Автоматика и телемеханика, No.3, 1994, с. 12–23

УДК 519.714:519.853.3

©1994 г. А.С. АНТИПИН, д-р физ.-мат. наук
(Центр программных исследований РАН, Москва)

СЕДЛОВЫЕ ГРАДИЕНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ, УПРАВЛЯЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ

(Пересмотрено 4 декабря 2003 г.)

Предлагаются способы управления седловыми градиентными дифференциальными системами при наличии ограничений на управления и фазовые переменные. Доказывается асимптотическая устойчивость множества равновесных состояний управляемых систем.

В [1] справедливо отмечается, что проблема синтеза законов управления нелинейными объектами является одной из центральных. В частности, значительное число исследований посвящено задаче стабилизации программных движений. Однако эта задача по-прежнему далека от своего завершения. Слабо разработаны методы глобальной стабилизации и совсем слабо методы, в которых учитываются ограничения на управления и фазовые переменные.

В данной работе рассматривается синтез законов управления нелинейными объектами, множество равновесных состояний которых описывается задачами выпуклого программирования или вырожденными седловыми функциями. Такие задачи, имеющие практический интерес, поставляются теорией многосвязных нелинейных систем [2].

Описанные в работе алгоритмы стабилизации носят глобальный характер и, что важно, учитывают с помощью оператора проектирования наличие ограничений на управления и фазовые переменные.

1. Постановка проблемы

Рассматривается ситуация, когда статика многосвязного нелинейного объекта описывается седловой функцией $L(x,p)$, где $x \in Q \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^m$, а динамика объекта — седловой градиентной системой. Задача стабилизации равновесного состояния, определяемого седловой точкой, заключается в синтезе законов управления в виде обратных связей, которые со временем привели бы многосвязный управляемый объект в равновесное состояние.

В общем случае равновесное состояние x^*, p^*, которое является решением задачи стабилизации, описывается системой неравенств

$$L(x^*,p) \le L(x^*,p^*) \le L(x,p^*) \tag{1}$$

для всех $x \in Q \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^m$, где $L(x,p)$ — функция, выпуклая по x и вогнутая по p. Множества Q и P выпуклые замкнутые.

В частности, седловая функция может быть функцией Лагранжа $L(x,p) = f(x) + \langle p, g(x)\rangle$ задачи выпуклого программирования

$$x^* \in \operatorname{argmin}\{f(x) : g(x) \leq 0, x \in Q\}. \tag{2}$$

Предполагая дифференцируемость функции $L(x,p)$, выпишем необходимые и достаточные условия существования решения системы (1):

$$x^* = \pi_Q(x^* - \alpha \nabla L_x(x^*, p^*)), \qquad p^* = \pi_P(p^* + \alpha \nabla L_p(x^*, p^*)), \tag{3}$$

где $\pi_Q(\cdot)$, $\pi_P(\cdot)$ — операторы проектирования векторов на множества соответственно Q и P, а $\nabla L_x(x,p)$, $\nabla L_p(x,p)$ — векторы-градиенты функции $L(x,p)$ по переменным x и p соответственно.

Точка x^*, p^* является неподвижной точкой, или точкой равновесия. Система (3) имеет простой геометрический смысл: пусть x^*, p^* — точка равновесия, тогда если из точки x^*, p^* сделаем шаг по частному градиенту (антиградиенту) седловой функции $L(x,p)$, то после проектирования снова окажемся в точке x^*, p^*. Системы (1) и (3) эквивалентны.

Если седловая функция является функцией Лагранжа задачи выпуклого программирования (2), т.е. $L(x,p) = f(x) + \langle p, g(x)\rangle$, то в силу линейности функции по переменной p имеем $\nabla L_p(x,p) = g(x)$, а так как множество P совпадает с положительным ортантом, т.е. $P = (\mathbb{R}^m)_+$, то система (3) принимает вид

$$x^* = \pi_Q(x^* - \alpha \nabla L_x(x^*, p^*)), \qquad p^* = \pi_+(p^* + \alpha g(x^*)), \tag{4}$$

где $\pi_+(\cdot)$ — оператор проектирования на $(\mathbb{R}^m)_+$, параметр $\alpha > 0$.

Невязка, т.е. разность между левой и правой частями (3), равная нулю в точке x^*, p^* и соответственно не равная нулю в произвольной точке x, p, задает преобразование множества $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Образ этого преобразования можно рассматривать как векторное поле, неподвижная точка которого — x^*, p^*. Имея векторное поле, поставим задачу о проведении траектории так, чтобы ее касательная совпала с заданным направлением поля в этой точке. Формально эта задача описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \pi_Q(x - \alpha \nabla L_x(x,p)) - x, \qquad \frac{dp}{dt} = \pi_+(p + \alpha \nabla L_p(x,p)) - p. \tag{5}$$

Поскольку частные производные $\nabla L_x(x,p)$, $\nabla L_p(x,p)$ — монотонные операторы ($L(x,p)$ — выпукло-вогнутая функция) и по определению удовлетворяют условию Липшица, а операторы $\pi_Q(\cdot)$, $\pi_P(\cdot)$ — нерасширяющиеся, то система (5) для всех $x(t_0) = x^0$, $p(t_0) = p^0$ порождает согласно теореме существования и единственности траекторию $x(t)$, $p(t)$ для всех $t \geq t_0$.

