь демонстрирует нам большое структурное разнообразие иерархических систем. В рассмотренных задачах такого разнообразия не получается. Впрочем, кроме несовершенства этих постановок, данное обстоятельство может быть обусловлено недостатками понятия квазиинформационного расширения, условием (9.1), неучетом неопределенных факторов, рассмотрением игры только двух лиц.

Список литературы

Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука 1976. – 328 с.

Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975. – 528 с.

Кукушкин Н. С., Морозов В. В. Теория неантагонистических игр. – М.: МГУ, 1984. – 104 с.

Горелик В. А., Горелов М. А., Кононенко А. Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.

Мохонько Е. З. О дифференциальной игре с неточным знанием терминального выигрыша. М.: ВЦ РАН, 1994. – 64 с.

Алиев В. С., Кононенко А. Ф. Об условиях точного агрегирования информации в теоретико-игровых моделях. – М.: ВЦ РАН, 1991. – 28 с.