Если $Q = \mathbb{R}^n$ и $P = \mathbb{R}^m$, то $\pi_Q(\cdot)$, $\pi_P(\cdot)$ — единичные операторы и система (5) принимает вид [3]

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha \nabla L_x(x,p), \qquad \frac{dp}{dt} = \alpha \nabla L_p(x,p). \tag{6}$$

Если $L(x,p)$ — функция Лагранжа задачи выпуклого программирования, то (5) согласно (4) имеет вид [4, 5]

$$\frac{dx}{dt} + x = \pi_Q(x - \alpha \nabla L_x(x,p)), \qquad \frac{dp}{dt} + p = \pi_+(p + \alpha g(x)). \tag{7}$$

Если в (2) $g(x) \equiv 0$, то для оптимизации $f(x)$ на множестве Q получим непрерывный метод проекции градиента [6, 7, 8]

$$\frac{dx}{dt} + x = \pi_Q(x - \alpha \nabla f(x)). \tag{8}$$

Другие подходы к исследованию непрерывных градиентных методов рассматривались в работах [9, 10, 11].

Возникает вопрос, будет ли траектория процесса (5) и его модификаций стремиться к одному из равновесий системы (3) при $t \to \infty$? Ответ на этот вопрос нетрудно получить, рассмотрев простейший пример. Пусть седловая функция имеет вид $L(x,p) = x \cdot p$, тогда начало координат является ее седловой точкой и удовлетворяет неравенству: $0 \cdot p \leq 0 \cdot 0 \leq x \cdot 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^1$ и $p \in \mathbb{R}^1$. Седловой градиентный метод с учетом спуска по одной переменной и подъема по другой имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha p, \quad \frac{dp}{dt} = \alpha x, \qquad \alpha > 0, \quad x(t_0) = x^0, \quad p(t_0) = p^0. \tag{9}$$

Отсюда $xdx + pdp = 0$ или $x^2 + p^2 = r^2$, т.е. траектории метода, которые представляют собой концентрические окружности, не сходятся к нулю. Несходимость метода является следствием того факта, что оператор $F(x,p) = (-p,x)^\top$ не потенциальный (хотя оператор $F_1(x,p) = (p,x)^\top$ — потенциальный [12]: $F_1(x,p)$ — градиент для $L(x,p)$). В работе [11] для исключения ситуации, представленной в (9), введено понятие Г-устойчивости.

Равновесная точка в этом примере является равновесием типа "центра" и соответственно не является асимптотически устойчивой , хотя и устойчива по Ляпунову. Небольшая деформация фазового портрета может изменить свойство равновесия, например асимптотически неустойчивый "центр" превратить в асимптотически устойчивый узел. Необходимые деформации фазовых портретов можно получить, по-видимому, многими способами. Одной из плодотворных идей является концепция управления динамическими системами с помощью обратных связей. В данной работе исследуются градиентные процессы, проксимальные рассматриваются в [13].

2. Градиентные процессы, управляемые по невязкам и производным

Обратные связи будем трактовать как функции, зависящие от фазовых координат и скоростей системы, т.е. $u = u(x,p,\dot{x},\dot{p})$ и $v = v(x,p,\dot{x},\dot{p})$, где $\dot{x} = dx/dt$, $\dot{p} = dp/dt$ и $x \in Q$, $p \in P$. В точках равновесия эти функции, по определению, равны нулю.

Введем в градиентную систему (5) аддитивные управления u и v, получим

$$\frac{dx}{dt} + x = \pi_Q(x - \alpha \nabla L_x(x, p+u)), \qquad \frac{dp}{dt} + p = \pi_P(p + \alpha \nabla L_p(x+v, p)) \tag{10}$$

и поставим следующую задачу. В некотором классе обратных связей $u = u(x,p,\dot{x},\dot{p})$, $v = v(x,p,\dot{x},\dot{p})$ требуется выбрать управления как функции состояния динамической системы (10), которые обеспечили бы сходимость траектории $x(t)$, $p(t)$ к равновесию. Другими словами, необходимо синтезировать алгоритм управления, с помощью которого система (10) переводится из произвольного начального состояния x^0, p^0 в равновесное x^*, p^* за бесконечное время.

Обратные связи $u = u(x,p,\dot{x},\dot{p})$, $v = v(x,p,\dot{x},\dot{p})$ можно интерпретировать как положение "рулей" объекта, который перемещается по исследуемой траектории, или как вектор энергии, которую необходимо израсходовать для удержания "рулей" в заданном положении. В точке равновесия объект неподвижен и его скорости $\dot{x}$, $\dot{p}$ равны нулю, поэтому расход энергии в равновесии нулевой: $u = u(x^*, p^*, \dot{x}^*, \dot{p}^*) = 0$, $v = v(x^*, p^*, \dot{x}^*, \dot{p}^*) = 0$. Это, пожалуй, единственное требование, предъявляемое к управлению, вытекающее из существа ситуации. Во всем остальном управления могут быть произвольными.

Самые простейшие управления имеют вид [5]

$$u = \dot{p}, \qquad v = \dot{x} \tag{11}$$

и выражают простую мысль: энергия, расходуемая на управление движением, пропорциональна вектору скорости. Если (10) замкнуть управлением (11), то получается неявная (не разрешенная относительно производных) дифференциальная система:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} + x = \pi_Q(x - \alpha \nabla L_x(x, p + \dot{p})), \qquad x(t_0) = x^0, \\ &\frac{dp}{dt} + p = \pi_P(p + \alpha \nabla L_p(x + \dot{x}, p)), \qquad p(t_0) = p^0. \end{aligned} \tag{12}$$

Итеративный аналог этой системы представляет собой неявный итеративный процесс вида

$$x^{n+1} = \pi_Q(x^n - \alpha \nabla L_x(x^n, p^{n+1})), \qquad p^{n+1} = \pi_P(p^n + \alpha \nabla L_p(x^{n+1}, p^n)). \tag{13}$$

Здесь x^n, p^n — ранее найденное приближение, а система должна быть разрешена относительно переменных x^{n+1}, p^{n+1}. Для решения этой системы, в свою очередь, нужны какие-то другие итеративные подпроцессы. Как показывает опыт решения уравнений математической физики с помощью неявных разностных схем, объем вычислений, необходимый для решения вспомогательной подзадачи, может быть значительным. Тем не менее общий объем вычислений, необходимый для решения исходной задачи, часто оказывается существенно меньше, чем если бы использовался явный итеративный процесс, причем точность полученного решения при использовании неявных итеративных процессов, как правило, значительно выше.

Для доказательства сходимости любого градиентного метода необходимо, чтобы градиент удовлетворял условию Липшица. В случае процесса (12) потребуем выполнения условия Липшица не от градиента функции $L(x, p)$, а от частных градиентов $\nabla L_x(x, p)$, $\nabla L_p(x, p)$ в форме

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) - \langle \nabla \varphi(x), h \rangle < \frac{1}{2} L|h^2| \tag{14}$$

для всех x и $x + h$ из Q. Если это неравенство выписать для частного градиента $\nabla L_x(x, p)$ функции $L(x, p)$, то константа Липшица этого неравенства будет зависеть от переменной p. Аналогично константа Липшица другого неравенства будет зависеть от переменной x.

В дальнейшем будем рассматривать функции $L(x, p)$ и множества Q и P такие, для которых эти константы не зависят от соответствующих переменных. Это требование всегда выполняется, если вторые частные производные функции $L(x, p)$ непрерывны и ограничены на множествах Q и P, и потому оно не слишком жесткое. Это требование также выполняется тогда, когда градиент функции $L(x, p)$ удовлетворяет условию Липшица по совокупности переменных x и p на множестве $Q \times P$.

Итак, пусть

$$L(x+h,p) - L(x,p) - \langle \nabla L_x(x,p), h\rangle \le \frac{1}{2}\, L_1|h|^2 \tag{15}$$

для всех x и $x+h$ из Q и p из P,

$$L(x,p+h) - L(x,p) - \langle \nabla L_p(x,p), h\rangle \ge \frac{1}{2}\, L_2|h|^2 \tag{16}$$

для всех p и $p+h$ из P и x из Q.

Докажем асимптотическую устойчивость процесса (10), (11).

Теорема 1. Если множество точек равновесия $X^* \times P^*$ системы (1) не пусто, частные градиенты $\nabla L_x(x,p)$, $\nabla L_p(x,p)$ седловой функции $L(x,p)$ на выпуклых замкнутых множествах Q и P удовлетворяют условиям Липшица (15) и (16) с константами L_1 и L_2, параметр α выбирается из условия $\alpha < \min\{2/L_1, 2/L_2\}$, то траектория процесса (12) сходится монотонно по норме к одному из равновесий, т.е. $x(t) \to x^* \in X^*$, $p(t) \to p^* \in P^*$ при $t \to \infty$ для всех x^0, p^0.

При этих же условиях сходится и итеративный вариант процесса (13). Доказательство теоремы 1 приведено в приложении 1.

Если $L(x,p)$ является функцией Лагранжа задачи выпуклого программирования, то в силу ее линейности по двойственным переменным неравенство (16) превращается в тождество. В соответствии с этим ограничения на параметр α изменяются и принимают вид: $\alpha < 2/(L_0 + \langle L, C\rangle)$, где L_0 — константа Липшица градиента $\nabla f(x)$ целевой функции $f(x)$, L — векторная константа Липшица градиента $\nabla g(x)$ функциональных ограничений: $g(x) \le 0$, C — константа, ограничивающая траекторию $p + \dot p$ для всех $t \ge t_0$, т. е. $p + \dot p \le C$.

Отдавая должное преимуществам процесса (13), необходимо отметить еще раз его недостаток, который проявляется в его неявности, или неразрешимости, относительно производной. Желание нейтрализовать этот недостаток приводит к управлениям по невязкам, порожденным условиями (3):

$$u = \pi_P(p + \alpha\nabla L_p(x,p)) - p, \qquad v = \pi_Q(x - \alpha\nabla L_x(x,p)) - x. \tag{17}$$

После замыкания управлениями (17) система (10) приобретает вид

$$\frac{dx}{dt} + x = \pi_Q(x - \alpha\nabla L_x(x,\bar u)), \qquad \frac{dp}{dt} + p = \pi_P(p + \alpha\nabla L_p(\bar v, p)), \tag{18}$$

где

$$\bar u = \pi_P(p + \alpha\nabla L_p(x,p)), \qquad \bar v = \pi_Q(x - \alpha\nabla L_x(x,p)). \tag{19}$$

Система (18), (19) является явной, что особенно отчетливо проявляется в ее итеративном аналоге, впервые описанном в [14]:

$$\bar u^n = \pi_P(p^n + \alpha\nabla L_p(x^n,p^n)), \qquad \bar v^n = \pi_Q(x^n - \alpha\nabla L_x(x^n,p^n)) \tag{20}$$

и

$$x^{n+1} = \pi_Q(x^n - \alpha\nabla L_x(x^n,\bar u^n)), \qquad p^{n+1} = \pi_P(p^n + \alpha\nabla L_p(\bar v^n, p^n)). \tag{21}$$

Система (18), (19), а также ее итеративный аналог (20), (21) сходятся к равновесию при тех же предположениях, что и процесс (12).

3. Градиентные процессы со смешанный управлением

К априорным недостаткам процесса (18), (19) следует отнести его громоздкость и достаточно слабую эффективность (скорость сходимости). Эти недостатки можно существенно ослабить, если воспользоваться смешанными управлениями. Градиентные процессы со смешанными управлениями рассмотрим применительно к функции Лагранжа $L(x,p) = f(x) + \langle p, g(x)\rangle$ задачи выпуклого программирования (2), т.е. седловой функции, линейной по одной из переменной. Смешанные управления рассмотрим в виде

$$u = \pi_+(p + \alpha g(x)) - p, \qquad v = \dot{x}. \tag{22}$$

После замыкания системы (10) управлениями (22) получим

$$\frac{dx}{dt} + x = \pi_Q(x - \alpha\nabla L_x(x, \bar{u})), \tag{23}$$

$$\frac{dp}{dt} + p = \pi_+(p + \alpha g(x + \dot{x})), \tag{24}$$

$$\bar{u} = \pi_+(p + \alpha g(x)), \qquad x(t_0) = x^0, \quad p(t_0) = p^0. \tag{25}$$

Итеративный аналог (23) – (25) выглядит следующим образом:

$$\bar{u}^n = \pi_+(p + \alpha g(x^n)), \quad x^{n+1} = \pi_Q(x^n - \alpha\nabla L_x(x^n, \bar{u}^n)), \quad p^{n+1} = \pi_+(p^n + \alpha g(x^{n+1})). \tag{26}$$

Система рекуррентных соотношений (26), впервые предложенная в работе [15], имеет более простую форму, чем формулы (20), (21).

Доказательство асимптотической устойчивости точек равновесия процесса (23) – (25) устанавливается в следующей теореме.

Теорема 2. Если множество точек равновесия $X^* \times P^*$ системы (1) не пусто, градиенты $\nabla f(x)$, $\nabla g(x)$ целевой функции и функциональных ограничений на выпуклом замкнутом множестве Q удовлетворяют условиям Липшица с константами L_0 и L (векторная константа), отображение $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $|g|$, траектория $\bar{u} = \pi_+(p + \alpha g(x))$ для всех $t \geq t_0$ ограничена векторной константой C, т.е. $\bar{u} \leq C$, параметр α выбирается из условия

$$0 < \alpha < \frac{4}{((L_0 + \langle L, C\rangle)^2 + 16|g|^2)^{1/2} + (L_0 + \langle L, C\rangle)},$$

то траектория процесса (23) – (25) сходится к одному из равновесий монотонно по норме, т.е. $x(t) \to x^* \in X^*$, $p(t) \to p^* \in P^*$ при $t \to \infty$ для всех x^0, p^0.

При этих же условиях сходится и итеративный вариант процесса (26). Доказательство теоремы приведено в приложении 2.

Установим связь прогнозного метода (23) – (25) с методом, в котором сначала осуществляется шаг по прямой переменной, а затем с учетом полученного приближения — по двойственной переменной [15]. Вектор $\bar{u}$ из (25) подставим в (23) и преобразуем отдельно величину $\nabla L_x(x, \pi_+(p + \alpha g(x))) = \nabla f(x) + \nabla g^\top(x)\pi_+(p + \alpha g(x)) = \nabla M_x(x,p)$, где модифицированная функция Лагранжа имеет вид $M(x,p) = f(x) + (1/2\alpha)|\pi_+(p + \alpha g(x))|^2 - (1/2\alpha)|p|^2$. В результате получим процесс (23) – (25) в терминах модифицированной функции Лагранжа:

$$\frac{dx}{dt} + x = \pi_Q(x - \alpha\nabla M_x(x,p)), \qquad \frac{dp}{dt} + p = \pi_+(p + \alpha g(x + \dot{x})). \tag{27}$$

Процесс (27) имеет более компактный вид, чем (23) – (25).

П Р И Л О Ж Е Н И Е 1

Доказательство теоремы 1. Следуя определению оператора проектирования, систему дифференциальных уравнений (12) представим в виде вариационных неравенств:

$$\langle x + \dot{x} - x + \alpha \nabla L_x(x, p + \dot{p}), z - x - \dot{x} \rangle \geq 0 \tag{A1.1}$$

для всех $z \in Q$ и

$$\langle p + \dot{p} - p - \alpha \nabla L_p(x + \dot{x}, p), y - p - \dot{p} \rangle \geq 0 \tag{A1.2}$$

для всех $y \in P$.

В неравенстве (A1.1) положим $z = x^*$, тогда

$$\langle \dot{x} + \alpha \nabla L_x(x, p + \dot{p}), x^* - x - \dot{x} \rangle \geq 0. \tag{A1.3}$$

Учитывая, что $\dot{x} = d/dt(x - x^*)$, представим (A1.3) в таком виде:

$$-\left\langle \frac{d}{dt}(x - x^*), x - x^* \right\rangle - |\dot{x}|^2 + \alpha \langle \nabla L_x(x, p+\dot{p}), x^* - x \rangle - \alpha \langle \nabla L_x(x, p+\dot{p}), \dot{x} \rangle \geq 0. \tag{A1.4}$$

Третье слагаемое из (A1.4) оценим, используя выпуклость функции $L(x, p)$ по переменной x:

$$\langle \nabla L_x(x, p + \dot{p}), x^* - x \rangle \leq L(x^*, p + \dot{p}) - L(x, p + \dot{p}). \tag{A1.5}$$

Перепишем еще раз (A1.4), предварительно прибавив к левой части нулевую величину вида $L(x + \dot{x}, p + \dot{p}) - L(x + \dot{x}, p + \dot{p})$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x - x^*|^2 + |\dot{x}|^2 \quad + &\quad \alpha L(x, p + \dot{p}) - \alpha L(x^*, p + \dot{p}) + \alpha L(x + \dot{x}, p + \dot{p}) - \\ - &\quad \alpha L(x + \dot{x}, p + \dot{p}) + \alpha \langle \nabla L_x(x, p + \dot{p}), \dot{x} \rangle \leq 0. \end{aligned} \tag{A1.6}$$

Сумму третьего, шестого и седьмого слагаемых из (A1.6) оценим, используя неравенство Липшица (15):

$$L(x + \dot{x}, p + \dot{p}) - L(x, p + \dot{p}) - \langle \nabla L_x(x, p + \dot{p}), \dot{x} \rangle \leq \frac{1}{2} L_1 |\dot{x}|^2. \tag{A1.7}$$

Четвертое слагаемое из (A1.6) оценим с помощью системы неравенств:

$$L(x^*, p + \dot{p}) \leq L(x^*, p^*) \leq L(x + \dot{x}, p^*). \tag{A1.8}$$

Используя оценки (A1.7), (A1.8), представим (A1.6) в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x - x^*|^2 + \left(1 - \alpha\, \frac{1}{2}\, L_1\right) |\dot{x}|^2 + \alpha (L(x + \dot{x}, p + \dot{p}) - L(x + \dot{x}, p^*)) \leq 0. \tag{A1.9}$$

Перейдем к анализу второго уравнения из (12). С этой целью в вариационном неравенстве (A1.2) положим $y = p^*$, тогда

$$\langle \dot{p} - \alpha \nabla L_p(x + \dot{x}, p), p^* - p - \dot{p} \rangle \geq 0. \tag{A1.10}$$

Отсюда

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p - p^*|^2 - |\dot{p}|^2 - \alpha \langle \nabla L_p(x + \dot{x}, p), p^* - p \rangle + \alpha \langle \nabla L_p(x + \dot{x}, p), \dot{p} \rangle \geq 0. \tag{A1.11}$$

Это неравенство симметрично (A1.9) и, следовательно, преобразуется по той же схеме. Отметим ее основные этапы. С учетом вогнутости функции $L(x,p)$ по переменной p оценим

$$\langle \nabla L_p(x+\dot{x},p), p^*-p\rangle \geq L(x+\dot{x},p^*) - L(x+\dot{x},p). \tag{A1.12}$$

Используя полученную оценку, представим (A1.11):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p-p^*| + |\dot{p}|^2 &+ \alpha(L(x+\dot{x},p^*) - L(x+\dot{x},p)) - \alpha L(x+\dot{x},p+\dot{p}) + \\ &+ \alpha L(x+\dot{x},p+\dot{p}) - \alpha\langle \nabla L_p(x+\dot{x},p),\dot{p}\rangle \leq 0. \end{aligned} \tag{A1.13}$$

Далее согласно (16) имеем

$$L(x+\dot{x},p+\dot{p}) - L(x+\dot{x},p) - \langle \nabla L_p(x+\dot{x},p),\dot{p}\rangle \geq \frac{1}{2}\,L_2\,|\dot{p}|^2. \tag{A1.14}$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p-p^*|^2 + \left(1-\alpha\,\frac{1}{2}\,L_2\right)|\dot{p}|^2 + \alpha(L(x+\dot{x},p^*) - L(x+\dot{x},p+\dot{p})) \leq 0. \tag{A1.15}$$

Сложим неравенства (A1.9) и (A1.15), тогда получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x-x^*|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p-p^*|^2 + \left(1-\alpha\,\frac{1}{2}\,L_1\right)|\dot{x}|^2 + \left(1-\alpha\,\frac{1}{2}\,L_2\right)|\dot{p}|^2 \leq 0. \tag{A1.16}$$

Поскольку $\alpha < \min\left\{\frac{2}{L_1},\frac{2}{L_2}\right\}$, то $\left(1-\alpha\frac{1}{2}L_1\right) > 0$, $\left(1-\alpha\frac{1}{2}L_2\right) > 0$.

Проинтегрируем неравенство (A1.16) от t_0 до t:

$$\begin{aligned} |x-x^*|^2 + |p-p^*|^2 &+ 2\left(1-\alpha\frac{1}{2}L_1\right)\int\limits_{t_0}^{t}|\dot{x}|^2 d\tau + \\ &+ 2\left(1-\alpha\frac{1}{2}L_2\right)\int\limits_{t_0}^{t}|\dot{p}|^2 d\tau \leq |x^0-x^*|^2 + |p^0-p^*|^2, \end{aligned} \tag{A1.17}$$

где $x^0 = x(t_0)$, $p^0 = p(t_0)$. Из (A1.17) следует ограниченность траектории $|x(t)- -x^*|^2 + |p(t)-p^*|^2 \leq |x^0-x^*|^2 + |p^0-p^*|^2$, а так как x^0, p^0 — произвольное начальное значение, то множество точек равновесия системы устойчиво по Ляпунову, при этом имеет место сходимость интегралов $\int\limits_{t_0}^{t}|\dot{x}|^2 d\tau < \infty$, $\int\limits_{t_0}^{t}|\dot{p}|^2 d\tau < \infty$ при $t \Rightarrow \infty$.

Докажем асимптотическую устойчивость множества точек равновесия. Допустив существование $\varepsilon > 0$ такого, что $|\dot{x}(t)| \geq \varepsilon$ and $|\dot{p}(t)| \geq \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$, войдем в противоречие со сходимостью интегралов. Следовательно, существует подпоследовательность моментов времен $t_i \Rightarrow \infty$ такая, что $|\dot{x}(t_i)| \to 0$, $|\dot{p}(t_i)| \to 0$. Так как $x(t)$, $p(t)$ ограничена, то существует элемент x', p' такой, что $x(t_i) \to x'$, $p(t_i) \to p'$ при $t_i \to \infty$.

Рассмотрим неравенства (A1.1), (A1.2) для всех моментов времен $t_i \to \infty$ и, перейдя к пределу, выпишем предельные неравенства:

$$\langle \nabla L_x(x',p'), z-x'\rangle \geq 0, \qquad \langle \nabla L_p(x',p'), y-p'\rangle \leq 0 \tag{A1.18}$$

для всех $z \in Q$ и $y \in P$. Эта система неравенств эквивалентна (1) и, следовательно, $x' = x^* \in Q$, $p' = p^* \in P$.

Таким образом, любая предельная точка траектории $x(t)$, $p(t)$ является решением задачи, при этом величина $|x(t)-x^*|^2+|p(t)-p^*|^2$ монотонно убывает. В совокупности эти два факта означают, что траектория $x(t)$, $p(t)$ может иметь только одну предельную точку, т.е. траектория $x(t)$, $p(t)$ монотонно сходится к одному из решений задачи: $x(t) \to x^*$, $p(t) \to p^*$ при $t \Rightarrow \infty$. Теорема доказана. $\square$

П Р И Л О Ж Е Н И Е 2

Доказательство теоремы 2. Систему уравнений (23) представим в виде вариационных неравенств:

$$\langle x + \dot{x} - x + \alpha \nabla L_x(x, \bar{u}), z - x - \dot{x} \rangle \geq 0 \tag{A2.1}$$

для всех $z \in Q$ и

$$\langle p + \dot{p} - p - \alpha g(x + \dot{x}), y - p - \dot{p} \rangle \geq 0 \tag{A2.2}$$

для всех $y \in P$,

$$\langle \bar{u} - p - \alpha g(x), y - \bar{u} \rangle \geq 0 \tag{A2.3}$$

для всех $y \in P$.

Оценим величину отклонения векторов $p + \dot{p}$ и $\bar{u}$ из (23) – (25). С этой целью воспользуемся неравенством Липшица в форме

$$|g(x + h) - g(x)| \leq |g|\,|h| \tag{A2.4}$$

для всех x и $x + h$ из Q, где $|g|$ — константа Липшица для преобразования $g(x)$ на некотором множестве,

$$|p+\dot{p}-\bar{u}| \leq |\pi_+(p+\alpha g(x+\dot{x})) - \pi_+(p+\alpha g(x))| \leq \alpha |g(x+\dot{x}) - g(x)| \leq \alpha\,|g|\,|\dot{x}|. \tag{A2.5}$$

В неравенстве (A2.1) положим $z = x^*$, тогда

$$\langle \dot{x} + \alpha \nabla L_x(x, \bar{u}), x^* - x - \dot{x} \rangle \geq 0. \tag{A2.6}$$

Представим это неравенство в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x - x^*|^2 + |\dot{x}|^2 + \alpha \langle \nabla L_x(x, \bar{u}), x^* - x \rangle + \alpha \langle \nabla L_x(x, \bar{u}), \dot{x} \rangle \leq 0. \tag{A2.7}$$

В левую часть (A2.7) прибавим нулевую величину вида $L(x + \dot{x}, \bar{u}) - L(x + \dot{x}, \bar{u})$, кроме того, используя выпуклость функции $L(x, p)$ по x в форме неравенства

$$\langle \nabla L_x(x, \bar{u}), x^* - x \rangle \leq L(x^*, \bar{u}) - L(x, \bar{u}), \tag{A2.8}$$

преобразуем (A2.7):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x - x^*|^2 \quad &+ \quad |\dot{x}|^2 + \alpha L(x, \bar{u}) - \alpha L(x^*, \bar{u}) - L(x + \dot{x}, \bar{u}) + \\ &+ \quad L(x + \dot{x}, \bar{u}) + \alpha \langle \nabla L_x(x, \bar{u}), \dot{x} \rangle \leq 0. \end{aligned} \tag{A2.9}$$

Напомним, что $L(x,p) = f(x) + \langle p, g(x)\rangle$ и $\nabla L_x L(x,p) = \nabla f(x) + \nabla g^\top(x) p$, где $\nabla g^\top(x)$ — транспонированная матрица, каждый столбец которой является вектором-градиентом соответствующей скалярной функции из $g(x)$.

Сумму третьего, пятого и седьмого слагаемых из (A2.9) преобразуем отдельно, используя ограниченность траектории $\bar u = \pi_+(p + \alpha g(x))$ и неравенство Липшица в форме (14):

$$\begin{aligned} L(x+\dot x, \bar u) \;&-\; L(x,\bar u) - \langle \nabla L_x(x,\bar u), \dot x\rangle = f(x+\dot x) + \langle \bar u, g(x+\dot x)\rangle - f(x) + \\ &+\; \langle \bar u, g(x)\rangle - \langle \nabla f(x), \dot x\rangle - \langle \nabla g^\top(x)\bar u, \dot x\rangle \le \frac{1}{2}(L_0 + \langle L, C\rangle)|\dot x|^2. \end{aligned} \tag{A2.10}$$

Здесь L_0 — константа Липшица для $\nabla f(x)$, L — векторная константа Липшица для $\nabla g(x)$. В окончательном выражении, с учетом того, что $\bar u = \pi_+(p + \alpha g(x)) \le$ $\le C$, используется оценка $\langle L, \bar u\rangle \le \langle L, C\rangle$, где C — априорная векторная константа, ограничивающая траекторию $\bar u = \pi_+(p + \alpha g(x))$.

Четвертое слагаемое из (A2.9) оценим с помощью системы неравенств (1):

$$L(x^*, \bar u) \le L(x^*, p^*) \le L(x + \dot x, p^*). \tag{A2.11}$$

Используя оценки (A2.10) и (A2.11), перепишем неравенство (A2.9):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x - x^*|^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}(L_0 + \langle L, C\rangle)\right)|\dot x|^2 + \alpha(L(x+\dot x, \bar u) - L(x + \dot x, p^*)) \le 0$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x - x^*|^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}(L_0 + \langle L, C\rangle)\right)|\dot x|^2 + \alpha(\langle \bar u - p^*, g(x+\dot x)\rangle) \le 0. \tag{A2.12}$$

К неравенству (A2.12) вернемся чуть позже, а сейчас рассмотрим вариационные неравенства (A2.2) и (A2.3). Положим $y = p^*$ в (A2.2), тогда

$$\langle \dot p - \alpha g(x + \dot x), p^* - p - \dot p\rangle \ge 0 \tag{A2.13}$$

или

$$\langle \dot p, p^* - p - \dot p\rangle - \alpha\langle g(x+\dot x), p^* - p - \dot p\rangle \ge 0. \tag{A2.14}$$

Аналогично положим $y = p + \dot p$ в (A2.3), тогда

$$\langle \bar u - p - \alpha g(x), p + \dot p - \bar u\rangle \ge 0 \tag{A2.15}$$

или

$$\langle \bar u - p, p + \dot p - \bar u\rangle + \alpha\langle g(x+\dot x) - g(x), p + \dot p - \bar u\rangle - \alpha\langle g(x+\dot x), p + \dot p - \bar u\rangle \ge 0. \tag{A2.16}$$

С учетом оценки (A2.5) последнее неравенство перепишем в виде

$$\langle \bar u - p, p + \dot p - \bar u\rangle + \alpha^2|g|^2|\dot x|^2 - \alpha\langle g(x+\dot x), p + \dot p - \bar u\rangle \ge 0. \tag{A2.17}$$

Сложив (A2.14) и (A2.17), получим

$$\langle \dot p, p^* - p - \dot p\rangle - \alpha\langle g(x+\dot x), p^* - \bar u\rangle + \langle \bar u - p, p + \dot p - \bar u\rangle + \alpha^2|g|^2|\dot x|^2 \ge 0. \tag{A2.18}$$

Третье слагаемое из (A2.18) преобразуем с помощью тождества

$$|p_1 - p_2|^2 = |p_1 - p_3|^2 + 2\langle p_1 - p_3, p_3 - p_2\rangle + |p_3 - p_2|^2. \tag{A2.19}$$

Для этого положим $p_1 = p$, $p_2 = p + \dot{p}$, $p_3 = \bar{u}$ в (A2.19) и получим

$$\langle \bar{u} - p, p + \dot{p} - \bar{u} \rangle = \frac{1}{2}|\dot{p}|^2 - \frac{1}{2}|p - \bar{u}|^2 - \frac{1}{2}|p + \dot{p} - \bar{u}|^2.$$

Затем, используя неравенство

$$\frac{1}{4}|p_1 - p_2|^2 \leq \frac{1}{2}|p_1 - p_3|^2 + \frac{1}{2}|p_3 - p_2|^2, \tag{A2.20}$$

оценим

$$\frac{1}{4}|\dot{p}|^2 \leq \frac{1}{2}|p - \bar{u}|^2 + \frac{1}{2}|p + \dot{p} - \bar{u}|^2.$$

С учетом полученных оценок, а также $\langle \dot{p}, p - p^* \rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p - p^*|^2$ имеем

$$\frac{1}{2}|p - p^*|^2 + \frac{3}{4}|\dot{p}|^2 - \alpha^2|g|^2|\dot{x}|^2 + \alpha\langle g(x + \dot{x}), p^* - \bar{u} \rangle \leq 0. \tag{A2.21}$$

Сложив (A2.12) и (A2.21), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x - x^*|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p - p^*|^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}(L_0 + \langle L, C \rangle) - \alpha^2|g|^2\right)|\dot{x}|^2 + \frac{3}{4}|\dot{p}|^2 \leq 0. \tag{A2.22}$$

Определим границы изменения параметра α из условия

$$1 - \frac{\alpha}{2}(L_0 + \langle L, C \rangle) - \alpha^2|g|^2 > 0.$$

Левая часть этого неравенства представляет собой параболу относительно переменной α с вершиной в верхней полуплоскости и “усами”, направленными вниз. Правая точка пересечения этой параболы и оси $0x$ имеет координату

$$0 < \alpha < \frac{((L_0 + \langle L, C \rangle)^2 + 16|g|^2)^{1/2} - (L_0 + \langle L, C \rangle)}{4|g|^2}.$$

поэтому если выбрать параметр α меньше этой координаты, то коэффициент при $|\dot{x}|^2$ в (A2.22) будет положительным. Освободившись от иррациональности в числителе этой дроби, ограничения на α удобно представить в форме:

$$0 < \alpha < \frac{4}{((L_0 + \langle L, C \rangle)^2 + 16|g|^2)^{1/2} + (L_0 + \langle L, C \rangle)}.$$

Таким образом, при этом условии коэффициент при $|\dot{x}|^2$ в (A2.22) неотрицателен. Неравенство (A2.22) в этом случае аналогично неравенству (A1.16) из теоремы 1, и конец доказательства этой теоремы проводится по аналогии с теоремой 1. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пятницкий Е.С.* Автоматизированные подсистемы анализа и синтеза нелинейных систем управления движением. // Проблемы машиностроения. 1990. N° 5. С. 74–80.

2. Многосвязные системы управления. / Под ред. М.В. Меерова. М.: Наука. 1990.

3. *Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х.* Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

4. *Антипин А.С.* Обратные связи в оптимизации. // Сб. тр. "Модели и методы оптимизации". М.: ВНИИСИ, 1989. Вып.1. С. 14–20.

5. *Антипин А.С.* Градиентные и проксимальные управляемые процессы. // Вопросы кибернетики. Анализ больших систем. М.: Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика" РАН, 1992. С. 32–67.

6. *Антипин А.С.* Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования. // Вопросы кибернетики. Вычислительные вопросы анализа больших систем. М.: Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика" РАН, 1989, С. 5–43.

7. *Brown A.A., Bartholomew-Biggs M.C.* Some Effective Methods for Unconstrained Optimization Based on the Solution of Systems of Ordinary Differential Equations. // J. Optimization Theory and Applications. 1989. V.62. N° 2. P. 211–224.

8. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.

9. *Карпинская Н.Н., Рыбашов М.В.* О непрерывных алгоритмах с использованием модифицированной функции Лагранжа. // АиТ. 1973. N° 9. С. 16–21.

10. *Венец В.И., Рыбашов М.В.* Метод функций Ляпунова в исследовании непрерывных алгоритмов математического программирования. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1977. Т.17. N° 3. С. 622–633.

11. *Венец В.И.* Непрерывный алгоритм отыскания седловых точек выпукло-вогнутой функции. // АиТ. 1984. N° 1. С. 42–47.

12. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1983.

13. *Антипин А.С.* Управляемые проксимальные дифференциальные системы для решения седловых задач. // Дифференц. уравнения. 1992. Т.28. N° 11. С. 1846–1861.

14. *Корпелевич Г.М.* Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач. // Экономика и мат. методы. 1976. Т.12. Вып.4. С. 747–756.

15. *Антипин А.С.* Об одном методе отыскания седловой точки модифицированной функции Лагранжа. // Экономика и мат. методы. 1977. Т.13. Вып.3. С. 560–565.